Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Saobraćajni odsek, V godina

Broj indeksa __________
Prezime i ime ___________________________________

Operaciona istraživanja - deo 1

21. III 2010. godine

U jednoj fabrici se proizvode tri rastvora: P_1, P_2 i P_3, a koriste se dve sirovine S_1 i S_2 u $[kg/m^3]$:

	P_1	P_2	P_3
S_1	3	2	5
S_2	4	6	4

Na raspolaganju su nam 100kg sirovine S_1 i 120kg sirovine S_2 dnevno. Proizvodi se pakuju na mašini koja troši dva sata za m^3 za rastvor P_1, jedan sat za m^3 za rastvor P_2 i jedan sat za m^3 za rastvor P_3.

Zarada po m^3 od rastvora P_1 je 50€, od rastvora P_2 je 30€, od rastvora P_3 je 40€.

Sa kojim planom dnevne proizvodnje se ostvaruje maksimalna zarada?

Za plan proizvodnje uvodimo veličine:
$x_1 =$ količina rastvora P_1 $[m^3]$
$x_2 =$ količina rastvora P_2 $[m^3]$
$x_3 =$ količina rastvora P_3 $[m^3]$
$z =$ zarada [€].

$$
\begin{aligned}
z = 50x_1 + 30x_2 + 40x_3 &\to \max \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\leq 100 \\
4x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\leq 120 \\
2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 24 \\
x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0.
\end{aligned}
$$

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
w_1	3	2	5	1	0	0	100
w_2	4	6	4	0	1	0	120
w_3	2	1	1	0	0	1	24
	-50	-30	-40	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
w_1	0	$1/2$	$7/2$	1	0	$-3/2$	64
w_2	0	4	2	0	1	-2	72
x_1	1	$1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$	12
	0	-5	-15	0	0	25	600

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
x_3	0	$1/7$	1	$2/7$	0	$-3/7$	$128/7$
w_2	0	$26/7$	0	$-4/7$	1	$-8/7$	$248/7$
x_1	1	$3/7$	0	$-1/7$	0	$5/7$	$20/7$
	0	$-20/7$	0	$30/7$	0	$130/7$	$6120/7$

3	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
x_3	$-1/3$	0	1	$1/3$	0	$-2/3$	$52/3$
w_2	$-26/3$	0	0	$2/3$	1	$-22/3$	$32/3$
x_2	$7/3$	1	0	$-1/3$	0	$5/3$	$20/3$
	$20/3$	0	0	$10/3$	0	$70/3$	$2680/3$

Ne treba proizvoditi rastvor P_1, treba proizvoditi $\frac{20}{3} = 6.66667m^3$ rastvora P_2 i $\frac{52}{3} = 17.33333m^3$ rastvora P_3 i ostvariće se zarada od $\frac{2680}{3} = 893.33$€.

Broj indeksa ___________
Prezime i ime _______________________________________

Operaciona istraživanja - deo 2

21. III 2010. godine

Na grafu su strelicama obeleženi putni pravci između čvorova $\mathscr{N} = \{\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{D}, \mathsf{E}, \mathsf{F}, \mathsf{G}\}$. Vreme u minutama potrebano da se pređe određeni put je dato na granama.

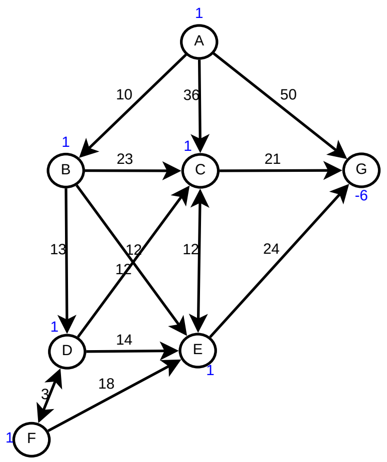
Napisati u matričnom obliku problem linearnog programiranja koji odgovara problemu nalaženju najbržeg puta od svih čvorova do čvora G i odrediti matrice.

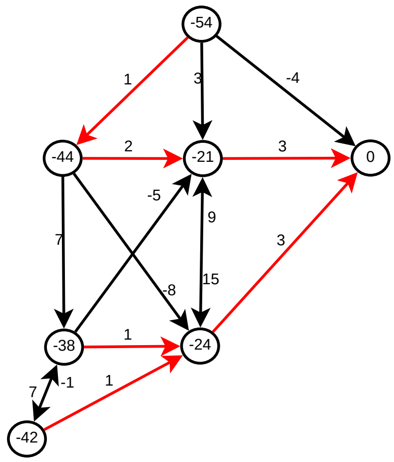
$$c^T x \to \min\,,\ Ax = -b\,,\ x \geq 0$$

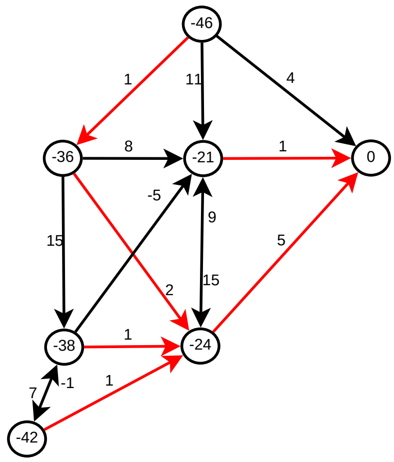
$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix},$$

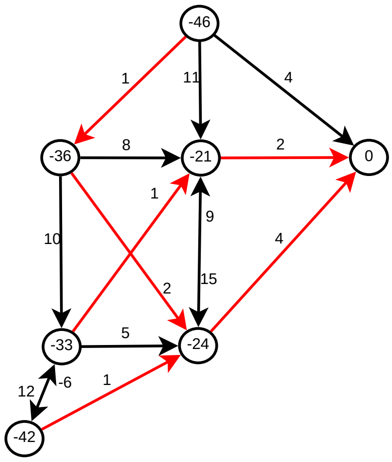
$$c = \begin{bmatrix} 10 & 36 & 50 & 23 & 13 & 12 & 12 & 21 & 12 & 14 & 3 & 12 & 24 & 3 & 18 \end{bmatrix}$$

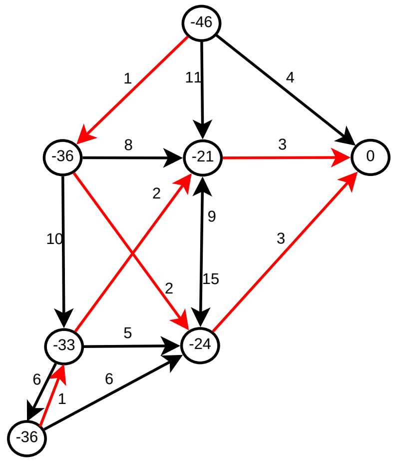
Polazeći od pokrivajućeg stabla $\{\mathsf{AB}, \mathsf{BC}, \mathsf{CG}, \mathsf{DE}, \mathsf{EG}, \mathsf{FE}\}$ rešiti problem nalaženja najbržeg puta od svih čvorova do čvora G.











Najbrži put do čvora G je:

A	B	C	D	E	F
46	36	21	33	24	42

minuta.

Rešiti transportni problem izmedju snabdevača S_1, S_2 i S_3 i potrošača P_1, P_2 i P_3, ako su cene transporta, zalihe snabdevača i potrebe potrošača dati u tabeli:

	P_1	P_2	P_3	zalihe
S_1	8	4	5	7
S_2	3	5	2	5
S_3	7	6	9	8
potrebe	6	5	9	

8 (5)	4 (2)	5 7	4
3 5	5 (3)	2 $(-\mathbf{3})$	4
7 1	6 5	9 2	0
7	6	9	

8 (2)	4 $(-\mathbf{1})$	5 7	1
3 3	5 (3)	2 2	4
7 3	6 5	9 (3)	0
7	6	6	

8 (3)	4 3	5 4	0
3 (1)	5 (4)	2 5	3
7 6	6 2	9 (2)	-2
5	4	5	

Optimalna tabela.

$$\zeta^* = 4\times 3 + 5\times 4 + 2\times 5 + 7\times 6 + 6\times 2 = 96$$

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad	**Broj indeksa** __________
Saobraćajni odsek, V godina	**Prezime i ime** ___________________________________

Operaciona istraživanja - deo 3

21. III 2010. godine

U službi 988 ima četiri ulazne linije. U trećoj smeni rade dva operatera koji koriste ulazne linije. Treća smena traje od 22 do 06 časova, u njoj bude prosečno 800 poziva koji stižu po Poasonovoj raspodeli. Klijenti ne odustaju ako im se operater ne javi odmah. Ako su sve linije zauzete, klijenti dobijaju signal za zauzeto. Vreme opsluživanja jednog poziva ima eksponencijalnu raspodelu sa očekivanjem 25 sekundi, nezavisno od klijenta do klijenta.

a) Napisati sistem diferencijalnih jednačina koji opisuje dati sistem masovnog opsluživanja.

b) Naći matricu prelaza Λ, parametre μ i λ.

c) Izračunati ergodične verovatnoće.

d) Koliki je očekivani broj zauzetih linija?

e) Koliki je prosečan broj klijenata koji dobiju zauzet signal u trećoj smeni?

f) Koliko vremena u trećoj smeni je prvi operater slobodan?

Ovo je sistem masovnog opsluživanja $M/M/2/4$.

a) $p'(t) = p(t) \cdot \Lambda,\ p(0) = (1,0,0,0,0)\,.$

b) $\lambda = 100h^{-1}$ i $\mu = 3600/25h^{-1} = 144h^{-1}$.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}.$$

c)

$$s_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4} = 2.04837\,.$$

Ergodične verovatnoće su:

$$p_0^* = \frac{1}{s_0}\,,\ p_1^* = \frac{\lambda}{\mu}p_0^*\,,\ p_2^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_1^*\,,\ p_3^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_2^*\,,\ p_4^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_3^*\,.$$

$$p = [p_0, p_1, p_2, p_3, p_4] = [0.4882, 0.3390, 0.1177, 0.0409, 0.0142]$$

d) Očekivani broj zauzetih linija je $L = \sum_{k=0}^{4} kp_k^* = 0.75385$.

e) Prosečno $800\frac{1}{h} \cdot 8h \cdot p_4^* = 90.88$ klijenata u trećoj smeni dobija zauzet signal.

f) Prosečno, prvi šalter je slobodan $(p_0^* + \frac{1}{2}p_1^*) \cdot 8 = 661.77min$.