Slučajni procesi

Kažemo da je $\{X(t) : t \in [0,+\infty)\}$ **slučajni proces** ako je X funkcija $X : \Omega \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, koja je za svako fiksirano $t \in [0,+\infty)$ slučajna promenljiva $X(t) : \Omega \to \mathbb{R}$.
Ako za sve $t \in [0,+\infty)$ važi $X(t) : \Omega \to \mathscr{R}_X$, gde je $\mathscr{R}_X$ najviše prebrojiv skup ($\mathscr{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$), kažemo da je slučajni proces $\{X(t) : t \in [0,+\infty)\}$ **diskretno vredan**. Tada je za proizvoljno $t \in [0,+\infty)$ slučajna promenljiva $X(t)$ diskretna. Skup $\mathscr{R}_X$ zovemo **skup stanja** slučajnog procesa.
Kažemo da je diskretno vredan slučajni proces $\{X(t) : t \in [0,+\infty)\}$ **Markovljev**, ili da ima osobinu Markova, ako za sve $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ iz skupa stanja $\mathscr{R}_X$ i za sve $t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_n \le t_{n+1}$ iz skupa $[0,+\infty)$ važi

$$P\left(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \ldots, X(t_n) = x_n\right) = = P\left(X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n\right) .$$

Posmatramo za $t_1 < t_2$ i $x_1, x_2 \in \mathscr{R}_X$ **verovatnoće prelaza**

$$p(t_1,t_2,x_1,x_2) := P(X(t_2) = x_2 | X(t_1) = x_1) .$$

Procese kod kojih verovatnoća $p(t_1,t_2,x_1,x_2)$ ne zavisi od t_1 i t_2 već samo od njihove razlike $t_2 - t_1$:

$$P(X(t_2) = x_2 | X(t_1) = x_1) = p(t_2 - t_1, x_1, x_2)$$

nazivamo **homogenim**. Ubuduće posmatramo homogene, diskretno vredne, Markovljeve procese. Bez gubitka opštosti, uzimamo da je skup stanja $\mathscr{R}_X = \{0,1,2,\ldots\}$.

Homogeni, diskretno vredni Markovljevi procesi

Označavamo za $t \in [0,+\infty)$

$$p_{ij}(t) = P(X(s+t) = j | X(s) = i),$$

Vrednost $p_{ij}(t)$ tumačimo kao verovatnoću da sistem za vreme t pređe iz stanja i u stanje j. Zbog homogenosti, ta verovatnoća je ista sve s.
Matrica

$$P(t) = \begin{bmatrix} p_{0,0}(t) & p_{0,1}(t) & p_{0,2}(t) & \cdots \\ p_{1,0}(t) & p_{1,1}(t) & p_{1,2}(t) & \cdots \\ p_{2,0}(t) & p_{2,1}(t) & p_{2,2}(t) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

se naziva **matrica verovatnoća prelaza**.
Lako je videti da je $P(0) = I$.
Raspodela verovatnoće u momentu t:

$$X(t) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots \\ p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \cdots \end{pmatrix},$$

gde je $p_k(t) = P(X(t) = k)$. Verovatnosni vektor $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \ldots)$, nazivamo **vektor stanja**.

Jednačine Čepmen–Kolmogorov

$\forall s,t \ge 0$

$$P(s+t) = P(s)P(t) , \quad p(s+t) = p(s)P(t) .$$

Brzine prelaza

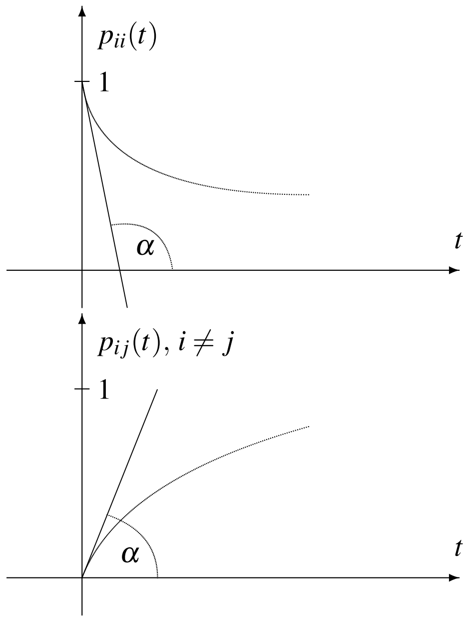
Definišemo

$$\lambda_{ij} = p'_{ij}(0) = \lim_{t\to 0_+} \frac{P_{ij}(t) - p_{ij}(0)}{t} .$$

λ_{ij} zovemo **brzine prelaza**.
Matricu

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{0,0} & \lambda_{0,1} & \lambda_{0,2} & \cdots \\ \lambda_{1,0} & \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots \\ \lambda_{2,0} & \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

nazivamo **matrica brzina prelaza**.
Skica funkcije p_{ij}, za $i = j$, i za $i \neq j$ daje geometrijsku interpretaciju brzina prelaza: $\lambda_{ij} = \tan\alpha$, gde je α ugao pod kojim funkcija p_{ij} izlazi iz y-ose.



Lako se vidi da su elementi matrice Λ na dijagonali nepozitivni, a van dijagonale nenegativni.
Zato što je $P(t)$ verovatnosna matrica (svi elementi su nenegativni brojevi i zbir po vrstama je 1), zbir elemenata po vrstama matrice Λ je 0.

Diferencijalne jednačine Čepmen–Kolmogorov

$$P'(t) = P(t) \cdot \Lambda\,.$$

$$p'(t) = p(t) \cdot \Lambda\,.$$

Oznaka za izvod vektora ili matrice $p'(t)$ podrazumeva da se prvi izvod uzima po svim komponentama. Dobija se sistem diferencijalnih jednačina koji se može egzaktno rešiti u nekim specijalnim slučajevima.

Procesi rađanja i umiranja

Za Markovljev, homogen, diskretno vredan slučajni proces čija matrica brzina prelaza je oblika

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

gde su $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \mu_1 \geq 0$, $\mu_2 \geq 0, \ldots,$ kažemo da je **proces rađanja i umiranja**.
Za ovakve procese sa $X(t)$ obeležavamo veličinu populacije u momentu t. U pitanju mogu biti biološke populacije, klijenti u sistemu opsluživanja, kvarovi u nekom mehanizmu,...
Veličine λ_j se tumače kao brzine rađanja jedne jedinke za populaciju čija veličina je j. Brojevi μ_j se tumače kao brzine umiranja jedne jedinke u populaciji veličine j.

Ergodičnost

Ako za proces rađanja i umiranja važi

$$\forall j \in \mathscr{R}_X, \exists p_j^*, \forall i \in \mathscr{R}_X, \lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = p_j^*,$$

kažemo da je **ergodičan**.

Ergodični procesi posle dugog vremena ($t \to \infty$) „zaboravljaju" iz kog stanja su krenuli, vidimo po tome što je vrednost limesa ista za sve i.
Posledica ergodičnosti je da i vektori stanja teže ka ergodičnim verovatnoćama p^*:

$$\forall j \in \mathscr{R}_X, \exists p_j^*, \forall i \in \mathscr{R}_X, \lim_{t\to\infty} p_j(t) = p_j^*.$$

Ako se na diferencijalnu jednačinu Čepmen-Kolmogorov za ergodičan proces rađanja i umiranja primeni granični proces sa $t \to \infty$, ona prelazi u algebarski sistem jednačina

$$p'(t) = p(t) \cdot \Lambda \quad / \left(\lim_{t\to\infty}\right)$$

$$0 = p^* \cdot \Lambda\,, \text{ gde je } p^* = (p_0^*, p_1^*, \ldots)$$

Taj sistem jednačina glasi:
$0 = \mu_1 p_1^* - \lambda_0 p_0^*,$
$0 = \mu_2 p_2^* - (\lambda_1+\mu_1) p_1^* + \lambda_0 p_0^*,$
$0 = \mu_3 p_3^* - (\lambda_2+\mu_2) p_2^* + \lambda_1 p_1^*,$
$\ldots$
Iz prve jednačine izrazimo p_1^* preko p_0^*:
$p_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0^*$ i to ubacimo u drugu jednačinu:
$0 = \mu_2 p_2^* - (\lambda_1+\mu_1) \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0^* + \lambda_0 p_0^*,$
odakle izrazimo p_2^* preko p_0^*: $p_2^* = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0^*.$

Nastavljajući ovaj postupak dobijamo
$p_k^* = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1}^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda k-1}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k} p_0^*, k = 1,2,\ldots$.
Za ergodične verovatnoće treba da važi: $p_0^* + p_1^* + \cdots = 1$. Dobijene relacije ubacimo u ovu jednakost i dobijamo

$$p_0^* \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \cdots\right)}_{s_0} = 1\,.$$

Očigledno je da je proces rađanja i umiranja ergodičan samo ako je $s_0 < \infty$, odnosno, ako suma u zagradi konvergira. Tada je $p_0^* = 1/s_0$, a ostale ergodične verovatnoće se dobijaju iz relacija:

$$p_1^* = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0^*, p_2^* = \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} p_0^*, p_3^* = \frac{\lambda_0\lambda_1\lambda_2}{\mu_1\mu_2\mu_3} p_0^*, \ldots$$

Poasonov slučajni proces

Proces rađanja i umiranja čija je matrica brzina prelaza

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \text{ za } \lambda > 0,$$

zovemo **Poasonov slučajni proces**.
Ako se ovaj proces inicijalizuje iz stanja 0, sistem diferencijalnih jednačina Čepmen-Kolmogorov:
$p_0'(t) = \quad -\lambda p_0(t),\ p_0(0) = 1,$
$p_1'(t) = \lambda p_0(t) - \lambda p_1(t),\ p_1(0) = 0,$
$p_2'(t) = \lambda p_1(t) - \lambda p_2(t),\ p_2(0) = 0, \ldots$
daje rešenje

$$p_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Odnosno, broj jedinki u momentu t ima Poasonovu raspodelu: $X(t) : \mathscr{P}(\lambda t)$.
Očekivana veličina populacije u momentu t je $E(X(t)) = \lambda t$.
Ako se proces inicijalizuje iz stanja $n > 0$ jedinki, verovatnoće su iste, samo „pomerene" za n:

$$\begin{cases} p_0(t) = p_1(t) = \cdots = p_{n-1}(t) = 0, \\ p_{n+k}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},\ k = 0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Tada je očekivana veličina populacije u momentu t: $E(X(t)) = n + \lambda t$.

Linearni proces čistog rađanja

Ako su brzine umiranja nula: $\mu_k = 0,\ k = 1,2,\ldots$, a brzine rađanja proporcionalne veličini populacije: $\lambda_k = \lambda \cdot k$, za $\lambda > 0$, dobijamo **linearni proces čistog rađanja**.
Ovaj proces nema smisla inicijalizovati iz populacije veličine 0, zato uzimamo da je početna veličina populacije 1.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -2\lambda & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \lambda > 0.$$

Veličinu λ zovemo natalitet.
Sistem diferencijalnih jednačina Čepmen-Kolmogorov:
$p_0'(t) = \quad 0,\ p_0(0) = 0,$
$p_1'(t) = \quad -\ \lambda p_1(t),\ p_1(0) = 1,$
$p_2'(t) = \ \lambda p_1(t) - 2\lambda p_2(t),\ p_2(0) = 0,$
$p_3'(t) = 2\lambda p_2(t) - 3\lambda p_3(t),\ p_3(0) = 0, \ldots$
daje rešenje

$$p_k(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^{k-1} e^{-\lambda t},\ k = 0,1,2,\ldots$$

Odnosno, broj jedinki u momentu t ima Geometrijsku raspodelu: $X(t) : \mathscr{G}(e^{-\lambda t})$.
Očekivana veličina populacije u momentu t je $E(X(t)) = e^{\lambda t}$.
Ako se ovaj proces inicijalizuje iz stanja od n jedinki, posmatramo ga kao n nezavisnih procesa inicijalizovanih iz stanja 1 jedinke. Tada je očekivano stanje sistema $E(X(t)) = ne^{\lambda t}$.

Linearni proces čistog umiranja

Ako su brzine rađanja nula: $\lambda_k = 0, k = 0, 1, \ldots$, a brzine umiranja proporcionalne veličini populacije: $\mu_k = \mu \cdot k$, za $\mu > 0$, dobijamo **linearni proces čistog umiranja**.

Ovaj proces inicijalizujemo iz populacije veličine n. Nema rađanja, zato nas interesuje samo konačna matrica brzina prelaza: sa stanjima od 0 do n:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \mu & -\mu & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -2\mu & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n\mu & -n\mu \end{bmatrix},$$

$\mu > 0$. Veličinu μ zovemo mortalitet.

Sistem diferencijalnih jednačina Čepmen-Kolmogorov:

$p_0'(t) = \ \mu p_1(t)$, $p_0(0) = 0$,
$p_1'(t) = 2\mu p_2(t) - \mu p_1(t)$, $p_1(0) = 0$,
$\ldots$
$p_{n-1}'(t) = n\mu p_n(t) - (n-1)\mu p_{n-1}(t)$, $p_{n-1}(0) = 0$
$p_n'(t) = \quad - n\mu p_n(t)$, $p_n(0) = 1$.

Sistem rešavamo idući od poslednje jednačine. To je diferencijalne jednačina koja razdvaja promenljive, njeno rešenje je $p_n(t) = ce^{-n\mu t}$. Početni uslov za $t = 0$ daje $c = 1$, Dakle: $p_n(t) = e^{-n\mu t}$.

Dobijeno rešenje se ubacuje u pretposlednju jednačinu, pa se dobije obična d. j.
$p_{n-1}'(t) + (n-1)\mu p_{n-1}(t) = n\mu e^{-n\mu t}$.

Ovo je linearna d. j. sa konstantnim koeficijentima. Rešenje odgovarajuće homogene je $y_h = ce^{-(n-1)\mu t}$. Partikularni deo je oblika $y_p = Ae^{-n\mu t}$. Da bismo odredili A, ubacujemo y_p u d. j. i dobijamo:
$-n\mu Ae^{-n\mu t} + (n-1)\mu Ae^{-n\mu t} \equiv n\mu e^{-n\mu t}$,
odakle dobijamo $A = -n$.

Opšte rešenje je:
$p_{n-1}(t) = y_h + y_p = ce^{-(n-1)\mu t} - ne^{-n\mu t}$.

Početni uslov za $t = 0$ daje $c = n$. Dakle:
$p_{n-1}(t) = n\,(1 - e^{-\mu t})\,e^{-(n-1)\mu t}$.

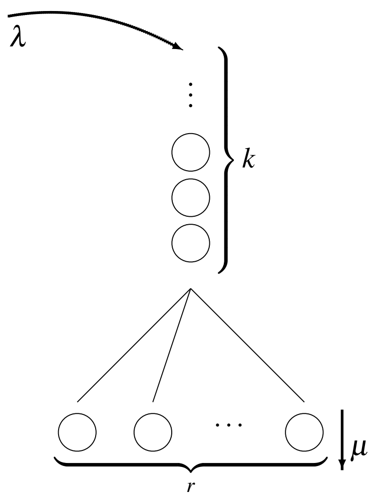
Nastavljanje ovog postupka rešavanja nam daje

$$p_k(t) = \binom{n}{k} \left(1 - e^{-\mu t}\right)^{n-k} \left(e^{\mu t}\right)^k.$$

Odnosno, slučajna promenljive $X(t)$ ima Binomnu raspodelu $\mathscr{B}(n, e^{-\mu t})$.

Očekivana veličina populacije u momentu t je $E(X(t)) = ne^{-\mu t}$.

Sistemi masovnog opsluživanja M|M|r|k|FIFO



Posmatramo sisteme masovnog opsluživanja sa r pribora za opsluživanje i maksimalnom dužinom reda k. Klijenti pristižu u sistem sa vremenom između dva pristizanja raspoređenom po eksponencijalnoj raspodeli $\mathscr{E}(\lambda)$, nezavisno. Ako su svi pribori za opsluživanje zauzeti, klijenti čekaju u zajedničkom redu po redosledu pristizanja (FIFO = *First In First Out*). Postoje i druge discipline reda, ako je disciplina reda izostavljena, podrazumeva se FIFO.

Ako je $k = \infty$, onda se u Kendalovoj notaciji ne piše. Tako bi M|M|2 bila oznaka za sistem masovnog opsluživanja sa dva pribora za opsluživanje i beskonačnim redom za čekanje.

Vreme opsluživanja na svakom priboru je nezavisno od klijenta do klijenta i ima eksponencijalnu raspodelu $\mathscr{E}(\mu)$.

Proces pristizanja klijenata u sistem je Poasonov sa parametrom λ, a opsluživanje klijenata na jednom priboru (kad nema čekanja na pristizanje klijenta) je Poasonov proces sa parametrom μ.

Ako klijente sistema posmatramo kao jedinke populacije, onda je ovo primer procesa rađanja i umiranja čija matrica brzina prelaza je

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r\mu & -(\lambda+r\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r\mu & -(\lambda+r\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Za sisteme masovnog opsluživanja ćemo izračunavati ergodične verovatnoće i posmatrati stanje sistema posle dovoljno dugog vremena. Računamo

$$s_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu 2\mu} + \cdots \frac{\lambda^r}{r!\mu^r} + \frac{\lambda^{r+1}}{rr!\mu^{r+1}} + \frac{\lambda^{r+2}}{r^2 r!\mu^{r+2}} + \cdots$$

Ova suma konvergira ako je $\lambda < r\mu$, u tom slučaju je proces ergodičan, inače se proces zagušuje i kako $t \to \infty$, broj klijenata u sistemu teži beskonačnosti.

Imamo $p_0 = \frac{1}{s_0}$, a ostale verovatnoće $p_k^* = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1}^*$, $k = 1, 2, \ldots r$; $p_k^* = \frac{\lambda}{r\mu} p_{k-1}^*$, $k = r+1, r+2, \ldots$.

Ako je maksimalna dužina reda konačna, onda je skup mogućih stanja konačan. Onda klijenti koji dođu u sistem kad su sva mesta na priborima i u redu za čekanje zauzeta, dobijaju otkaz. Onda matrica Λ ne ide do neskonačnosti, već su $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \cdots = 0$ i $\mu_{k+1} = \mu_{k+2} = \cdots = 0$. Tada suma s_0 ima konačno mnogo nenula sabiraka, odnosno, konvergira. Tada se definiše propusna moć sistema kao verovatnoća da klijent može ući u sistem: $1 - p_{r+k}^*$.

Smatramo da posle dugog vremenskog perioda t dolazi do stabilizacije sistema i da sistem dobija raspodelu $X(\infty) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots \\ p_0^* & p_1^* & \cdots \end{pmatrix}$. Očekivani broj klijenata u sistemu, L, se računa posle dugog vremenskog perioda kao očekivanje slučajne promenljive $X(\infty)$:

$$L = E(X(\infty)) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^*.$$

Može se naći i očekivani broj klijenata u redu za čekanje kao:

$$L_q = \sum_{k=1}^{\infty} k p_{r+k}^*.$$

Ako se sa $\bar{\lambda}$ označi efektivna brzina ulazaka klijenata u sistem, onda je

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} k = \infty : & \lambda \\ k < \infty : & \sum_{k=0}^{\infty} k\lambda_k = (1 - p_{r+k}^*)\lambda \end{cases}$$

Littleove formule daju W, očekivano vreme koje klijent provede u sistemu; W_q, očekivano vreme koje klijent provede čekajući, koristeći $\bar{\lambda}$ i L:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}, \quad W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}}, \quad W = W_o + W_q,$$

gde je $W_o = \frac{1}{\mu}$ očekivano vreme opsluživanja.

Zadatak

Linearni Markovljev proces čistog rađanja sa natalitetom $\lambda = 2$ inicijalizovan je iz stanja jedne jedinke.
Izračunati verovatnoću da populacija bude veća od 3 posle jednog sata.
Kolika je očekivana veličina populacije posle jednog sata?

Rešenje

Koristimo formule za linearni proces čistog rađanja. Imamo $\lambda = 2, t = 1$. Uvodimo smenu

$$p = e^{-\lambda t} = e^{-2\cdot 1} = 0.135335, \quad q = 1 - p = 0.864665\,.$$

Tražena verovatnoća je

$$P(X(1) > 3) = 1 - P(X(1) \leq 3) = 1 - (p_0(1) + p_1(1) + p_2(1) + p_3(1)) = 1 - (0 + p + qp + q^2 p)$$
$$= 1 - p(1 + q + q^2) = 1 - 0.135335(1 + 0.864665 + 0.864665^2) = 0.6465$$

Očekivana veličina populacije je $e^{\lambda t} = e^2 = 7.3891$.

Zadatak

Rešiti prethodni zadatak ako je u pitanju Poasonov proces sa $\lambda = 2$.

Rešenje

Koristimo formule za pomereni Poasonov proces. Tražena verovatnoća je

$$P(X(1) > 3) = 1 - P(X(1) \leq 3) = 1 - (p_0(1) + p_1(1) + p_2(1) + p_3(1))$$
$$= 1 - (0 + e^{-\lambda t} + \lambda t e^{-\lambda t} + \frac{(\lambda t)^2}{2} e^{-\lambda t}) = 1 - e^{-\lambda t}(1 + \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2})$$
$$= 1 - 0.135335(1 + 2 + \frac{2^2}{2}) = 0.3233$$

Očekivana veličina populacije kroz 1 sat je

$$E(X(1)) = 1 + \lambda t = 1 + 2 \cdot 1 = 3$$

Zadatak

Student daje mali oglas na radiju da traži stan. Poznato je da se stanodavci javljaju po Poasonovoj raspodeli, prosečno 2 na dan.
Koliko dana (ceo broj) treba daje oglas da bi sa verovatnoćom od barem 98% dobio barem šest ponuda?

Rešenje

Ovo je u pitanju Poasonov proces čistog rađanja sa brzinom $\lambda = 2$.
Interesuje nas da bude

$$P(X(t) \geq 6) \geq 0.98 \quad \Leftrightarrow \quad P(X(t) < 6) \leq 0.02.$$

Odnosno,

$$P(X(t) < 6) = \sum_{k=0}^{5} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \leq 0.02$$

Poslednju nejednakost ćemo rešiti pogađanjem. Znamo da t mora biti ceo broj dana, odnosno, da je $\lambda t = 2t$ paran broj, pa ćemo probati izračunati traženu sumu za nekoliko vrednosti λt.

λt	6	8	10	12	14
$P(X(t) < 6)$	0.4457	0.1912	0.067086	0.0203	0.0055

Vidimo da je prva vrednost sume koja je manja od 0.02 za $\lambda t = 2t = 14$, odnosno, oglas treba davati $t = 7$ dana.
Napomena: često na kraju knjiga iz verovatnoće postoje tablice sa tabeliranim vrednostima kumulativnih verovatnoća Poasonove raspodele. Tada se tražena vrednost može očitati iz tablice.

Zadatak

Banka ima dva šaltera. Svaki šalter opslužuje klijente, nezavisno, sa vremenom opsluživanja koje ima eksponencijalu raspodelu, sa prosečnim trajanjen $1min$.
Korisnici pristižu u banku po Poasonovoj raspodeli (vreme između dva pristizanja ima nezavisnu eksponencijalnu raspodelu), prosečno 100 klijenata na sat.
Izračunati

a) verovatnoću da u banci ima više od tri klijenta.

b) verovatnoću da je prvi šalter slobodan.

c) prosečan broj klijenata u banci.

d) prosečan broj klijenata u redu za čekanje.

e) prosečan broj zauzetih šaltera.

f) prosečno vreme koje klijent provede u banci.

g) prosečno vreme koje klijent provede u redu.

Rešenje

Ovo je sistem masovnog opsluživanja M|M|2 sa $\lambda = 100h^{-1}$ i $\frac{1}{\mu} = 1min = \frac{1}{60}h$, odnosno, $\mu = 60h^{-1}$.
Sistem je ergodičan jer je $\lambda = 100 < 2\mu = 120$.
Sav račun obavljamo za stacionarno stanje. Izračunajmo ergodične verovatnoće.

$$s_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2^2\mu^3} + \frac{\lambda^4}{2^3\mu^4} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{\mu}\left[1 + \frac{\lambda}{2\mu} + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 1 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{2\mu}} = 11$$

Ergodične verovatnoće su:

$$p_0^* = \frac{1}{11}\,,\ p_1^* = \frac{\lambda}{\mu}p_0^* = \frac{5}{33}\,,\ p_2^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_1^* = \frac{25}{198}\,,\ p_3^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_2^* = \frac{125}{1188}\,,\ \dots$$

Odnosno, slučajna promenljiva $X(\infty)$ ima raspodelu $X(\infty):\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\ \frac{1}{11} & \frac{5}{33} & \frac{25}{198} & \frac{125}{1188} & \cdots \end{pmatrix}$

Opšta formula je

$$p_0^* = \frac{1}{11}\,,\ p_1^* = \frac{5}{33}\,,\ p_k^* = p_1^*\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k-1} = \frac{5}{33}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\,,\ k = 2,3,\dots$$

a) $p_4^* + p_5^* + \cdots = 1 - (p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^*) = 1 - \left(\frac{1}{11} + \frac{5}{33} + \frac{25}{198} + \frac{125}{1188}\right) = \frac{625}{1188} = 0.5261$

b) Prvi šalter je slobodan ako nikog nema u sistemu ili je samo jedan klijent na drugom šalteru:

$$p_0^* + \frac{1}{2}p_1^* = \frac{1}{11} + \frac{5}{66} = \frac{1}{6}$$

Rezultat možemo tumačiti da je na šest sati prvi šalter slobodan oko jedan sat.

c) $L = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k^* = \sum_{k=1}^{\infty} kp_1^*\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k-1} = \frac{p_1^*}{(1-\frac{\lambda}{2\mu})^2} = \frac{5/33}{(1-5/6)^2} = \frac{60}{11} = 5.4545$

d) $L_q = \sum_{k=1}^{\infty} kp_{k+2}^* = \sum_{k=1}^{\infty} kp_1^*\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^{k+1} = \frac{p_1^*\left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2}{(1-\frac{\lambda}{2\mu})^2} = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 L = \frac{125}{33} = 3.7879$

e) Prvi način: Posmatramo slučajnu promenljivu $S =$ broj klijenata na šalterima.

Njena raspodela je: $S:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p_0^* & p_1^* & p_2^* + p_3^* + \cdots \end{pmatrix}$.

Prosečan broj zauzetih šaltera je jednak očekivanju slučajne promenljive S.

$L_s = E(S) = 0\cdot p_0^* + 1\cdot p_1^* + 2\,(p_2^* + p_3^* + p_4^* + \cdots) = \frac{5}{33} + 2\left(1 - \frac{1}{11} - \frac{5}{33}\right) = \frac{5}{3} = 1.6667$

Drugi način: $L_s + L_q = L \Rightarrow L_s = L - Lq = \frac{60}{11} - \frac{125}{33} = \frac{5}{3} = 1.6667$

f) Maksimalna dužina reda je ∞, zato $\bar{\lambda} = \lambda$.

Little1: $W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{60}{11}}{100} = \frac{3}{55}h = 3min16.36sec$

g) Prvi način (Little2): $W_q = \frac{L_q}{\bar{\lambda}} = \frac{\frac{125}{33}}{100} = \frac{5}{132}h = 2min16.36sec$

Drugi način, koristeći očekivano vreme opsluživanja $W_o = 1min = \frac{1}{60}$

(Little3): $W_o + W_q = W \Rightarrow W_q = W - W_o = \frac{3}{55}h - \frac{1}{60}h = \frac{5}{132}h = 2min16.36sec$