Krive drugog reda

Nivo linije funkcija dve promenljive $F(x_1, x_2)$ su geometrijska mesta tačaka u ravni x_1Ox_2 kod kojih je $F(x_1, x_2) = const$. Ako su u pitanju linearne funkcije dve promenljive, dobijamo prave.

Ako posmatramo kvadratne funkcije, dobijaju se krive drugog reda. Može se pokazati da su tako dobijene krive konusni preseci koje je još Apolonije (*Apollonius*, 260-190. BC) otkrio i opisao u svom delu *Konusni preseci*.

To delo je otvorilo mogućnosti pionirima moderne nauke (Galilej, Kepler, Hajgens, Njutn) da istražuju zakone prirode.

Posmatraćemo ([1]) nivo linije kvadratnih funkcija dve promenljive x_1 i x_2 u ortogonalnom Dekartovom koordinatnom sistemu x_1Ox_2 date formulom:

$$Q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2b_1x_1 + 2b_2x_2 = c\,. \tag{1}$$

Bez gubitka opštosti pretpostavićemo da je $a_{11} \geq 0$.

Teorema 1 *Metrička klasifikacija nivo linija kvadratnih funkcija dve promenljive*

(a) Ako je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$, onda je kriva iz formule (1) ili izometrična krivoj $x_1^2/a_1^2 + x_2^2/a_2^2 = 1$ (elipsi) ili krivoj $x_1^2/a_1^2 - x_2^2/a_2^2 = 1$ (hiperboli) ili krivoj $x_1^2/a_1^2 = x_2^2/a_2^2$ (dve prave koje se seku u koordinatnom početku) ili je prazan skup.

(b) Ako je $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, pritom nisu svi brojevi a_{11}, a_{22}, a_{12} jednaki nuli, onda je kriva iz formule (1) ili izometrična krivoj $x_1^2 = 2px_2$ (paraboli) ili $x_1^2 = c^2$ (paru paralelnih pravih) ili $x_2^2 = 0$ (jednoj pravoj) ili je prazan skup.

Dokaz

Smenom promenljivih $x_1' = x_1 + a_1$ i $x_2' = x_2 + a_2$ transliramo koordinatni početak $(0, 0)$ u tačku (a_1, a_2). Jednačina (1) postaje

$$\begin{aligned} c &= Q(x_1, x_2) = \\ &= a_{11}(x_1' - a_1)^2 + 2a_{12}(x_1' - a_1)(x_2' - a_2) + a_{22}(x_2' - a_2)^2 + \\ &\quad +2b_1(x_1' - a_1) + 2b_1(x_2' - a_2) = \\ &= a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 + \\ &\quad +2(-a_{11}a_1 - a_{12}a_2 + b_1)x_1' + 2(-a_{12}a_1 - a_{22}a_2 + b_2)x_2' + \\ &\quad +Q(a_1, a_2) - 2(b_1a_1 + b_2a_2)\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Ako želimo anulirati sabirke koji su linearni po x_1' i x_2', odredićemo a_1 i a_2 iz sistema

$$b_1 = a_{11}a_1 + a_{12}a_2\,, \quad b_2 = a_{12}a_1 + a_{22}a_2\,. \tag{3}$$

To je moguće, jer po pretpostavci (a) determinanta sistema je različita od nule. Za tako određene a_1 i a_2, označavajući konstantu

$$c' = c - Q(a_1, a_2) + 2(b_1a_1 + b_2a_2)\,, \tag{4}$$

svodimo jednačinu (1) na

$$Q(x_1', x_2') = a_{11}x_1'^2 + 2a_{12}x_1'x_2' + a_{22}x_2'^2 = c' \; . \tag{5}$$

Ako je $a_{12} = 0$, dokaz je gotov, a ako nije, uvodimo nove promenljive x_1'' i x_2'' rotirajući koordinatni sistem za ugao φ:

$$x_1' \;=\; x_1''\cos\varphi + x_2''\sin\varphi \; , \; x_2' \;=\; -x_1''\sin\varphi + x_2''\cos\varphi \; . \tag{6}$$

Radi lakšeg obeležavanja vratićemo se na oznake $x_1 = x_1''$ i $x_2 = x_2''$. Dobijamo

$$\begin{aligned} c' \;&=\; Q(x_1', x_2') = Q(x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi, -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi) = \\ &=\; x_1^2(a_{11}\cos^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi) + \\ &\quad + 2x_1x_2(a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - a_{22}\cos\varphi\sin\varphi) + \\ &\quad + x_2^2(a_{11}\sin^2\varphi + 2a_{12}\sin\varphi\cos\varphi + a_{22}\cos^2\varphi) \; . \end{aligned} \tag{7}$$

Anuliranje sabirka uz x_1x_2 daje

$$0 = (a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi + 2a_{12}\cos 2\varphi \; , \tag{8}$$

odakle uzimamo φ takvo da je

$$\tan 2\varphi = \frac{-2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \; . \tag{9}$$

Sređujući izraz (7) dobija se jednačina

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} \pm \frac{x_2^2}{a_2^2} = \theta \; , \tag{10}$$

gde je $\theta = 0$ ili $\theta = 1$. Ovo kompletira dokaz za (a).

Neka važi pretpostavka (b).

Pretpostavimo $a_{12} \neq 0$. Onda su a_{11} i a_{22} pozitivni. Rotirajmo koordinatni sistem

$$x_1 \;=\; x_1'\cos\varphi - x_2'\sin\varphi \; , \; x_2 \;=\; x_1'\sin\varphi + x_2'\cos\varphi \; , \tag{11}$$

uzimajući φ tako da je $\tan\varphi = \sqrt{a_{11}/a_{22}}$. Time se poništava koeficijent uz x_1' u (2) i dobija se data jednačina parabole.

Ako je, pak, $a_{12} = 0$, onda mora biti $a_{11} = 0$ ili $a_{22} = 0$. U tom slučaju, jednačina (1) ima dati oblik (dve prave). Time je dokaz završen.

Napomena

Krive drugog reda elipsa, hiperbola i parabola su **nedeformisane**, a parovi pravih su **deformisane**.

Literatura

[1] Viktor Vasil'evich Prasolov, Vladimir Mikhailovich Tikhomirov, **Geometry**, Published by AMS Bookstore, 2001