Zadaci koji su rađeni na vežbama

Zoran Ovcin

Školska 2012/13

Linearna algebra

Sistemi linearnih jednačina

Gausova metoda

Gausovom metodom eliminacije rešiti sistem linearnih jendačina i dati geometrijsku interpretaciju rešenja.

1.
$$\begin{aligned} 2x+y&=4\\ 4x+2y&=8 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} 2x+y&=4\\ 4x+2y&=6 \end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned} 2x+y&=4\\ 4x-2y&=6 \end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ 2x+4y-6z&=0\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$$

5.
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ 2x+4y-6z&=1\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$$

6.
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ 4x+5y+6z&=15\\ 7x+8y+9z&=24 \end{aligned}$$

7.
$$\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ 4x+5y+6z&=15\\ 7x+8y+9z&=23 \end{aligned}$$

Gausovom metodom eliminacije rešiti sistem linearnih jendačina.

1.
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=10\\ 2x+3y+2z&=3\\ 3x+4y+3z&=4\\ 4x+7y-4z&=23 \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} x+2y-3z&=10\\ 2x+3y+2z&=3\\ 3x+4y+3z&=4\\ 4x+7y-4z&=24 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=10\\ 2x+3y+2z&=3\\ 4x+7y-4z&=23 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x+2y+z&=4\\ 2x+4y+3z&=9 \end{aligned}$$

Determinante

Izračunati determinantu

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Izračunati determinantu

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 12 & 10 & 2011 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 6\\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix}$$

Izračunati determinantu koristeći osobine determinanti

1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & 5 & 0\\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Teorema: Sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih je određen ako i samo ako je determinanta sistema različita od nule.
Izvesti Kramerovo pravilo.
Pomoću Kramerovog pravila rešiti sistem linearnih jednačina.

1.

$$\begin{aligned} 2x+y&=4\\ 4x-2y&=6 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=0\\ 2x+4y-6z&=1\\ x+y+z&=4 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ 4x+5y+6z&=15\\ 7x+8y+8z&=23 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=6\\ 4x+5y+6z&=15\\ 7x+8y+9z&=24 \end{aligned}$$

Matrice

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ izračunati

a) $A \cdot B$

b) $3C^T + 2A^T$

c) $A^T \cdot C$

d) $A \cdot C^T$

Za matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ izračunati

a) $A \cdot B$

b) $B \cdot A$

c) $A \cdot C$

d) $C^T \cdot A^T$

Matričnim računom rešiti sistem jednačina

1.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ 4x - 2y &= 6 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 6 \\ 4x + 5y + 6z &= 15 \\ 7x + 8y + 8z &= 23 \end{aligned}$$

Vektori i analitička geometrija

Dati su vektori $\vec{a} = (p-2)\vec{i} + 3\vec{j} + (p-1)\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$.
Odrediti parametar $p \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$

i) imaju isti intenzitet

ii) budu kolinearni

iii) budu ortogonalni.

Data su temena paralelograma: $A(-2,0,1)$, $B(0,2,0)$, $C(4,3,1)$.

- Odrediti četvrto teme D.
- Izračunati obim i površinu.
- Naći presek i dužine dijagonala.
- Izračunati ugao kod temena A.
- Naći vrh prave piramide $ABCDE$ čija visina iznosi 3.

Odrediti dužine dijagonala, ugao između njih i površinu paralelograma koga obrazuju vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{j} + \vec{k}$

Ispitati da li su vektori $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = 4\vec{i} - \vec{k}$ koplanarni i odrediti $\lambda \in \mathbb{R}$ tako da vektori $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ i $\vec{c}$ budu ortogonalni.

Date su ravni $\alpha : 2x + 2y - z = 6$ i $\beta : x - y - 2z = -3$. Odrediti jednačinu (u kanoničkom obliku) prave p koja je presek ravni α i β i proveriti da li je mimoilazna sa pravom $q : \frac{x-5}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-5}{4}$.

Data su prava $p : \frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-2}{-1}$ i ravan $\alpha : 2x + 3y + z = 11$. Naći tačku A, prodor prave p kroz ravan α.

Data je tačka $B(3,4,5)$. Da li $B \in \alpha$? Da li su tačka B i tačka $C(3,3,2)$ sa iste strane ravni α?
Koliko je $d(B,\alpha)$?
Naći pravu q koja je paralelna sa α, sadrži tačku B i preseca pravu p.

Date su prave $p : \frac{x}{-1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-3}{-1}$ i $q : \frac{x-1}{0} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{-2}$. Naći tačke $A \in p$ i $B \in q$ takve da je duž AB najkraća.

U ravni $\alpha : x + 2y + 2z = 16$ leži kružnica poluprečnika $r = 3$ sa centrom u tački $C(8,-3,7)$. Na kružnici naći tačku D koja je najbliža tački $A(1,1,2)$.

U koordinatnoj ravni naći treće teme jednakostraničnog trougla OAB, ako je $O(0,0)$, $A(1,1)$. Proveriti.

Rotirati tačku $A(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$ oko y-ose za ugao $\varphi = 45^\circ$.

Granične vrednosti

Izračunati graničnu vrednost

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3 + 6n - 1}{2n^3 + 3n^2}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-3)^{n+1}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2} - 4^n}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+3}\right)^{n+2}$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^5} + \sqrt[5]{x^4}}{\sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^3 - 1 - 3x}{x^2 + x^4}$
7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}{x^3 - x^2 - x - 2}$
9. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - x + 1}$
10. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x\sqrt{x} - 4\sqrt{x}}{x^2 - 16}$
11. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{\sin(2x)}$
12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$
13. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$
14. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$
15. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{3}\right)^{\frac{2}{(x-1)^3}}$
16. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{1}{x-8}$
17. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6} - x}{x-3}$

Odrediti vrednost parametara a tako da funkcija bude neprekidna u svim tačkama definisanosti.

a) $f(x)=\begin{cases} ax+e^{\frac{1}{x-1}}, & x<1 \\ a, & x=1 \\ \operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 1+x, & x\leq 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$

Naći izvod funkcije $y=\sqrt{x}$ primenom definicije i postaviti tangente na krivu $y=\sqrt{x}$ u tačkama čije su apscise $x_0=1$ i $x_1=2$.

Naći prvi izvod funkcije i uprostiti dobijeni izraz

- $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-x+1}$
- $y=\operatorname{tg} x$
- $y=\ln\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$
- $y=\dfrac{\ln(x-1)}{x^2-1}$
- $y=\ln\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

Detaljno ispitati funkciju i skicirati njen grafik

- $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$
- $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-2x+4}$
- $y=\dfrac{e^x}{1+x}$
- $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$
- $y=\sqrt{x^2-2}$