

1 Neodređeni integral

Neka je funkcija $f(x)$ definisana na nekom intervalu $[a, b]$. Funkcija $F(x)$, koja je definisana na tom intervalu, naziva se **primitivnom funkcijom** funkcije $f(x)$ ako važi da je

$$F'(x) = f(x) \text{ za sve } x \in [a, b].$$

Ako je $F'(x) = f(x)$, onda je i $(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, za $c \in \mathbb{R}$. Skup svih primitivnih funkcija naziva se neodređeni integral i obeležava sa $\int f(x)dx$. Ako za funkciju $f(x)$ postoji neodređeni integral na nekom intervalu, kažemo da je ona na tom intervalu **integrabilna**.

Osobine neodređenog integrala

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $\int F'(x)dx = F(x) + c$,
3. $\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
4. $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$ - formula za uvođenje smene $x = \varphi(t)$,
5. $\int u dv = uv - \int v du$ - formula za parcijalnu integraciju.

Tablica integrala

- i) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1$
- ii) $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- iii) $\int \cos x dx = \sin x + c$
- iv) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$
 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- v) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$
 $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- vi) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$
 $a > 0, a \neq 1$
- vii) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$
 $a \neq 0$
- viii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c, x \in (-a, a)$
 $a \neq 0$
- ix) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + c$
 $x^2 + a > 0$
- x) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c, x \neq 0$
- xi) $\int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$ gde je
 $P_n(x)$ polinom stepena n , $Q_{n-1}(x)$ nepoznati polinom stepena $n-1$ i λ nepoznati koeficijent.

Opšta trigonometrijska smena

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

1.1 Primena tablice osnovnih integrala

1. Naći neodređeni integral

$$\begin{aligned}
 a) \int \sqrt{x} \sqrt{x} dx & \quad b) \int \left(x + 2 - \frac{3}{4+x^2} - \frac{3}{2x} \right) dx = x + 2 - \frac{3}{2} \ln |x + \sqrt{x^2+4}| - \frac{3}{2} \ln |x| + C \\
 c) \int (2+x^2)^3 dx & \quad d) \int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x^2-3}} + 3 \sin x - e^x + 4 \right) dx = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-3}} + 3 \cdot \sin x + 4x + C \\
 e) \int (x + \sqrt{x})^3 dx & \quad f) \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-5}} + \frac{\pi}{\cos^2 x} + \sqrt[3]{x} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-5}{x+5} \right| + \pi \tan x + \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C
 \end{aligned}$$

Rešenje

Koristimo osnovne osobine integrala i tablicu integrala.

$$\begin{aligned}
 a) \int \sqrt{x} \sqrt{x} dx &= \int (x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \\
 b) \int \left(x + 2 - \frac{3}{4+x^2} - \frac{3}{2x} \right) dx &= \int x dx + 2 \int dx - 3 \int \frac{dx}{4+x^2} - \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} \\
 &= \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \cdot \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \ln |x| + C \\
 c) \int (2+x^2)^3 dx &= \int (8 + 12x^2 + 6x^4 + x^6) dx = 8x + 4x^3 + \frac{6}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + C
 \end{aligned}$$

1.2 Smena promenljivih

2. Naći neodređeni integral

$$\begin{aligned}
 a) \int (2-3x)^9 dx & \quad b) \int \cos^2 x dx \\
 c) \int \frac{xdx}{(x^2-2)^5} & \quad d) \int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x} \\
 e) \int \frac{(2x+3)dx}{x^2+3x-10} & \quad f) \int \frac{dx}{2x^2+3} \\
 g) \int x \sqrt{x-2} dx & \quad h) \int (2+x^2)^3 dx
 \end{aligned}$$

Rešenje

Ovi zadaci se rešavaju uvođenjem pogodne smene.

$$\begin{aligned}
 b) \downarrow \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
 1 &= \cos^2 x + \sin^2 x \\
 \sum: 1 + \cos(2x) &= 2 \cdot \cos^2 x \\
 \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \\
 \int \cos^2 x dx &= \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + C \\
 c) \downarrow \frac{xdx}{(x^2-2)^5} & \quad \text{Smena: } u = x^2 - 2, \quad du = 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{8} \frac{1}{(x^2-2)^4} + C
 \end{aligned}$$

a) Smena je $2 - 3x = t$. Kada diferenciramo levu i desnu stranu dobijamo

$$d(2 - 3x) = d(t) \Rightarrow (2 - 3x)'_x dx = (t)'_t dt \Rightarrow -3dx = dt \Rightarrow dx = -\frac{1}{3}dt.$$

Uvedimo smenu u dati integral, iskoristimo tablični integral i), i vratimo smenu

$$\int (2 - 3x)^9 dx = \int t^9 \left(-\frac{1}{3}\right) dt = -\frac{1}{3} \cdot \frac{t^{10}}{10} + c = -\frac{1}{30}(2 - 3x)^{10} + c.$$

b) Prvo ćemo transformisati podintegralnu funkciju, a zatim ćemo uvesti smenu $2x = t$, što daje $dx = \frac{1}{2}dt$

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \int \cos t \cdot \frac{1}{2} dt = \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin t + c = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin(2x) + c \end{aligned}$$

c) Smenom treba da se eliminišu sva pojavljivanja smenjivane promenljive. U ovom primeru to je jednostavno, jer ako uvedemo smenu $x^2 - 2 = t$, diferenciranjem dobijamo $2x dx = dt$, odnosno $dx = \frac{dt}{2x}$.

$$\int \frac{x dx}{(x^2 - 2)^5} = \int \frac{x \frac{dt}{2x}}{t^5} = \frac{1}{2} \int t^{-5} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{8(x^2 - 2)^4} + c$$

Isto se može dobiti ako prvo transformišemo izraz pa uočimo koji deo će da se smeni sa dt

$$\int \frac{x dx}{(x^2 - 2)^5} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 - 2)^5} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^5}$$

d) Uvedimo smenu $\ln x = t$, odakle je $\frac{1}{x} dx = dt$

$$\int \frac{\frac{1}{x} dx}{\ln x \ln \ln x} = \int \frac{dt}{t \ln t}.$$

Nekada jedna smena nije dovoljna da dovede do tabličnog integrala. U dobijeni integral ponovo uvedimo smenu $\ln t = u$, $\frac{dt}{t} = du$

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |\ln t| + c = \ln |\ln \ln x| + c$$

Naravno, uz ograničenja $x > 0$, $\ln x > 0 \Rightarrow x > 1$ i $\ln \ln x \neq 0 \Rightarrow x \neq e$. Dve uzastopne smene se mogu spojiti u jednu: $\ln \ln x = u$.

1.3 Parcijalna integracija

3. Naći neodređeni integral

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$$

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv$$

$$\int f(x) \cdot g(x) dx = ?$$

a) $\int \ln x dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + c$ e) $\int e^{3x} \sin(2x) dx$

b) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$

f) $\int \sin \ln x dx$

c) $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$

g) $\int e^{2x} \sin x dx$

d) $\int (x^2 + 2x) \sin x dx$

h) $\int (2x + 3) \cos(2x) dx$

Rešenje

Ovi zadaci se rešavaju parcijalnom integracijom. Koristi se formula 5.

a) U formuli 5. uzimamo $u = \ln x$ i $dv = dx$. Prvi izraz diferenciramo: $du = \frac{1}{x} dx$, a drugi integralimo: $\int dv = \int dx$ daje $v = x + c$. Uzimamo $v = x$.

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c$$

b) Uzimamo $u = x$, $du = dx$ i

$$dv = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow v = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$$

Kada iskoristimo formulu 5. dobijamo

$$\int \frac{x dx}{\cos^2 x} = x \tan x - \int \tan x dx = x \tan x + \int \frac{\sin x}{\cos x} dx =$$

(smena $\cos x = t$ daje $-\sin x dx = dt$)

$$= x \tan x + \int \frac{dt}{t} = x \tan x + \ln |\cos x| + c, \text{ za } x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

c) $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{x^3}$ daje

$$du = \frac{dx}{x} \text{ i } v = \int x^{-3} dx = -\frac{1}{2} x^{-2}.$$

Primenom formule 5. dobija se

$$\int \frac{\ln x}{x^3} dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int x^{-2} \frac{dx}{x} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c$$

d) $u = x^2 + 2x$, $dv = \sin x dx$ daje

$$du = (2x + 2) dx \text{ i } v = \int \sin x dx = -\cos x.$$

$$I = \int (x^2 + 2x) \sin x dx = -(x^2 + 2x) \cos x + \int (2x + 2) \cos x dx$$

Ponovnom parcijalnom integracijom sa $u = 2x + 2$, $dv = \cos x dx$,

$$du = 2dx \text{ i } v = \int \cos x dx = \sin x, \text{ dobijamo}$$

$$\begin{aligned} I &= -(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 2) \sin x - 2 \int \sin x = \\ &= -(x^2 + 2x) \cos x + (2x + 2) \sin x + 2 \cos x + c. \end{aligned}$$

e) $u = e^{3x}$, $dv = \sin(2x) dx$ daje

$$du = 3e^{3x} dx \text{ i } v = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x).$$

$$I = \int e^{3x} \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{2} \int e^{3x} \cos(2x) dx.$$

Ponovnom parcijalnom integracijom sa $u = e^{3x}$, $dv = \cos(2x) dx$,

$$du = 3e^{3x} dx \text{ i } v = \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x), \text{ dobijamo da je}$$

$$I = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{3x} \sin(2x) - \frac{3}{2} \int e^{3x} \sin(2x) dx \right) + c_1$$

$$I = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{3x} \sin(2x) - \frac{9}{4} I + c_1, \text{ odakle je}$$

$$\frac{13}{4} I = -\frac{1}{2} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{4} e^{3x} \sin(2x) + c_1.$$

Konačno dobijamo

$$I = -\frac{2}{13} e^{3x} \cos(2x) + \frac{3}{13} e^{3x} \sin(2x) + c.$$