Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno–matematički fakultet
Departman za matematiku i informatiku

Zoran Ovcin

Kvazi Njutnovi postupci za probleme stohastičkog programiranja

Novi Sad, 2016. godina

Problem matematičkog programiranja

Naći $x^* \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ za koje važi

$$f(x^*) = \min_{x \in X} f(x), \text{ gde } f : X \to \mathbb{R}\,.$$

Postupci rešavanja za probleme bez ograničenja ($X = \mathbb{R}^n$)

- ~~Egzaktni~~
- Iterativni (dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $x_{k+1} = x_k + a_k p_k$, $a_k \in \mathbb{R}$)

  Oblast poverenja

  Linijsko pretraživanje

Izbor pravca

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + a_k\, p_k} \qquad (f_k := f(x_k)\,,\ \nabla f_k := \nabla f(x_k)\,,\ \nabla^2 f_k := \nabla^2 f(x_k))$$

$$\text{(Tejlor)}\ \ f(x+p) = f(x) + \nabla f(x)^T p \, + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x+tp)p$$

- Pravac najbržeg opadanja

$$f_{k+1} - f_k \approx \nabla f_k^T p_k = \|p_k\|\, \|\nabla f_k\| \cos\phi, \cos\phi = -1 \ \rightsquigarrow \ \boxed{p_k := -\nabla f_k}$$

- Njutnov pravac

$$f(x_k + p) \approx f_k + \nabla f_k^T p \, + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f_k\, p \ \to \min \ \rightsquigarrow \ \boxed{p_k := -(\nabla^2 f_k)^{-1} \nabla f_k}$$

- Kvazi Njutnovi pravci $B_k \approx \nabla^2 f_k \rightsquigarrow \boxed{p_k = -B_k^{-1} \nabla f_k}$

$$\boxed{B_{k+1} s_k = y_k, \text{ gde je } s_k = x_{k+1} - x_k \,,\; y_k = \nabla f_{k+1} - \nabla f_k}$$

SR1

$$B_{k+1} = B_k + \frac{(y_k - B_k s_k)(y_k - B_k s_k)^T}{(y_k - B_k s_k)^T s_k}$$

BFGS

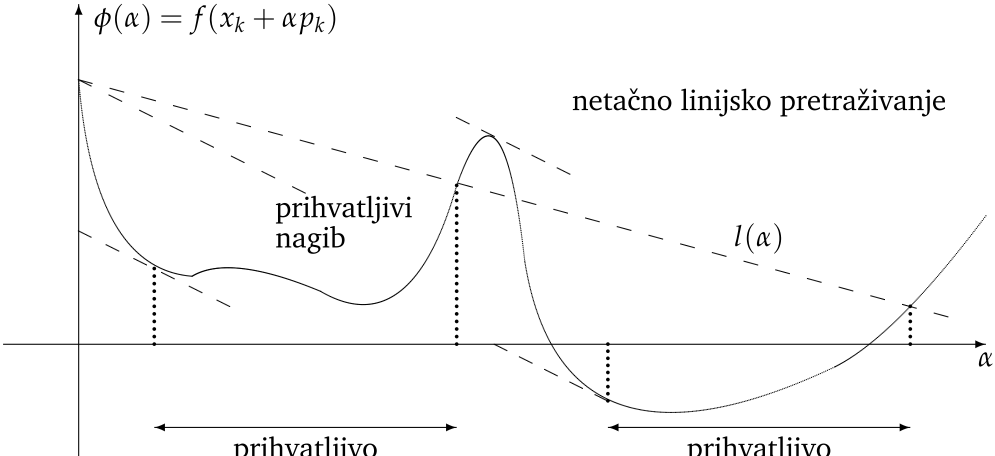
$$B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k^T}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$$

BFGS sa $\boxed{H_k = B_k^{-1}}$

$$H_{k+1} = (I - \rho_k s_k y_k^T) H_k (I - \rho_k y_k s_k^T) + \rho_k s_k s_k^T \,, \text{ gde je } \rho_k = \frac{1}{y_k^T s_k}$$

Linijsko pretraživanje

$$x_{k+1} = x_k + a_k\, p_k, \qquad a_k := \arg\min_{\alpha} f(x_k + \alpha p_k)$$



Wolfe uslovi

$$f(x_k + \alpha p_k) \leq f(x_k) + c_1 \alpha \nabla f_k^T p_k = l(\alpha)\,, \text{ za neko } c_1 \in (0,1)\,.$$

$$\nabla f(x_k + \alpha p_k)^T p_k \geq c_2 \alpha \nabla f_k^T p_k\,, \text{ za neko } c_2 \in (c_1,1)\,.$$

Teorema (Zoutendijk, [9]). *Neka je iterativni niz $\{x_k\}$ definisan iteracijom $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ sa opadajućim pravcima p_k i neka α_k zadovoljava Wolfe uslove.*

Neka je f ograničena odole na $\mathbb{R}^n$ i neprekidno diferencijabilna na otvorenom skupu $\mathcal{N}$ koji sadrži skup $\mathcal{L} = \{x : f(x) \leq f(x_0)\}$, gde je x_0 data početna iteracija.

Neka je, dalje, gradijent ∇f Lipšic neprekidan nad $\mathcal{N}$, odnosno:

$$\forall x, \tilde{x} \in \mathcal{N},\ \|\nabla f(x) - \nabla f(\tilde{x})\| \leq L\|x - \tilde{x}\|\,,\ \textit{za neko}\ \ L > 0.$$

Onda

$$\sum_{k\geq 0} \cos^2\theta_k \,\|\nabla f(x_k)\|^2 < \infty\,,\ \textit{gde je}\ \ \theta_k = \measuredangle(p_k, -\nabla f_k)\,,\ \cos\theta_k = \frac{-\nabla f_k^T p_k}{\|\nabla f_k\|\,\|p_k\|}\,.$$

Posledica

$$\lim_{k\to\infty} \cos^2\theta_k \,\|\nabla f_k\|^2 = 0\,. \quad \text{Ako}\ \ \cos\theta_k \geq \delta\,,\ \text{za neko}\ \ \delta > 0 \ \Rightarrow\ \lim_{k\to\infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0\,.$$

Algoritmi linijskog pretraživanja

Algoritam 1 Backtracking Line Search

Input: $\bar{\alpha} > 0, 0 < \rho_{lo} < \rho_{hi} < 1, c \in (0, \frac{1}{2})$
Output: α koje zadovoljava Wolfe uslove

$\alpha := \bar{\alpha};$
while $f(x_k + \alpha p_k) > f(x_k) + c\alpha \nabla f_k^T p_k$ **do**
  choose $\rho \in [\rho_{lo}, \rho_{hi}];$
  $\alpha := \rho\alpha;$
end while
return

Algoritam 2 Line Search sa kubnom interpolacijom (nije naveden)

Input: $x_0 \in \mathbb{R}^n,\ f_0 \in \mathbb{R}(= \hat{f}(x_0)),\ f(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g_0 \in \mathbb{R}^n(= \hat{g}(x_0)),\ p \in \mathbb{R}^n,\ \lambda_{\min} \in \mathbb{R}^+,$ $maxfcalcls \in \mathbb{Z}^+$
Output: x_1, f_1, $retcode \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $fcalcls \in \mathbb{Z}^+$

Metode stohastičke optimizacije

Slučajni šum $\xi(x)$ je slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$F(x) = f(x) + \xi(x)\ ,\ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

Slučajni šum $\epsilon(x)$ je slučajni vektor nad prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

$$G(x) = g(x) + \epsilon(x)\ ,\ g(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Posmatraćemo probleme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\ ,$$

$$g(x) = 0\ ,$$

najčešće za $g = \nabla f$.

Stohastička aproksimacija (SA)

Dato x_0 i niz $\{a_k\}, k = 0, 1, \ldots$ tipa $\frac{1}{k}$, odnosno, koji zadovoljava

$$\boxed{a_k > 0,\ k = 0, 1, \ldots,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty,\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 < \infty.}$$

Definišemo

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - a_k G_k\ ,\ k = 0, 1, 2, \ldots,}\ G_k = G(x_k) = g(x_k) + \epsilon_k(x_k),$$

koji konvergira ka x^*, rešenju $g(x) = 0$.

Praktičan izbor (Spall [11]) $\boxed{a_k = \frac{a}{(k+1+A)^{\alpha}}\ ,\ \ a > 0,\ \ \alpha \in (0.5, 1],\ \ A \geq 0.}$

FDSA

$$\hat{G}_k^i = \frac{F(x_k + c_k e_i) - F(x_k)}{c_k},\ i = 1, 2, \ldots, n\ ,\ c_k = \frac{c}{(k+1)^{\gamma}}\ ,\ c > 0\ ,\ \gamma > 0\ .$$

SPSA

$$\hat{G}_k = \frac{F(x_k + c_k\Delta_k) - F(x_k - c_k\Delta_k)}{2c_k}[\Delta_{k,1}^{-1}, \Delta_{k,2}^{-1}, \ldots, \Delta_{k,n}^{-1}]^T ,$$

gde su $\Delta_{k,i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ nezavisne slučajne promenljive sa istom, dozvoljenom raspodelom.

Na primer $\Delta : \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

$$\frac{\text{broj računanja funkcije } F \text{ FDSA postupkom}}{\text{broj računanja funkcije } F \text{ SPSA postupkom}} \to \frac{1}{n}.$$

SPALL, J. *Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2005

Kvazi Njutnove metode u stohastičkoj optimizaciji

ASP

$$x_{k+1} = x_k - a_k \bar{\bar{H}}_k^{-1} G_k \, , \;\; \bar{\bar{H}}_k = \psi_k(\bar{H}_k)$$

$$\bar{H}_k = \frac{k}{k+1} \bar{H}_{k-1} + \frac{1}{k+1} \hat{H}_k \, , \;\; k = 0, 1, \ldots$$

2SG

$$\hat{H}_k = \frac{1}{2} \left[\frac{\delta G_k^T}{2 c_k \Delta_k} + \left(\frac{\delta G_k^T}{2 c_k \Delta_k} \right)^T \right] \, ,$$

gde je

$$\delta G_k = G_k(x_k + c_k \Delta_k) - G_k(x_k - c_k \Delta_k) \, ,$$

DSLS Descent Stochastic Line Search

KREJIĆ, N., LUŽANIN, Z., AND STOJKOVSKA, I. A gradient method for unconstrained optimization in noisy environment. *Appl. Numer. Math. 70* (Aug. 2013), 1–21

KREJIĆ, N., LUŽANIN, Z., OVCIN, Z., AND STOJKOVSKA, I. Descent direction method with line search for unconstrained optimization in noisy environment. *Optimization Methods and Software 30*, 6 (2015), 1164–1184

Linijsko pretraživanje

- veći koraci koji brže vode ka rešenju
- nije potrebno podešavanje parametara

SA koraci

- dokazana konvergencija
- bez računanja funkcije cilja

DSLS

- x_k daleko od rešenja koriste se LS koraci
- u blizini rešenja koriste se SA koraci

Dokazana konvergencija sa SA koracima i opadajućim pravcima.

Dokazana dobra definisanost DSLS.

Algoritam 3 DSLS

Ulaz: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $c_1 \in (0,1)$, $C, \underline{\delta}(C) > 0$ i $\{a_k\} \in \mathbb{R}$ tipa $\frac{1}{k}$.
Postavi $k = 0$, $phase = 1$.

Korak 1 Odaberi opadajući pravac ($G_k^T d_k < 0$).

Korak 2 Odaberi korak a_k.

Korak 3 Odredi novu iteraciju $x_{k+1} = x_k + a_k d_k$.

Korak 4 Postavi $k = k + 1$ pređi na korak 1.

Algoritam 4 Korak 2 Odaberi korak a_k.

Korak 2.1 Ako $phase = 1$ pređi na korak 2.2, inače pređi na korak 2.3

Korak 2.2 Ako $\|G_k\| \geq C$ odaberi $a_k > \underline{\delta}(C)$ tako da zadovoljava prvi Wolfe uslov, pređi na korak 3. Inače postavi $phase = 2$ i pređi na korak 2.3.

Korak 2.3 Odaberi a_k iz predefinisanog ulaza a_k.

Dokazana skoro sigurna konvergencija DSLS.

Konvergencija po opadajućim pravcima sa SA koracima

Zadato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, formiramo iterativni niz $x_{k+1} = x_k + a_k d_k$, $k = 0, 1, \ldots$

C1 Niz dužina koraka $\{a_k\}$ je tipa $\frac{1}{k}$

C2 Niz šumova sa generisanim sigma algebrama $(\epsilon_k, \mathcal{F}_k)$ je niz martingal razlika za neopadajući niz sigma algebri $\mathcal{F}_k$ takav da važi $E(\epsilon_k | \mathcal{F}_{k-1}) = 0$, $E(\|\epsilon_k\|^2) < \infty$.

C3 Funkcija g i uslovni drugi momenat realizovanog šuma su ograničeni: $\|g(x)\|^2 + E(\|\epsilon_k\|^2 | \mathcal{F}_{k-1}) < c(1 + v(x))$, $k = 0, 1, \ldots$, za neko $c > 0$.

C4 Za sve pravce d_k, $k = 0, 1, \ldots$ važi $(x_k - x^*)^T E[d_k | \mathcal{F}_k] \leq -c_2 \|x_k - x^*\|$ skoro sigurno, za neko $c_2 > 0$.

C5 Postoji $c_3 > 0$ tako da za sve $k = 0, 1, \ldots$ važi $\|d_k\| \leq c_3 \|G_k\|$ skoro sigurno.

Teorema. *Ako su zadovoljeni uslovi C1 - C5, onda niz x_k konvergira ka x^*, rešenju problema minimizacije.*

Dobra definisanost DSLS algoritma

C6 Gradijent $g(x) = \nabla f(x)$ je Lipšic neprekidan, to jest, postoji $L > 0$ tako da

$$\|g(x) - g(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{za sve} \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

C7 Realizacije šuma su ograničene i postoji $M > 0$ takvo da

$$\|\xi_k(x)\| \leq M, \ \|\varepsilon_k(x)\| \leq M \text{ skoro sigurno}$$

za sve $k = 0, 1, \ldots$ i $x \in D$.

C8 Postoji $\delta > 0$ takvo da za sve $k = 0, 1, \ldots$ $G_k^T d_k \leq -\delta \|G_k\| \|d_k\|$ skoro sigurno.

C9 Postoji $\underline{\Delta} \in (0, \Delta)$ takvo da za sve $k = 0, 1, \ldots$ važi $\|d_k\| \geq \underline{\Delta}$ skoro sigurno.

Teorema. *Neka važe pretpostavke C5 - C8 i neka* $C \geq \frac{M + 2\sqrt{2ML} + 1}{\delta(1 - c_1)}$. *Onda skoro sigurno postoji* $\underline{\delta}(C) > 0$ *kojim je algoritam DSLS dobro definisan.*

Skoro sigurna konvergencija

Teorema. *Neka važe pretpostavke C6 - C9. Neka je*

$$C \geq \max\{\frac{2M+1}{\underline{\alpha} c_1 \delta \underline{\Delta}}, \frac{M + 2\sqrt{2ML} + 1}{\delta(1-c_1)}\},$$

$$\underline{\alpha} = \frac{\delta(1-c_1)(2\sqrt{2ML}+1)}{2Lc_3(M + 2\sqrt{2ML}+1)}.$$

Neka je $\{x_k\}$ *niz generisan Algoritmom DSLS. Neka je* $\{x_j\}, j \in J$ *podniz za koji važi*

$$\|G_j\| \geq C.$$

Onda je $\{x_j\}$ *skoro sigurno konačan.*

Posledica

Ako važe pretpostavke C1 - C9, i uslov prethodne teoreme, onda iterativni niz generisan Algoritmom DSLS konvergira skoro sigurno ka rešenju problema minimizacije.

Fiksni Njutnov metod za model ekvilibriuma

Problem: $F(x,W) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, za vektor parametara W, $F(\cdot,W) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Algoritam 5 FNM

Korak 0 Neka je dato $x^0 \in \mathbb{R}^n$ i $(w^1,\ldots,w^N)$. Izračunati srednju vrednost $\bar{w} = \sum_{i=1}^{N} w^i / N$ i rešiti $F(x,\bar{w}) = 0$ Njutnovom metodom. Označimo rešenje $x^{\bar{w}}$ i definišimo $A = F'(x^{\bar{w}},\bar{w})$.

Korak 1 Za $i = 1,\ldots,N$

Korak 1i Postavi $x^{i,0} = x^{\bar{w}}$

Korak 2i Ponavljaj do konvergencije

$$As^{i,k} = -F(x^{i,k},w^i),\ x^{i,k+1} = x^{i,k} + s^{i,k},\ k = k+1$$

Korak 3i Postavi $x^{i*} = x^{i,k}$

Krejić, N., Lužanin, Z., and Ovcin, Z. Stochastic Newton-like methods for computing equilibria in general equilibrium models. *Computational & Applied Mathematics 30* (00 2011), 127 – 149

Dokazana konvergencija FNM.

Teorema o konvergenciji

D1 Za sve $w \in \bar{\Omega}$ postoji $x^{w*} \in D$ za koje je $F(x^{w*}, w) = 0$.

D2 Za sve $w \in \bar{\Omega}$ matrica Jakobijana $F'(x^{w*}, w)$ je nesingularna.

D3 Za sve $x, y \in D$ i $w \in \bar{\Omega}$ postoji $\gamma > 0$ za koje je $\|F'(x,w) - F'(y,w)\| \leq \gamma \|x - y\|$.

D4 Za sve $w_1, w_2 \in \bar{\Omega}$ i $x \in D$ postoji $\gamma_W > 0$ za koje $\|F'(x,w_i) - F'(x,w_j)\| \leq \gamma_W \|w_i - w_j\|$.

Teorema. *Neka F zadovoljava pretpostavke D1 - D4 i za $\epsilon_W = \mathrm{diam}(\bar{\Omega})$ i $M = \|F'(x^{\bar{w}}, \bar{w})^{-1}\|$ postoji $\delta > 0$ takvo da je $\alpha = M(\gamma\delta + \gamma_W \epsilon_W) < 1$ i da je*

$$\|F'(x^{\bar{w}}, \bar{w})^{-1} F(x^{\bar{w}}, w^i)\| \leq \delta(1 - \alpha),$$

onda za sve $w^i \in \bar{\Omega}$ niz $\{x^{w^i,k}\}_{k=0}^{\infty}, i = 1, 2, \ldots, N$ definisan u Koraku 1 Algoritma FNM konvergira linearno ka rešenju $F(x, w^i) = 0$.

Modeli ekvilibriuma

Maksimizuje se funkcija korisnosti

$$x^j(\pi) = \arg \max_{\pi x \leq \pi \omega^j} u^j(x)\,, \;\; j = 1,2,\ldots,m.$$

Posmatramo tri slučaja funkcije korisnosti za koje su maksimumi

- Cobb-Douglas: $x_i^j(\pi) = \dfrac{\pi \cdot \omega^j}{\pi_i} a_i^j$, $i = 1,2,\ldots,n$
- fiksne proporcije: $x_i^j(\pi) = \dfrac{\pi \cdot \omega^j}{\pi \cdot a^j} a_i^j$, $i = 1,2,\ldots,n$
- CES: $x_i^j(\pi) = \dfrac{\pi \cdot \omega^j}{\pi_i^{b^j} \sum\limits_{k=1}^{n} \pi_k^{1-b^j} a_k^j} a_i^j$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Funkcija viškova je $\xi(\pi) = \sum_{j=1}^m x^j(\pi) - \sum_{j=1}^m \omega^j$, za početno zaduženje ω^j, $j = 1,2,\ldots,m$.
Ekvilibrium je pozitivno π^* za koje je $\xi(\pi^*) = 0$.

- Model prostornog ekvilibriuma.

Numerički rezultati

Implementacija DSLS

$$F_k = F(x_k) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} F(x_k, \xi_{k^i}),\ G_k = \nabla F(x_k) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} G(x_k, \varepsilon_{k^i})$$

Linesearch vraća *retcode*:

$$\begin{aligned} 0 &= \text{ nađena zadovoljavajuća dužina } \alpha \\ 1 &= \text{ korak kraći od } \alpha_{\min} \\ 2 &= \text{ potrošena kvota } maxfcalc \\ 3 &= \text{ greška zaokruživanja ili šum} \end{aligned}$$

U formulama za ažuriranje pravca SR1 i BFGS

$$\delta_k = x_{k+1} - x_k,\ \Delta_k = G_{k+1} - G_k.$$

U stohastičkom okruženju: $\Delta_k = G(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) - G(x_k, \varepsilon_k)$

Pošto raspolažemo šumom, uzimamo: $\Delta_k = G(x_{k+1}, \varepsilon_k) - G(x_k, \varepsilon_k)$.

Algoritam 6 DSLS

Input: $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $itnlimit \in \mathbb{Z}$, $maxfcalcls \in \mathbb{Z}$, $gradtol \in \mathbb{R}$

Output: $y \in \mathbb{R}^n$, $G_y \in \mathbb{R}^n$, $termcode \in \mathbb{Z}$

…

for $itncount := 1$ **to** $itnlimit$ **do**

  $d := -B^{-1}G_x$;

  if $\neg near$ **then**

    $[y, F_y, retcode, \lambda, fcalcls] :=$ Line Search $(x, F_x, F(\cdot), G_x, -G_x, maxfcalcls)$;

    if retcode $= 2$ **then** ▷ $fcalcls \geq maxfcalcls$

      $near := true$; $\lambda := \dfrac{a}{(itncount + 1 + A)^{\alpha}}$;

    else

      if $(retcode = 1) \| (retcode = 3)$ **then** $\lambda := \lambda_{\mathrm{minfix}}$; **end if**

    end if

  else

    $\lambda := \dfrac{a}{(itncount + 1 + A)^{\alpha}}$;

  end if

end for

…

Testiranje DSLS

Testirano na 44 test problema.

MORÉ, J., GARBOW, B., AND HILLSTROM, K. Testing unconstrained optimization software. *ACM Trans. Math. Softw. 7*, 1 (Mar. 1981), 17–41

BURKHARDT, J. Test_opt, 2011. http://people.sc.fsu.edu/ jburkardt/m_src /test_opt/test_opt.h

Opšti iterativni postupak $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$,

$$d_k = -B_k^{-1} G_k.$$

Za potupak najbržeg opadanja G koristimo $B_k = I$, testiramo i SR1 pravce i BFGS pravce.

Testiramo DSLS algoritam (kraće LS) i SA algoritam koji koristi predefinisane pravce

$$a_k = \frac{a}{(k+1+A)^{\alpha}}\,,\ \ k = 0,1,\ldots$$

sa $a = 1$, $A = 0$, $\alpha = 0.602$, k redni broj iteracije.

Kada to iskombinujemo, imamo 6 različitih algoritama. Označavaćemo ih:

SA-G	SA-BFGS	SA-SR1
LS-G	LS-BFGS	LS-SR1

Tri veličine šuma: $\sigma = 1, \sigma = 0.2$ i $\sigma = 0.04$.

$N = 50$ nezavisnih iterativnih postupaka sa istom početnom tačkom

$itnlimit = \infty$, $maxfcalc = 200n$, gde je n dimenzija problema.

Računanje gradijenta se broji kao n računanja funkcije cilja.

$maxfcalcls = 4$, $p = 3$

Izlazni kriterijum je $gradtol = \min\{\sqrt{n}\sigma, 1\}$ ili $maxfcalc \geq 200n$.

$\|G_{end}\| \leq gradtol \rightsquigarrow$ postupak uspešan. Broj uspešnih $= Nconv$.

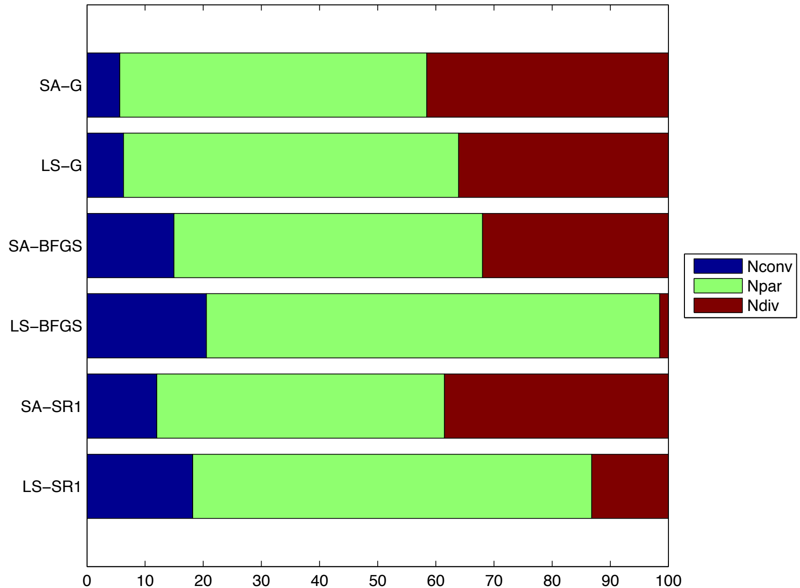
$\|G_{end}\| > 200\sqrt{n} \rightsquigarrow$ postupak divergirao. Broj koji su divergirali $= Ndiv$.

$fcalc \geq maxfcalc \rightsquigarrow$ postupak delimično uspešan. Broj delimično uspešnih $= Npar$.

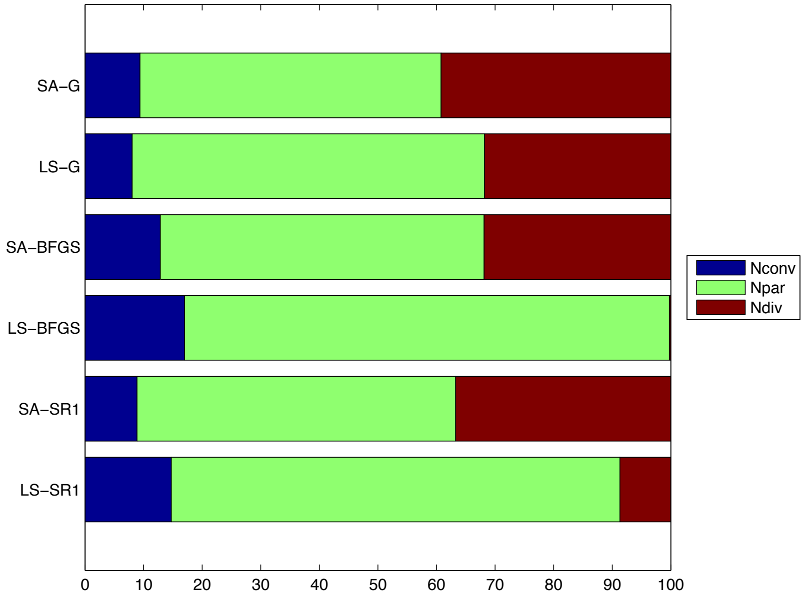
DOLAN, E. D., AND MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical programming 91*, 2 (2002), 201–213

$$fc_{ij} = \frac{1}{|Ncon_{ij} U Npar_{ij}|} \sum_{r \in Ncon_{ij} U Npar_{ij}} \frac{fcalc_{ij}^{r}}{n_j},$$

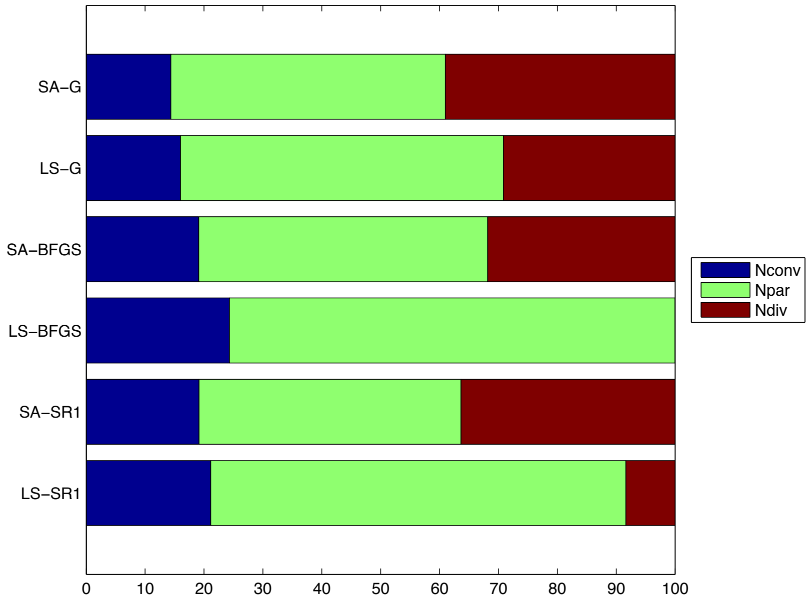
Procenti broja uspešnih, delimično uspešnih i divergentnih



$$\sigma = 1$$

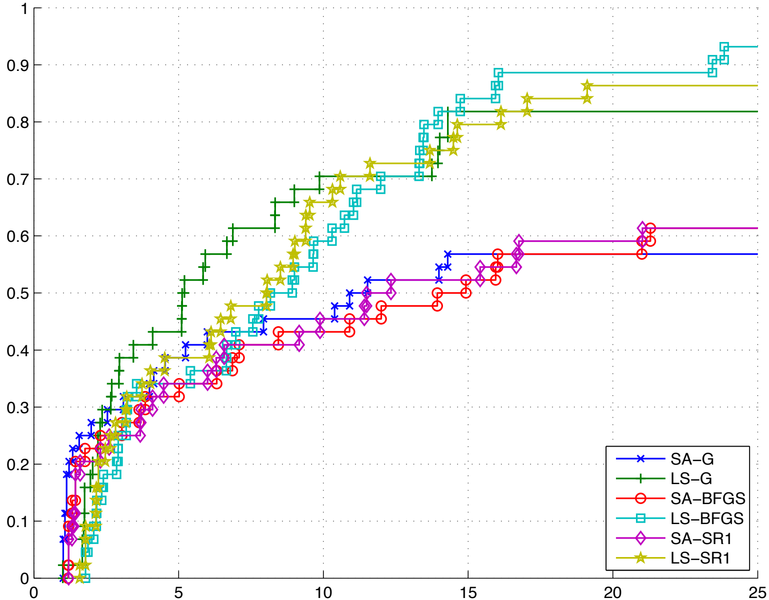

SA−G
LS−G
SA−BFGS
LS−BFGS
SA−SR1
LS−SR1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Nconv
Npar
Ndiv

$\sigma = 0.2$

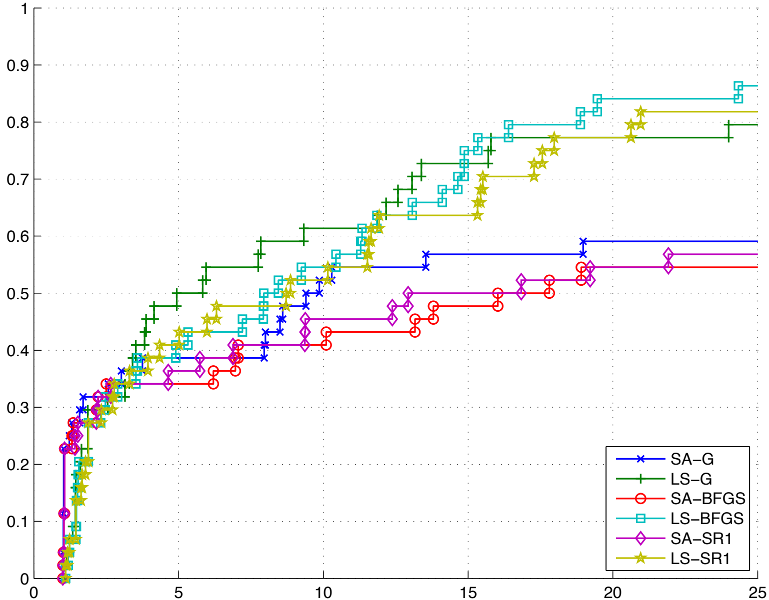

SA−G
LS−G
SA−BFGS
LS−BFGS
SA−SR1
LS−SR1
Nconv
Npar
Ndiv
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100

$\sigma = 0.04$

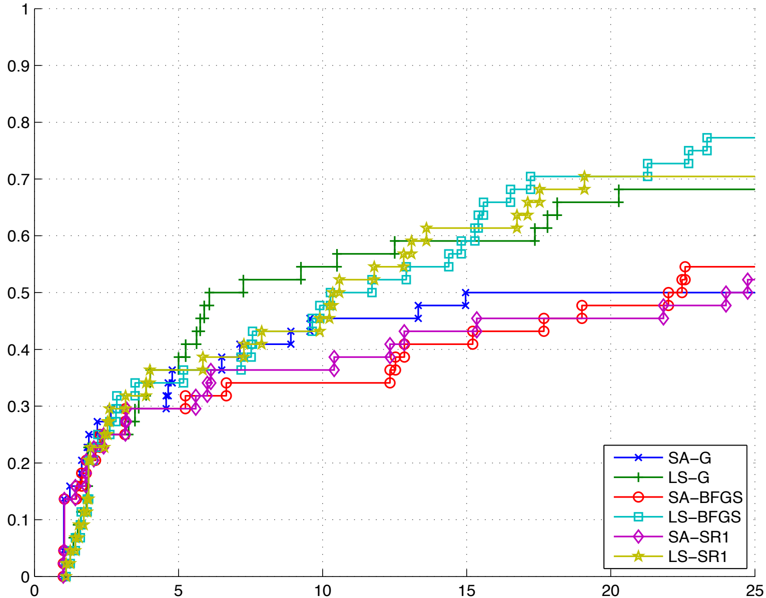
Performance profiles



$\sigma = 1$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
SA–G
LS–G
SA–BFGS
LS–BFGS
SA–SR1
LS–SR1

$\sigma = 0.2$



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
20
25
SA−G
LS−G
SA−BFGS
LS−BFGS
SA−SR1
LS−SR1

$\sigma = 0.04$

Testiranje FNM

Cobb-Douglas

$$u^1(\pi) = \pi_1^{a_1^1}\,\pi_2^{1-a_1^1}.$$

$$u^2(\pi) = \min\left\{\frac{\pi_1}{a_1^2}, \frac{\pi_2}{a_2^2}\right\}.$$

$$\xi_1(\pi) = a_1^1\frac{3\pi_1+\pi_2}{\pi_1} + a_1^2\frac{\pi_1+2\pi_2}{a_1^2\pi_1+a_2^2\pi_2} - 4$$

$$\xi_2(\pi) = (1-a_1^1)\frac{3\pi_1+\pi_2}{\pi_2} + a_2^2\frac{\pi_1+2\pi_2}{a_1^2\pi_1+a_1^2\pi_2} - 3\,.$$

Početna vrednost Njutnovog iterativnog postupka (NM) i FNM je $\pi_0 = (0.1,\ 0.9)$ za sve vrednosti uzorka. Izlazni kriterijum za oba algoritma NM i FNM je $\|\bar{\xi}\| < \epsilon = 10^{-6}$.

Za vrednost parametara $a_1^1 = 0.4$, $a_1^2 = 2$, $a_2^2 = 3$, NM daje rešenje u 6 iteracija.

Potom kreiramo uzorak od $N = 500$ vrednosti za parametre, sa normalnim raspodelama: $a_1^1 : \mathcal{N}(0.4, 0.05)$, $a_1^2 : \mathcal{N}(2.0, 0.05)$, $a_2^2 : \mathcal{N}(3.0, 0.05)$.

	NM	FNM
broj iteracija	2954	4553
broj izračunavanja funkcije	2954	4553
broj izračunavanja Jacobijana	2954	6
CPU vreme	0.156	0.098

Tabela 1: Rešavanje ekvilibriuma za neoklasičnu ekonomiju, Cobb-Douglass sa 2 robe i 2 agenta, veličine uzorka parametara $N = 500$

Za veće dimenzije problema prednost FNM u odnosu na NM u korišćenju CPU vremena je očiglednija.

	NM iter	NM CPU	FNM iter	FNM CPU
$m = 4, n = 3$	2134	0.773	3156	0.555
$m = 8, n = 6$	2893	1.383	3200	0.606
$m = 16, n = 12$	3072	3.554	3949	0.959
$m = 32, n = 24$	2514	14.592	4144	1.988

Tabela 2: Primer 2

Hvala na pažnji!

Literatura

[1] BLUM, J. R. Approximation methods which converge with probability one. *Ann. Math. Statist. 25*, 2 (06 1954), 382–386.

[2] BLUM, J. R. Multidimensional stochastic approximation methods. *Ann. Math. Statist. 25*, 4 (12 1954), 737–744.

[3] BURKHARDT, J. Test_opt, 2011. http://people.sc.fsu.edu/ jburkardt/m_src /test_opt/test_opt.html.

[4] DOLAN, E. D., AND MORÉ, J. J. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical programming 91*, 2 (2002), 201–213.

[5] KREJIĆ, N., LUŽANIN, Z., AND OVCIN, Z. Stochastic Newton-like methods for computing equilibria in general equilibrium models. *Computational & Applied Mathematics 30* (00 2011), 127 – 149.

[6] KREJIĆ, N., LUŽANIN, Z., OVCIN, Z., AND STOJKOVSKA, I. Descent direction method with line search for unconstrained optimization in noisy environment. *Optimization Methods and Software 30*, 6 (2015), 1164–1184.

[7] Krejić, N., Lužanin, Z., and Stojkovska, I. A gradient method for unconstrained optimization in noisy environment. *Appl. Numer. Math. 70* (Aug. 2013), 1–21.

[8] Moré, J., Garbow, B., and Hillstrom, K. Testing unconstrained optimization software. *ACM Trans. Math. Softw. 7*, 1 (Mar. 1981), 17–41.

[9] Nocedal, J., and Wright, S. J. *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. Springer, 2006.

[10] Robbins, H., and Monro, S. A stochastic approximation method. *The Annals of Mathematical Statistics 22*, 3 (09 1951), 400–407.

[11] Spall, J. *Introduction to Stochastic Search and Optimization: Estimation, Simulation, and Control*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2005.