1 Sortiranje

1. *Šta radi sledeći algoritam?*
U zavisnosti od veličine ulaznog niza A, koliko je vreme izvršavanja datog algoritma?
Da li se može ubrzati?

```
1:  function PROGRAM1(A)
2:      n ← length(A)
3:      flag ← true
4:      for j ← 1 to n − 1 do
5:          if A[j] > A[j + 1] then
6:              flag ← false
7:          end if
8:      end for
9:      return flag
10: end function
```

Dati algoritam proverava da li je ulazni niz sortiran.

Naime, u liniji 2 se bulovska promenljiva flag[1] postavlja na podrazumevanu vrednost true, koja pretpostavlja da je niz sortiran.

U for petlji se za sve članove niza proverava da li je član sa manjim indeksom veći od člana sa većim indeksom. Ako je to barem jednom ispunjeno, tj. ako su posmatrani elementi u inverziji, promenljiva flag će biti postavljena na false i po završetku algoritma će ostati i biti vraćena kao false, što znači da niz nije sortiran.

Linijama koda 2, 3, 4, 5, 6, 9 dodelimo redom vreme izvršavanja c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_9. U tabeli imamo koliko se puta koja od ovih linija izvršava

vreme izvršavanja	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_9
broj izvršavanja	1	1	n	$n-1$	m	1

Sa obzirom da ne znamo m, broj koliko puta će se naći par susednih brojeva tako da je član sa manjim indeksom veći od člana sa većim indeksom (jedino znamo da je $1 \leq m \leq n-1$), razlikujemo tri slučaja:

Best case	$T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + 0c_6 + c_9 = \Theta(n)$
Worst case	$T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + (n-1)c_6 + c_9 = \Theta(n)$
Average case	$T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor c_6 + c_9 = \Theta(n)$

U Average[2] case smo pretpostavili da je u pola slučajeva upoređivani par u inverziji (da je veći broj ispred manjeg).

Dati algoritam se može ubrzati tako što će se iza linije 6 ubaciti komanda break, koja izlazi iz for petlje, jer je dovoljno samo jednom postaviti promenljivu flag na false. Ukoliko u implementaciji ne postoji komanda break, umesto for petlje treba koristiti while petlju.

[1] *flag* = zastavica, EN; *true* = tačno, EN; *false* = netačno, EN; *length* = dužina, EN
[2] *best* = najbolji, EN; *worst* = najgori, EN; *average* = srednji, EN; *case* = slučaj, EN

2. *Doraditi algoritam iz zadatka 1 tako da se izvrši zamena ako je upoređivani par u inverziji i da se to ponavlja u repeat-until petlji od početka i da se prestane kad se dobije sortiran niz.*

Da li će i zašto dobijeni algoritam ikad izaći iz repeat-until petlje?

Koliko upoređivanja i koliko zamena će dati program imati za ulaz $[5,2,4,6,1,3]$*?*

Da li se dobijeni kod može ubrzati izmenom granice u for petlji?

Da li se dobijeni kod može ubrzati ako se pamti koji deo niza je sortiran?

```
 1: procedure PROGRAM2(A)
 2:     n ← length(A)
 3:     repeat
 4:         flag ← true
 5:         for j ← 1 to n − 1 do
 6:             if A[j] > A[j + 1] then
 7:                 swap(A[j], A[j + 1])
 8:                 flag ← false
 9:             end if
10:         end for
11:     until flag
12: end procedure
```

Program u for petlji "gura" veće elemente na koje nailazi usput prema kraju. Prvi put će for petlja "odgurati" najveći element do kraja, sledeći put će odgurati drugi po veličini element, i tako dalje.

Dakle: sigurno će se repeat-until petlja završiti posle najviše n ciklusa, gde je n dužina ulaznog niza.

Posle k izvođenja repeat-until petlje, k elemenata sa kraja će biti sortirani, pa se može smanjiti gornja granica for petlje: Između linije 10 i 11 (vidi PROGRAM2A) ubacimo liniju

$$n \leftarrow n - 1.$$

Program se može i dalje ubrzati ako se uvede promenljiva koja će "pamtiti" poslednji element koji je u for petlji zamenjen, jer su svi ostali iza njega sortirani(vidi PROGRAM2B).

Dobijeni algoritam PROGRAM2 se naziva BUBBLE[3] SORT i posmatrana ubrzanja PROGRAM2A i PROGRAM2B su uobičajena, mada ne smanjuju red kompleksnosti algoritma.

```
procedure PROGRAM2A(A)
    n ← length(A)
    repeat
        flag ← true
        for j ← 1 to n − 1 do
            if A[j] > A[j + 1] then
                swap(A[j], A[j + 1])
                flag ← false
            end if
        end for
        n ← n − 1
    until flag
end procedure
```

```
procedure PROGRAM2B(A)
    n ← length(A)
    repeat
        newn ← 0
        for j ← 1 to n − 1 do
            if A[j] > A[j + 1] then
                swap(A[j], A[j + 1])
                newn ← j
            end if
        end for
        n ← newn
    until n = 0
end procedure
```

[3] *bubble* = mehurić, EN; *swap* = zamena, EN

U algoritmu PROGRAM2, u liniji 6 se vrši upoređivanje, u liniji 7 zamena. U algoritmima PROGRAM2A i PROGRAM2B se te linije nalaze na drugom rednom broju.

Ako se dati ulaz [5,2,4,6,1,3] propusti kroz dobijene programe, pažljivim prebrojavanjem, dobićemo rezultate:

algoritam	br. upoređivanja	br. zamena
PROGRAM2	25	9
PROGRAM2A	15	9
PROGRAM2B	14	9

3. *Napisati algoritam za sortiranje umetanjem, takozvani* INSERTION SORT.

Propustiti ulaz [5,2,4,6,1,3] *kroz dobijeni algoritam i prebrojati broj poređenja i upisivanja elemenata u niz, odnosno u privremenu promenljivu.*

Uporediti dobijeni algoritam sa algoritmom iz zadatka 2.

Algoritam polazi od drugog elementa i ide do kraja: pretpostavlja da ja niz od početka do posmatranog elementa sortiran.

Upoređuje se posmatrani element sa elementima prema početku, pomeraju se elementi sortiranog dela koji su veći od posmatranog i kad se nađe mesto, upiše se posmatrani element.

U kodu sa desne strane upoređivanje se vrši u liniji 5, a upisivanja u linijama 3, 6 i 9.

Ako se propusti ulaz [5,2,4,6,1,3] kroz algoritam, pažljivim prebrojavanjem dobijamo da se upoređivanje ključeva vršilo 12 puta, a upisivanja (linije 3, 6, i 9 zajedno) 19 puta.

```
1:  procedure INSERTION SORT(A)
2:      for j ← 2 to length(A) do
3:          key ← A[j]
4:          i ← j − 1
5:          while i > 0 & A[i] > key do
6:              A[i + 1] ← A[i]
7:              i ← i − 1
8:          end while
9:          A[i + 1] ← key
10:     end for
11: end procedure
```

Znajući da je za jednu zamenu iz BUBBLE SORT (PROGRAM2) potrebno izvršiti 3 pisanja, ovaj algoritam je bolji.

4. *Napisati algoritam za sortiranje biranjem, takozvani* SELECTION SORT.

Propustiti ulaz [5,2,4,6,1,3] *kroz dobijeni algoritam i prebrojati broj upoređivanja, broj zamena elemanata niza, i broj upisivanja indeksa.*

Od prvog do poslednjeg elementa algoritam bira najmanji desno od njega i menja mu mesto sa trenutnim elementom.

Razlika funkcije exchange$(A[i], A[i_{\min}])$ i swap$(A[i], A[i_{\min}])$ je u tome što se u exchange[4] prvo proveri da li je u pitanju isti elemenat, da se ne bi vršilo nepotrebno pisanje.

[4] *exchange* = zamena, EN

```
1: procedure SELECTION SORT(A)
2:     n ← length(A)
3:     for i ← 1 to n do
4:         i_min ← i
5:         for j ← i + 1 to n do
6:             if A[j] < A[i_min] then
7:                 i_min ← j
8:             end if
9:         end for
10:        exchange(A[i], A[i_min])
11:    end for
12: end procedure
```

Za dati ulaz SELECTION SORT algoritam izvršava 15 poređenja (linija 6) , 3 zamene (unuta exchange iz linije 10, kad je u pitanju različit indeks), i 11 zapisivanja indeksa (linije 4 i 7).

Ovaj algoritam je po broju upisivanja (zamena) elemenata niza bolji od oba algoritma iz zadatke 2. Kad se sortiranje vrši na mediju na kome je upisivanje "skupo" (spore memorije), preporučuje se ovaj algoritam.

Ovo je, isto kao BUBBLE SORT i INSERTION SORT inkrementalno sortiranje. Ideja inkrementalnog sortiranja je da je deo niza sortiran i da se taj deo uvećava.

5. *Napraviti analizu brzine rada* SELECTION SORT *algoritma za niz dužine n.*

Napisali smo ponovo algoritam sa brojem ciklusa izršavanja desno u komentaru.

Način implementacije pseudo koda SELECTION SORT algoritma, brzina i sposobnost procesora i memorije može da utiče na brzinu rada algoritma. Uz male razlike izvršna verzija koja se dobije kompajliranjem programa napisanog na osnovu ovog pseudo koda treba da bude otprilike kao u ovoj analizi.

Liniji algoritma i dodeljujemo vreme izvršavanja c_i. "End" linijama ne dodeljujemo vreme.

```
1: procedure SELECTION SORT(A)
2:     n ← length(A)                          ▷ 1
3:     for i ← 1 to n do                      ▷ n + 1
4:         i_min ← i                          ▷ n
5:         for j ← i + 1 to n do              ▷ Σ_{i=1}^{n} t_i
6:             if A[j] < A[i_min] then        ▷ Σ_{i=1}^{n} (t_i − 1)
7:                 i_min ← j                  ▷ Σ_{i=1}^{n} (s_i − 1)
8:             end if
9:         end for
10:        if i ≠ i_min then                  ▷ n
11:            swap(A[i], A[i_min])           ▷ r
12:        end if
13:    end for
14: end procedure
```

Vreme za ulazni niz $A(n)$ je

$$T(n) = c_2 + c_3(n+1) + c_4 n + c_5 \sum_{i=1}^{n} t_i + c_6 \sum_{i=1}^{n} (t_i - 1) + c_7 \sum_{i=1}^{n} (s_i - 1) + \\ + c_{10} n + c_{11} r$$

Kad uvrstimo da je $t_i = n - i + 1, \quad s_i \leq t_i, \quad r \leq n$ dobijamo

$$T(n) = c_2 + c_3(n+1) + c_4 n + c_5 \left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + c_6 \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + c_7 \sum_{i=1}^{n} (s_i - 1) + \\ + c_{10} n + c_{11} r$$

Worst case

$$s_i = t_i, \quad r = n$$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_2 + c_3(n+1) + c_4 n + c_5\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + (c_6 + c_7)\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + c_{10}n + c_{11}n \\ &= n^2\frac{c_5+c_6+c_7}{2} + n\left(c_3 + c_4 + \frac{c_5-c_6-c_7}{2} + c_{10} + c_{11}\right) + c_2 + c_3 \\ &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$

Best case

$$s_i = 0, \quad r = 0$$

$$\begin{aligned} T(n) &= c_2 + c_3(n+1) + c_4 n + c_5\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + c_6\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + c_{10}n \\ &= n^2\frac{c_5+c_6}{2} + n\left(c_3 + c_4 + \frac{c_5-c_6}{2} + c_{10}\right) + c_2 + c_3 \\ &= \Theta(n^2) \end{aligned}$$

Naravno da je **Average case** $T(n) = \Theta(n^2)$.

6. *Napraviti analizu brzine rada* INSERTION SORT *algoritma za niz dužine n.*

Dodelimo linijama 2,3,4,5,6,7,9 redom vremena izvršavanja $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_9$. Broj izvršavanja određene linije ćemo napisati desno kao komentar.

```
 1: procedure INSERTION SORT(A)
 2:     for i ← 2 to length(A) do                ▷ n
 3:         key ← A[i]                           ▷ n − 1
 4:         j ← i − 1                            ▷ n − 1
 5:         while j > 0 & A[j] > key do          ▷ Σ_{i=2}^{n} t_i
 6:             A[j + 1] ← A[j]                  ▷ Σ_{i=2}^{n} (t_i − 1)
 7:             j ← j − 1                        ▷ Σ_{i=2}^{n} (t_i − 1)
 8:         end while
 9:         A[j + 1] ← key                       ▷ n − 1
10:     end for
11: end procedure
```

Dobijamo vreme izvršavanja algoritma:

$$T(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5\sum_{2}^{n} t_i + (c_6 + c_7)\sum_{2}^{n}(t_i - 1) + c_9(n-1),$$

gde je t_i broj koliko puta će i-ti element trebati da se pomeri prema početku plus jedan. Tako je t_i najmanje 1, a najviše i puta.

Best case $t_i = 1$
$T_B(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5(n-1) + c_9(n-1) = \Theta(n)$

Worst case $t_i = i$
$T_W(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5(n(n+1)/2 - 1) + (c_6 + c_7)(n-1)n/2 + c_9(n-1) = \Theta(n^2)$

7. *Dati definiciju i primer Θ (veliko theta) i O (veliko O) ponašanja.*

$$\Theta(g) = \{f | (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)\ (n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n))\}$$

Umesto da pišemo $f \in \Theta(g)$, pišemo $f = \Theta(g)$ i čitamo: funkcija f se ponaša kao $\Theta(g)$ (kao veliko theta od g).
Na primer, $3n^2 = \Theta(n^2)$. $(c_1 = 1, c_2 = 4, n_0 = 1)$

$$O(g) = \{f | (\exists c_1 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq f(n) \leq c_1 g(n))\}$$

Umesto da pišemo $f \in O(g)$, pišemo $f = O(g)$ i čitamo: funkcija f se ponaša kao $O(g)$ (kao veliko O od g).
Na primer, $\ln n = O(n)$. $(c_1 = 1, n_0 = 1)$ Pri tome nije $\ln n$ veliko theta od n.

8. *Pokazati da je* $\frac{2}{3}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$

Za desnu nejednakost je dovoljno uzeti $c_2 = \frac{2}{3}$. Da bismo našli c_1, podelimo levu nejednakost sa n^2. Dobijamo

$$0 \leq c_1 \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{n}, \text{ odakle } n \geq 4 =: n_0.$$

Sad možemo uzeti za c_1 bilo koji broj koji zadovoljava $0 \leq c_1 \leq \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6}$, recimo $c_1 := \frac{1}{6}$.

9. *Pokazati da je* $100n - 1000 = O(n^2)$.

Očigledno za $c_1 = 100$ i $n_0 = 10$.

10. *Pokazati da je* $100n + 1000 = O(n^2)$.

Da, za, recimo, $c_1 = 20$ i $n_0 = 10$, jer je

$$0 \leq 100n + 1000 \leq c_1 n^2 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{100}{n} + \frac{1000}{n^2} \leq c_1 \Leftarrow n \geq 10.$$

11. *Da li je* $100n + 1000 = \Theta(n^2)$*?*

Ne, jer $0 \leq c_1 n^2 \leq 100n + 1000 \Leftrightarrow \overbrace{c_1 n^2 - 100n - 1000}^{\star} \leq 0$, počev od nekog n_0, a to je nemoguće, jer je parabola $\star$ zakrivljena nagore (zato što je $c_1 > 0$), i u beskonačnosti sigurno jeste iznad x-ose, a ne ≤ 0.

12. *Dati definiciju i primer Ω (veliko omega) ponašanja.*

$$\Omega(g) = \{f | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)\ (n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq cg(n) \leq f(n)\}$$

Umesto da pišemo $f \in \Omega(g)$, pišemo $f = \Omega(g)$ i čitamo: funkcija f se ponaša kao $\Omega(g)$ (kao veliko omega od g).
Na primer, $3n^2 = \Omega(n^2)$. $(c_1 = 1, c_2 = 4, n_0 = 1)$

13. *Dati vezu Ω, Θ i O ponašanja.*

Očigledno važi: $f = \Theta(g) \Leftrightarrow (f = \Omega(g) \wedge f = O(g))$

14. *Pokazati da je $\frac{2}{3}n^2 - 2n = \Omega(n^2)$*

Da, jer je u jednom od prethodnih zadataka bilo $\frac{2}{3}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$.

15. *Da li je $100n + 1000 = O(n)$?*

Da, očigledno, za, recimo, $c_1 = 101$ i $n_0 = 1001$. Vidimo da je tvrđenje zadatka 10 pregrubo. Važi i $100n + 1000 = o(n^2)$ (malo o).

16. *Da li je $100n + 1000 = \Theta(n)$?*

Da, očigledno, za, recimo, $c_2 = 101$, $c_1 = 100$ i $n_0 = 1001$.

17. *Pokazati da je $n \ln n + n = O(n^2)$?*

Da, jer je niz $\frac{n \ln n + n}{n^2}$ konvergentan (konvergira ka nuli), zato je ograničen, to jest postoji c_1 takvo da počev od nekog n_0 važi $\frac{n \ln n + n}{n^2} \leq c_1$, što je ekvivalentno sa $n \ln n + n \leq c_1 n^2$.

18. *Pokazati da je $n \ln n + n = \Omega(n)$?*

Zato što je $\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln n + n}{n} = \infty$, postoji konstanta $c > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da je

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow c < \frac{n \ln n + n}{n} \Leftrightarrow cn < n \ln n + n.$$

19. *Znajući da je worst-case vreme izvršavanja* INSERTION SORT *algoritma $O(n^2)$, n je veličina ulaza, da li to znači da će za svaki ulazni niz veličine n, vreme izvršavanja biti $O(n^2)$?*

Da. Zato što $O(n^2)$ ponašanje daje gornju granicu za vreme izvršavanja.

20. *Znajući da je worst-case vreme izvršavanja* INSERTION SORT *algoritma $\Theta(n^2)$, n je veličina ulaza, da li to znači da će za svaki ulazni niz veličine n, vreme izvršavanja biti $\Theta(n^2)$?*

Ne. Zato što $\Theta(n^2)$ ponašanje daje i gornju i donju granicu. Donja granica neće biti ispunjena jer za već sortiran niz veličine n (best-case za INSERTION SORT) vreme izvršavanja je $\Theta(n)$.

21. *Naći asimptotsku ocenu za $T(n)$, vreme izvršavanja* INSERTION SORT *algoritma za ulaz dužine n.*

U zadatku 6 smo videli da je za $T(n)$ Best case $\Theta(n)$ i Worst case $\Theta(n^2)$.
Možemo reći da je $T(n) = \Omega(n)$ i $T(n) = O(n^2)$.
Asimptotske oznake imaju svoju analogiju sa brojevima:

$$\begin{aligned} f = \Omega(g) &\leftrightarrows f \geq g \\ f = O(g) &\leftrightarrows f \leq g \\ f = \Theta(g) &\leftrightarrows f = g \end{aligned}$$

22. *Dati definiciju i primer malog o ponašanja.*

$$o(g) = \{f | (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)\ (n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq f(n) < cg(n)\}$$

Kao i do sad, $f \in o(g)$ pišemo $f = o(g)$.
U matematičkoj analizi je česta upotreba oznake malo o. Jedina razlika je što mi zahtevamo da su funkcije koje posmatramo nenegativne.
Za (počev od nekog n_0) nenegativne funkcije f i g važi

$$f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Analogija sa brojevima bi bila: $f = o(g) \leftrightarrows f < g$.
Oznaka malo o se koristi da bi jasnije pokazala asimptotski poredak: Na primer

$$n \ln n + n = o(n^2).$$

Iz definicije je očigledno da $f = o(g) \Rightarrow f = O(g)$.
Napomenimo još da za asimptotske oznake važi tranzitivnost:

$$\begin{aligned} f = O(g) \wedge g = O(h) &\Rightarrow f = O(h) \\ f = \Theta(g) \wedge g = \Theta(h) &\Rightarrow f = \Theta(h) \\ f = \Omega(g) \wedge g = \Omega(h) &\Rightarrow f = \Omega(h) \\ f = o(g) \wedge g = o(h) &\Rightarrow f = o(h) \end{aligned}$$

23. *Napisati algoritam koji za dati niz nalazi najmanji i najveći element. Odrediti red broja poređenja u datom algoritmu (prema veličini niza n).*

Rešenje je program MINIMAXI.

24. *Napisati algoritam koji za dati niz nalazi najmanji i najveći element a da pri tome ima najviše* $1.5n$ *poređenja, gde je* n *veličina niza.*

Rešenje je program MINIMAXI1.

```
1: function MINIMAXI(A)
2:     n ← length(A)
3:     min ← A[1]
4:     max ← A[1]
5:     for i ← 2 to n do
6:         if A[i] < min then
7:             min ← A[i]
8:         end if
9:         if A[i] > max then
10:            max ← A[i]
11:        end if
12:    end for
13:    return [min,max]
14: end function
```

Očigledno je broj poređenja (linije 6 i 9): $n-1+n-1 = 2n-2 = O(n)$ (sa $c_1 = 2, n_0 = 1$).

Odnosno: za svaki element (osim prvog, a to nije bitno) se vrši po dva poređenja.

Objašnjenje zadatka 24:

Za svaka dva elementa (osim prvog za neparno n) se vrši 3 poređenja, što daje ukupni broj poređenja $\frac{3}{2}n = 1.5n$ za n parno, A ukupni broj poređenja je i manji za n neparno.

Odd[5] funkcija vraća true ako je n neparan broj.

```
1: function MINIMAXI1(A)
2:     n ← length(A)
3:     if odd(n) then
4:         max ← A[1]
5:         min ← A[1]
6:         j ← 2
7:     else
8:         if A[1] > A[2] then
9:             max ← A[1]
10:            min ← A[2]
11:        else
12:            min ← A[1]
13:            max ← A[2]
14:        end if
15:        j ← 3
16:    end if
17:    while j < n do
18:        if A[j] > A[j+1] then
19:            if A[j] > max then
20:                max ← A[j]
21:            end if
22:            if A[j+1] < min then
23:                min ← A[j+1]
24:            end if
25:        else
26:            if A[j] < min then
27:                min ← A[j]
28:            end if
29:            if A[j+1] > max then
30:                max ← A[j+1]
31:            end if
32:        end if
33:        j ← j+2
34:    end while
35:    return [min,max]
36: end function
```

[5] *odd* = neparno, EN; *even* = parno, EN

25. *Napisati rekurzivni i iterativni algoritam za računanje faktorijala* $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$.

```
function FACTORIAL(n)
    if n ≤ 1 then
        return 1
    else
        return n · FACTORIAL(n − 1)
    end if
end function
```

```
function FACTORIAL1(n)
    f ← 1
    for k ← 2 to n do
        f ← f · k
    end for
    return f
end function
```

26. *Fibonačijev niz čine redom brojevi* 0,1,1,2,3,5,8,13,... *Prva dva su redom* 0 *i* 1*, svaki sledeći je zbir prethodna dva. Napisati rekurzivni i iterativni algoritam za računanje n-tog Fibonačijevog broja.*

```
function FIBONACCI(n)
    if n ≤ 1 then
        return n
    else
        return FIBONACCI(n − 1)+
            FIBONACCI(n − 2)
    end if
end function
```

```
function FIBONACCI1(n)
    if n ≤ 1 then
        return n
    else
        f0 ← 0
        f1 ← 1
        for k ← 2 to n do
            f ← f0 + f1
            f0 ← f1
            f1 ← f
        end for
    end if
    return f
end function
```

Rekurzivna procedura FIBONACCI ne sme da se pozove sa velikim n jer zaglavi kompjuter velikim drvetom rekurzije.

Vreme izvršavanja je manje za iterativne verzije programa iz dva poslednja zadatka.

27. *Napisati proceduru za spajanje dva susedna sortirana podniza niza* A *u sortirani podniz. Iskoristiti dobijenu proceduru za pisanje* MERGE SORT[6] *algoritma za sortiranje.*

U realizaciji ćemo koristiti takozvani džoker simbol ∞ koji je veći od svih elemenata korišćenog tipa. Ova tehnika omogućava pojednostavljenje koda uz neznatni utrošak memorije. Ti simboli ne postoje u svakom tipu podataka, za neke tipove kao što je int, može se koristiti maxint.

[6] *merge* = spojiti, stopiti, EN

```
procedure MERGE(A, p, q, r)
    ▷ spaja podniz niza A od p do q sa podnizom od q + 1 do r
    for k ← p to q do                    ▷ Prebacujemo prvi podniz u L
        L[k − p + 1] ← A[k]
    end for
    L[q − p + 2] ← ∞
    for k ← q + 1 to r do                ▷ Prebacujemo drugi podniz u R
        R[k − q] ← A[k]
    end for
    R[r − q + 1] ← ∞
    i ← 1
    j ← 1
    for k ← p to r do                    ▷ Spajanje
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] ← L[i]
            i ← i + 1
        else
            A[k] ← R[j]
            j ← j + 1
        end if
    end for
end procedure
procedure SORT(A, p, r)
    ▷ Procedura koja se rekurzivno poziva
    if p < r then
        q ← ⌊(p + r)/2⌋
        SORT(A, p, q)
        SORT(A, q + 1, r)
        MERGE(A, p, q, r)
    end if
end procedure
procedure MERGE SORT(A)
    ▷ Glavna procedura koju poziva korisnik
    n ← length (A)
    SORT(A, 1, n)
end procedure
```

Ovaj program deli dobijeni podniz na pola, na svakoj polovini primenjuje rekurzivno istu tehniku, potom spaja (merge) polovine u jedan, sortiran, podniz.

Povratak iz rekurzije je prazan niz za koji se smatra da je sortiran.

Za rekurzivno pozivanje ovog programa je pogodno statički alocirati memoriju za podnizove L i R koju bi koristile sve instance u svim rekurzivnim pozivima procedure MERGE.

28. *Napisati algoritam za* QUICK SORT *sortiranje.*

Ovo je vrlo često korišćen algoritam sortiranja koji se pokazao brzim i jednostavnim.

Koristi divide & conquer[7] tehniku isto kao MERGE SORT.

Koristi se procedura PARTITION koja grupiše premeštanjem elemenata odabrani podniz (od p do r) tako da odabrani element (recimo poslednji) bude na svom mestu po redosledu, da ispred njega budu manji ili jednaki od njega, iza njega veći od njega. ($\star$)

Ako je q redni broj mesta odabranog broja, onda se rekurzivno poziva ista procedura na podnizove od p do $q-1$ i od $q+1$ do r, gde su p i r granice posmatranog podniza. Prvi put se uzima $p=1$ i $r=n$.

```
function PARTITION(A, p, r)
    ▷ zamenama srediti niz u skladu sa (⋆)
    x ← A[r]
    i ← p − 1
    for j ← p to r − 1 do
        if A[j] ≤ x then
            i ← i + 1
            exchange(A[i], A[j])
        end if
    end for
    exchange(A[i + 1], A[r])
    return i + 1
end function
procedure SORT(A, p, r)
    ▷ Procedura koja se rekurzivno poziva
    if p < r then
        q ← PARTITION(A, p, r)
        SORT(A, p, q − 1)
        SORT(A, q + 1, r)
    end if
end procedure
procedure QUICK SORT(A)
    ▷ Glavna procedura koju poziva korisnik
    n ← length (A)
    SORT(A, 1, n)
end procedure
```

[7] *divide & conquer* = podeli pa osvoji, EN

29. *Analizirati red vremena izvršavanja, red potrošnje memorije i stabilnost algoritama za sortiranje datih u prethodnim zadacima.*

U sledećoj tabeli je data tražena asimptotska vrednost za sledeće algoritme: BUBBLE SORT (B), INSERTION SORT (I), SELECTION SORT (S), MERGE SORT (M), QUICK SORT (Q), za Best case (B), Average case (A) i Worst case (W).

Takođe je dat podatak o redu veličine dodatnog memorijskog prostora potrebnog za sortiranje (M) i podatak o stabilnosti posmatranog algoritma (S).

	B	A	W	M	S
B	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$	DA
I	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$	DA
S	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(1)$	NE
M	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta(n)$	DA
Q	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta(n \ln n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(\ln n)$	NE

Stabilnost je osobina algoritma da ključevima sa istom vrednošću ne menja redosled. Ovo je korisna osobina algoritama za sortiranje, jer za podatke sortirane po jednom ključu stabilni algoritmi čuvaju redosled kada se primeni sortiranje po drugom ključu.

Naša implementacija QUICK SORT algoritma nije stabilna. Ako se ovaj algoritam modifikuje sa ciljem da dobije stabilnost, gube se performanse.

Inače je QUICK SORT u praksi (primenjen na uobičajene podatke) najbrži od posmatranih algoritama.

30. *Izvršiti testiranje posmatranih algoritama na nizu random*[8] *brojeva obima* 10^1,10^2,10^3, 10^4, 10^5.

Algoritmi iz prethodnih zadataka su kodirani i testirani na random uzorku i dobijeni su rezultati:

	B	I	S	M	Q
10	7.30E-05	6.08E-05	6.10E-05	0.00034	0.0003
100	0.00021	6.10E-05	0.0001	0.00235	0.0008
1000	0.01873	0.00417	0.00625	0.0233	0.0067
10000	1.92922	0.35455	0.60198	0.23819	0.0669
100000	192.796	35.4994	60.2424	2.38437	0.6754

Vidimo da je za veliko n QUICK SORT najbrži iako je na nizu do veličine 1000 brži INSERTION SORT. U praksi se za nizove obima manjeg od neke granice u rekurziji sa QUICK SORTA prelazi na INSERTION SORT. Time se štedi memorija i vreme, jer je INSERTION SORT brži za male nizove i troši manje memorije.

[8] *random* = slučajni, EN

2 Apstraktni tipovi podataka

31. *Napisati algoritam* DET *za računanje determinante matrice formata* $n \times n$ *dovođenjem na gornje-trougaonu determinantu.*

```
1:  function DET(A,n)
2:      znak ← 1
3:      for i ← 1 to n − 1 do
4:          pm ← PIVOT(A,n,i)
5:          if ¬pm then
6:              return 0.0
7:          end if
8:          znak ← znak ∗ pm
9:          for k ← i + 1 to n do
10:             α ← A[k,i]/A[i,i]
11:             A[k,i] ← 0.0
12:             for j ← i + 1 to n do
13:                 A[k,j] ← A[k,j] − αA[i,j]
14:             end for
15:         end for
16:     end for
17:     if A[n,n] = 0 then
18:         return 0.0
19:     end if
20:     d ← znak ∗ A[1,1]
21:     for i ← 2 to n do
22:         d ← d ∗ A[i,i]
23:     end for
24:     return d
25: end function
```

```
function PIVOT(A,n,m)
    i1 ← m; j1 ← m; pm ← 1
    for i ← m to n do
        for j ← m to n do
            if |A[i,j]| > |A[i1,j1]| then
                i1 ← i; j1 ← j
            end if
        end for
    end for
    if A[i1,j1] = 0 then
        return 0
    end if
    if i1 ≠ m then
        pm ← pm ∗ (−1)
        for j ← m to n do
            swap(A[i,j],A[i1,j])
        end for
    end if
    if j1 ≠ m then
        pm ← pm ∗ (−1)
        for i ← 1 to n do
            swap(A[i,j],A[i,j1])
        end for
    end if
    return pm
end function
```

32. *Napraviti biblioteku funkcija u programskom jeziku C koje omogućavaju računske operacije sa matricama.*

Elementi matrice $A_{m\times n}$ se smeštaju po vrstama u niz dužine $m * n$. Indeksiranje elemata u C-u počinje od 0, tako da element matrice $A[i,j]$ se u nizu nalazi na mestu $A[i * n + j]$.

matrice.h

```
void addmat(double *, double *, double *, int, int);          // sabiranje (I,I,O,I,I)
void multmat(double *, double *, double *, int, int, int);    // mnozenje (I,I,O,I,I,I)
void multscal(double, double *, double *, int, int);          // mnozenje skalarom (I,I,O,I,I)
void transpose(double*, double *, int, int);                  // transponovanje (I,O,I,I)
int inverse(double*, double *, int);                          // inverzna (I/O,O,I)
double det(double*, int);                                     // determinanta (I/O,I)
int printmatrix(double*, int, int);                           // stampanje (I,I,I)
```

matrice.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define epsilon 1e-12
void addmat(double *A, double *B, double *C, int m, int n)
{ // sabiranje matrica A mXn + B mXn = C mXn
    int i;

    for(i=0;i<m*n;i++){
        C[i] = A[i]+B[i];
    }
}
void multmat(double *A, double *B, double *C,
             int m, int p, int n)
{ // mnozenje matrica A mXp * B pXn = C mXn
    int i,j,k;

    for(i=0;i<m;i++){
        for(j=0;j<n;j++){
            C[i*n+j] = 0;
            for(k=0;k<p;k++)
                C[i*n+j] = C[i*n+j]+A[i*p+k]*B[k*n+j];
        }
    }
}
void multscal(double x, double *A, double *B, int m, int n)
{ // mnozenje matrica x * A mXn = B mXn
    int i;

    for(i=0;i<m*n;i++)
        B[i] = x*A[i];
}
void transpose(double *A, double *B, int m, int n)
{ // transpose( A mXn ) = B nXm
    int i,j;

    for(i=0;i<m;i++){
        for(j=0;j<n;j++){
            B[j*m+i] = A[i*n+j];
        }
    }
}
int rowpivot(double *A, int n, int m)
{ // pivotizuje vrstu m sa i1, vraca -1 ako rang<n
    int i,j,i1=m;
    double temp;
    for(i=m+1;i<n;i++){
        if(fabs(A[i*n+m])>fabs(A[i1*n+m])){
            i1 = i;
        }
    }
    if(fabs(A[i1*n+m])<epsilon)
        return -1;
    if(i1!=m){
        for(j=m;j<n;j++){
            temp=A[i1*n+j]; A[i1*n+j]=A[m*n+j]; A[m*n+j]=temp;
        }
    }
    return i1;
}
int inverse(double *A, double *B, int n)
{ // A^(-1) = B (menja A) daje n-rang(A). rang(A)<n => nema inv
    int i,j,k,i1;
    double alpha;
    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<n;j++)
            B[i*n+j] = (double)(i==j);
// Gausove eliminacije
    for(i=0;i<n-1;i++){
        if((i1=rowpivot(A,n,i))==-1){
            return (n-i); // rang je i, A nema inverznu
        }
        for(j=0;j<n;j++){
            alpha = B[i*n+j]; B[i*n+j] = B[i1*n+j];
            B[i1*n+j] = alpha;
        }
        for(k=i+1;k<n;k++){
            alpha = A[k*n+i]/A[i*n+i];
            A[k*n+i] = 0;
            for(j=i+1;j<n;j++)
                A[k*n+j] = A[k*n+j] - alpha*A[i*n+j];
            for(j=0;j<n;j++)
                B[k*n+j] = B[k*n+j] - alpha*B[i*n+j];
        }
    }
    if(fabs(A[n*n-1])<epsilon)
        return 1; // rang je n-1, A nema inverznu
// Zordanove eliminacije
    for(i=n-1;i>0;i--){
        for(k=0;k<i;k++){
            alpha = A[k*n+i]/A[i*n+i];
            for(j=0;j<n;j++){
                B[k*n+j]=B[k*n+j]-alpha*B[i*n+j];
            }
        }
        for(j=0;j<n;j++)
            B[i*n+j]=B[i*n+j]/A[i*n+i];
    }
    for(j=0;j<n;j++)
        B[j]=B[j]/A[i];
    return 0; // A ima inverznu, nalazi se u B
}
int pivot(double *A, int n, int m)
{ // pivotizuje vrstu i1 / kolonu j1 sa m / m, vraca +/-1
    int i,j,i1=m,j1=m,znak=1;
    double temp;
    for(i=m;i<n;i++){
        for(j=m;j<n;j++){
            if(fabs(A[i*n+j])>fabs(A[i1*n+j1])){
                i1 = i;
                j1 = j;
            }
        }
    }
    if(fabs(A[i1*n+j1])<epsilon)
        return 0;
    if(i1!=m){
        znak = znak*(-1);
        for(j=m;j<n;j++){
            temp=A[i1*n+j]; A[i1*n+j]=A[m*n+j]; A[m*n+j]=temp;
        }
    }
    if(j1!=m){
        znak = znak*(-1);
        for(i=0;i<n;i++){
            temp=A[i*n+m]; A[i*n+m]=A[i*n+j1]; A[i*n+j1]=temp;
        }
    }
    return znak;
}
double det(double *A, int n)
{ // racuna determinantu matrice A nXn, (menja elemente A)
    int i,j,k,pm,znak=1;
    double alpha;
    for(i=0;i<n-1;i++){
        if(!(pm=pivot(A,n,i)))
            return 0.0;
        znak = znak*pm;
        for(k=i+1;k<n;k++){
            alpha = A[k*n+i]/A[i*n+i];
            A[k*n+i] = 0;
            for(j=i+1;j<n;j++)
                A[k*n+j] = A[k*n+j] - alpha*A[i*n+j];
        }
    }
    if(fabs(A[n*n-1])<epsilon)
        return 0.0;
    alpha = znak*A[0];
    for(i=1;i<n;i++)
        alpha = alpha * A[i*n+i];
    return alpha;
}
void printmatrix(double *A, int m, int n)
{ // stampa matricu A mXn, m,n < 10
    int i,j;

    printf("\n+-");
    for(j=0;j<m;j++) printf("--------");
    printf("-+\n");
    for(i=0;i<m;i++){
        printf("| ");
        for(j=0;j<n;j++)
            printf(" %6.2f ",A[i*n+j]);
        printf(" |\n");
    }
    printf("+-");
    for(j=0;j<m;j++) printf("--------");
    printf("-+\n");
}
```

33. *Koristeći biblioteku iz zadatka 32 napisati program u C-u koji rešava matričnu jednačinu* $A + BX = C$*, gde su*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -7 & -16 \\ -7 & -18 & -16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & -16 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 16 & 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

Primenjujući matričnu algebru dobijamo $X = B^{-1}(C - A)$. U C-u to računamo pomoću sledećeg programa

main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "matrice.h"
#define epsilon 1e-12

int main()
{
    int nr,n;

    n = 3;
    double A[]={1,2,-3,4,-7,-16,-7,-18,-16};
    double B[]={1,2,3,4,7,6,7,8,-16};
    double C[]={-1,3,4,2,2,10,16,20,21};
    double *minusA=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *CminusA=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *Binv=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *X=malloc(n*n*sizeof(double));

    if((nr=inverse(B,Binv,n))){
        printf("\nNe postoji B^(-1), rang(B) je %d.",n-nr);
    }
    else{
        multscal(-1,A,minusA,3,3);
        addmat(C,minusA,CminusA,3,3);
        multmat(Binv,CminusA,X,3,3,3);
        printmatrix(X,3,3);
    }
    return 0;
}
```

Kompajliranje i pokretanje gornjeg programa daje rešenje $X =$

```
+-                          -+
|    1.00    2.00    3.00   |
|    0.00    1.00    2.00   |
|   -1.00   -1.00   -0.00   |
+-                          -+

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.016 s
Press any key to continue.
```

34. *Izračunati broj sabiranja i množenja elemenata matrice A prilikom računanja determinante reda n upotrebom algoritma iz zadatka 31.*

U pivotizaciji nema množenja i sabiranja elemenata matrice A. Dovođenje na gornju trougaonu determinantu se vrši Gausovim eliminacijama:

Idući brojačem i po dijagonali od prvog do pretposlednjeg elementa, množenjem i-te vrste brojem $\alpha = A[k,i]/A[i,i]$ i oduzimanje od k-te vrste dobija se gornje trougaona determinanta. Njena vrednost je proizvod elemenata sa glavne dijagonale.

Sabiranja elemenata matrice se vrše u liniji 13 algoritma (oduzimanje brojimo kao sabiranje). Množenja se vrše u liniji 10 (deljenje brojimo kao množenje) i liniji 13, kao i na samom kraju, u liniji 22, kad se množe elementi sa glavne dijagonale.

i	$SAB(i)$	$MNO(i)$
1	$(n-1)(n-1)$	$(n-1)(n-1)+n-1$
2	$(n-2)(n-2)$	$(n-2)(n-2)+n-2$
$\vdots$	$\ddots$	$\cdots$
$n-2$	$2\cdot 2$	$2\cdot 2+2$
$n-1$	1	$1+1$
linija 22	0	$n-1$
$\sum$	$\sum SAB(i)$	$\sum MNO(i)$

Koristeći formulu $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ i $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, dobijamo broj sabiranja i množenja:

$$\sum SAB(i) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n+1) = \Theta(n^3)$$

$$\sum MNO(i) = \sum SAB(i) + \frac{1}{2}(n-1)n + n - 1 = \Theta(n^3)$$

35. *Izračunati broj sabiranja i množenja elemenata matrice A prilikom računanja determinante reda n koristeći definiciju:*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{po svim perm.} \\ (i_1,i_2,\ldots i_n)}} (-1)^{\sigma(i_1,i_2,\ldots i_n)} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

gde je $\sigma(i_1,i_2,\ldots i_n)$ broj inverzija permutacije $(i_1,i_2,\ldots i_n)$, čija parnost odlučuje znak sabirka.

Očigledno ima $n!$ sabiraka, tako da je za ovaj algoritam

$$\sum SAB(i) = n! - 1$$

$$\sum MNO(i) = n!(n-1)$$

36. *Ako jedno sabiranje traje 3.13E-9, a množenje 3.75E-9, koliko vremena treba da se saberu i pomnože elementi matrice* 100×100 *pomoću algoritma iz zadatka 31, čija analiza je u zadatku 34, odnosno, preko definicije, analiza u zadatku 35?*

Vreme dobijamo po formuli

$$\sum SAB(i) \times 3.13 \times 10^{-9} + \sum MNO(i) \times 3.75 \times 10^{-9}.$$

Za $n = 100$, formule iz zadatka 34 i 35 daju:

	vreme
zad 34	$0.0023s$
zad 35	$3.49 \times 10^{151}s =$ 1.11×10^{144}godina

Očigledno je računanje determinante dovođenjem na gornju trougaonu neuporedivo brže za velike formate matrice.

Štaviše, zbog manjeg broja računskih operacija nagomilavanje greške zaokruživanja je manje i dobija se precizniji rezultat.

Preciznosti rezultata doprinosi i pivotizacija. Dovođenje najvećeg elementa po apsolutnoj vrednosti na dijagonalu utiče na znatno smanjivanje uticaja greške zaokruživanja.

Pivotizacija je istovremeno i test da li je data matrica singularna: kad se procedura rowpivot vrati sa vrednošću nr različitom od 0, onda je matrica singularna, njena determinanta je 0, a rang je $n - nr$.

37. *Analizirati algoritam za računanje inverzne matrice inverse iz zadatka 32.*

Posmatrani algoritam prvo vrši Gausove eliminacije na matrici A i istovremeno na matrici B koja je u početku bila jedinična matrica.

Pivotizaciju vrši samo po vrstama. Akko je matrica singularna, onda će pri izvršavanju Gausovih eliminacija rowpivot vratiti -1, što će biti signal proceduri inverse da zaključi da je matrica singularna, a da je njen rang trenutna vrednost brojača i.

Naravno, isto kao u implementaciji algoritma za računanje determinante u *floating point*[9] aritmetici ne vrši se upoređivanje dobijene vrednosti sa nulom po jednakosti. Razlog je što mala greška zaokruživanja, koja je neminovna, dovodi do pogrešnog zaključka. Stoga nulom smatramo brojeve čija je apsolutna vrednost manja od epsilon $= 10^{-12}$.

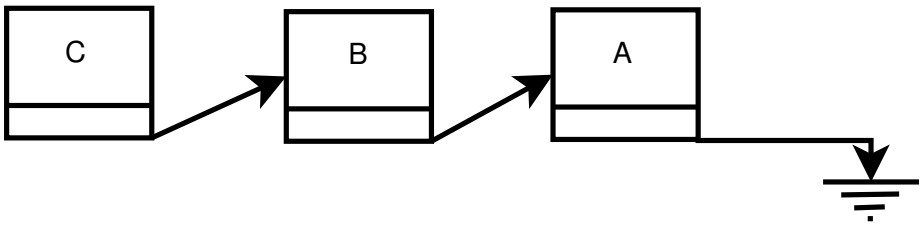
Algoritam potom vrši Žordanove eliminacije na matrici A i B, dovodeći elementarnim transformacijama po vrstama matricu A na jediničnu i matricu B na inverznu od A.

Žordanove transformacije se ne moraju vršiti na elementima matrice A.

[9] *floating point* = aritmetika pokretnog zareza, EN

38. *Napisati program u programskom jeziku C koji pravi povezanu listu kao sa slike, ispisuje njen sadržaj, i oslobađa dinamički alociranu memoriju. Koristiti tip podataka cvor:*

```
typedef struct _cvor cvor; struct _cvor {
    char podatak;
    cvor *sledeci;
};
```



gomila.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

typedef struct _cvor cvor;

struct _cvor
{
    char podatak;
    cvor *sledeci;
};

int main()
{
    cvor *gomila = NULL;
    cvor *S;

    S = malloc(sizeof(cvor));
    (*S).podatak = 'A';
    (*S).sledeci = NULL;

    gomila = S;

    S = malloc(sizeof(cvor));
    S->podatak = 'B';
    S->sledeci = gomila;
    gomila = S;

    S = malloc(sizeof(cvor));
    S->podatak = 'C';
    S->sledeci = gomila;
    gomila = S;

    while(S)
    {
        printf("%c\n",S->podatak);
        S = S -> sledeci;
    }

    while(gomila){
        S = gomila;
        gomila = gomila->sledeci;
        free(S);
    }

    return 0;
}
```

39. *Napisati algoritme za implementaciju apstraktnog tipa podataka (ADT[10]) Stack pomoću povezanih listi.*

Treba realizovati MAKENULL, ISEMPTY, PUSH, POP, TOP, ISMEMBER, CLEAR.

Napravićemo tip podataka koji sadrži data polje i pokazivač na sledećeg člana. Prazan stek je null pointer. Ovo je uobičajena implementacija steka pomoću povezanih listi.

Posmatrani tip podataka ćemo zvati *node* i to će biti struktura od dva polja čiji su tipovi: $S.data : listdata$ i $S.next : *node$ i

U programskom jeziku C struktura koja će sadržati čvorove naše povezane liste bila bi opisana sledećim kodom.

```
typedef char listdata;
typedef struct _node node;

struct _node {
    listdata data;
    node *next;
};
```

U pseudokodu kada se procedure pozivaju sa parametrom koji predstavlja adresu promenljive A, zapisivaćemo to sa $*A$.

procedure MAKENULL($*S$)
    $S \leftarrow$ NULL
end procedure

function ISEMPTY($*S$)
    return $S =$ NULL
end function

procedure PUSH($*S, d$)
    $new \leftarrow$ malloc(**sizeof**(node))
    $new.data \leftarrow d$
    $new.next \leftarrow S$
    $S \leftarrow new$
end procedure

function POP($*S$)
    $temp \leftarrow S$
    $d \leftarrow temp.data$
    $S \leftarrow temp.next$
    free($temp$)
    return d
end function

function TOP($*S$)
    return $S.data$
end function

function ISMEMBER($*S, d$)
    $temp \leftarrow S$
    while $\neg$ISEMPTY($temp$) **do**
        if $temp.data = d$ **then**
            return 1
        end if
        $temp \leftarrow temp.next$
    end while
    return 0
end function

procedure CLEAR($*S$)
    while $\neg$ISEMPTY(S) **do**
        POP(S)
    end while
end procedure

[10] *ADT = Abstract Data Type* = apstraktni tip podataka, EN; *stack* = kamara, stog, gomila, EN

40. *Dati implementaciju procedura za ADT STACK iz zadatka 39 u programskom jeziku C. Napraviti fajlove stack.h i stack.c koji će sadržati interfejs i implementaciju procedura.*

Stek je pokazivač (*pointer, EN*) na čvor. Prazan stek je NULL pointer. U procedurama i funkcijama prenosimo pokazivač na stek kao parametar S. Ako sadržaj steka treba da se menja (u procedurama MAKENULL, PUSH, POP, CLEAR), šaljemo adresu pokazivača na stek kao parametar $(*S)$.

Data sadržaj elemenata steka je u programu stavljen da je char zbog upotrebe u sledećem zadatku. U tom slučaju poređenje na jednakost u funkciji ISMEMBER je moglo da se uradi komandom operatorom "==". Ipak, zbog opštosti, u programu je stavljena funkcija memcmp iz string biblioteke, tako da je sad lako moguće kao data sadržaj elemenata steka staviti i druge tipove.

stack.h

```
typedef char listdata;
typedef struct _node node;
typedef node *stack;

void makenull(stack *);
int isempty(stack);
int push(stack *, listdata);
listdata pop(stack *);
listdata top(stack);
void clear(stack *);
int ismember(stack, listdata *);
void printstack(stack);
```

stack.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "stack.h"

struct _node
{
    listdata data;
    node *next;
};

int isequal(listdata * lhs, listdata * rhs)
{
    return !memcmp(lhs, rhs, sizeof(listdata));
}

void makenull(stack *S)
{
    *S = NULL;
}

int isempty(stack S)
{
    return (int) (S==NULL);
}

int push(stack *S, listdata d)
{
    node *S_new = malloc(sizeof(node));

    if(!S_new)
        return 1;

    S_new -> data = d;
    S_new -> next = *S;
    *S = S_new;
    return 0;
}

listdata pop(stack *S)
{
    node *S_temp = *S;
    listdata d = S_temp -> data;
    *S = S_temp -> next;
    free(S_temp);
    return d;
}

listdata top(stack S)
{
    listdata d = S -> data;
    return d;
}

void clear(stack *S)
{
    while(!isempty(*S)) pop(S);
}

int ismember(stack S, listdata *chp)
{
    while(S)
    {
        if(isequal(&(S->data),chp))
            return 1;
        S = S -> next;
    }
    return 0;
}

void printstack(stack S)
{
    while(S)
    {
        printf("%c\n",S->data);
        S = S -> next;
    }
}
```

41. *Napisati program u programskom jeziku C koji koristeći ADT stack iz zadatka 40: pravi stek, u njega ubacuje redom elemente 'A', 'B', 'C', zatim skida i ispisuje elemente steka.*

mali_stek.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "stack.h"

int main(void)
{
    stack S;

    makenull(&S);

    push(&S,'A');
    push(&S,'B');
    push(&S,'C');

    while(!isempty(S))
        printf("%c\n",pop(&S));

    return 0;
}
```

42. *Napisati program u programskom jeziku C koji koristeći ADT stack učitava tekst iz fajla* `ulaz.txt` *i ispisuje u fajl* `izlaz.txt` *reč po reč unazad. Reči su nizovi karaktera odvojeni simbolima: space, tab, newline.*

unazad.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "stack.h"

int main(void)
{
    FILE *ulaz, *izlaz;
    stack S;
    listdata ch;

    makenull(&S);
    ulaz = fopen("ulaz.txt", "r");
    izlaz = fopen("izlaz.txt", "w");

    while((ch=fgetc(ulaz)) != EOF){
        if((ch==' ')||(ch=='\t')||(ch=='\n')){
            while(!isempty(S))
                fprintf(izlaz,"%c",pop(&S));
            fprintf(izlaz,"%c",ch);
        }
        else
            push(&S,ch);
    }
    while(!isempty(S))
        fprintf(izlaz,"%c",pop(&S));
    fclose(izlaz);
    fclose(ulaz);

    return 0;
}
```

43. *Napisati algoritam za proveru ispravnosti postavljenih zagrada u fajlu. Koristiti stek kao strukturu podataka za čuvanje otvorenih zagrada.*

```
function ZAGRADE(ime_ulaza)
    ▷ Proverava ispravnost postavljenih zagrada. Vraća retcode :
    ▷ = 0 - zagrade ispravno postavljene
    ▷ = 1 - otvorena ch1 do kraja nije zatvorena
    ▷ = 2 - zatvorena ch1 prethodno nije otvorena
    ▷ = 3,4,5 - zatvorena ch neuparena sa otvorenom ch1 = (,[,{
    ulaz =open(ime_ulaza); MAKENULL(S); retcode ← 0
    while ¬eof(ulaz) do
        ch ← fgetc(ulaz)
        if (ch =' (')|(ch =' [')|(ch =' {') then
            PUSH(S,ch)
        else if (ch =')')|(ch =']')|(ch =}') then
            if ISEMPTY(S) then
                retcode ← 2; ch1 ← ch
                break
            else
                ch1 ← POP(S)
                if (ch =')')&(ch1 ≠' (') then
                    retcode ← 3
                    break
                else if (ch =']')&(ch1 ≠' [') then
                    retcode ← 4
                    break
                else if (ch =}')&(ch1 ≠' {') then
                    retcode ← 5
                    break
                end if
            end if
        end if
    end while
    if ¬retcode then
        if ISEMPTY(S) then
            retcode ← 0; ch1 ← \0
        else
            retcode ← 1; ch1 ←TOP(S); CLEAR(S)
        end if
    end if
    fclose(ulaz)
    return retcode,ch1
end function
```

44. *Dati implementaciju programa za proveru postavljenih zagrada u programskom jeziku C, koristeći ADT Stack.*

zagrade.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "stack.h"

int main(void)
{
    FILE *ulaz;
    stack S = NULL;
    int retcode = 0;
    listdata ch, ch1;

    makenull(&S);
    ulaz = fopen("ulaz.txt", "r");
    if (ulaz == NULL){
        retcode = 6;
    }
    while( !retcode && !feof(ulaz) ){
        ch = fgetc(ulaz);

        if((ch=='(')||(ch=='[')||(ch=='{')){
            if(push(&S,ch))
                retcode = 7;
        }
        else if((ch==')')||(ch==']')||(ch == '}')){
            if(isempty(S)){
                retcode = 2;
            }
            else{
                ch1 = pop(&S);
                if((ch==')')&&(ch1!='(')){
                    retcode = 3;
                }
                else if((ch==']')&&(ch1!='[')){
                    retcode = 4;
                }
                else if((ch=='}')&&(ch1!='{')){
                    retcode = 5;
                }
            }
        }
    }
    fclose(ulaz);
    if(!retcode){
        if(isempty(S)){
            retcode = 0;
        }
        else{
            retcode = 1;
            ch1 = top(S);
        }
    }
    clear(&S);

    switch(retcode){
        case 0:
            printf("\nZagrade su dobro postavljene!\n");
            break;
        case 1:
            printf("\nOtvorena je zagrada %c koja do kraja fajla nije zatvorena!\n",ch1);
            break;
        case 2:
            printf("\nZatvorena je zagrada %c koja pre toga nije otvorena!\n",ch);
            break;
        case 6:
            printf("\nNe moze da se otvori fajl ulaz.txt!\n");
            break;
        case 7:
            printf("\nNema dovoljno memorije!\n");
            break;
        default:
            printf("\nZagrade nisu dobro postavljene:\n");
            printf("otvorena zagrada %c je uparena sa zatvorenom zagradom %c!\n",ch1,ch);
            break;
    }

    return retcode;
}
```

45. *Dati implementaciju ADT Stack u programskom jeziku C pomoću niza.*

Zbog kompatibilnosti interfejsa sa rešenjem ADT Stek preko povezanih lista zadržali smo isti heder fajl, tako da u istim situacijama prenosimo pokazivač na poslednji ubačen čvor kao parametar S, odnosno adresu tog pokazivača kao parametar $(*S)$.

Tako je stack pokazivač na strukturu koja se iz razloga kompatibilnosti zove node u kojoj se pamte elementi steka i dužina steka. Dužina je u polju count i ona je faktički za jedan manja od stvarne dužine steka. U polju node pamtimo niz data maksimalne dužine MAXS u koji smeštamo elemente steka.

Inicijalizacija steka (makenull) se vrši alokacijom memorije za node i potom alokacijom memorije za data sadržaj steka. Na ovaj način je teoretski moguće povećati kapacitet steka realokacijom memorije.

stack.h

```
typedef char listdata;
typedef struct _node node;
typedef node *stack;

void makenull(stack *);
int isempty(stack);
int push(stack *, listdata);
listdata pop(stack *);
listdata top(stack);
void clear(stack *);
int ismember(stack, listdata *);
void printstack(stack);
```

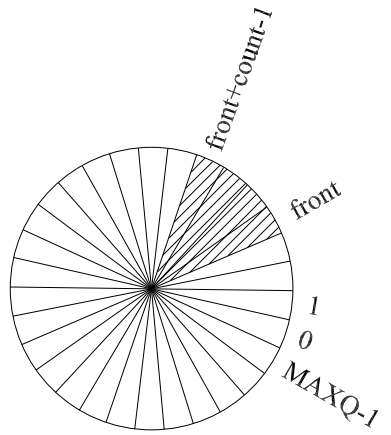
stack.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "stack.h"
#define MAXS 1000

struct _node
{
    listdata *data;
    int count;
};

int isequal(listdata * lhs, listdata * rhs)
{
    return !memcmp(lhs, rhs, sizeof(listdata));
}

void makenull(stack *S)
{
    (*S)=malloc(sizeof(node));
    (*S)->data=malloc(sizeof(listdata)*MAXS);
    (*S)->count = -1;
}

int isempty(stack S)
{
    return (int) (S->count==-1);
}

int push(stack *S, listdata d)
{
    if((*S)->count+1>=MAXS)
        return 1;
    (*S)->data[(*S)->count+1] = d;
    (*S)->count = (*S)->count + 1;
    return 0;
}

listdata pop(stack *S)
{
    listdata d = (*S)->data[(*S)->count];
    (*S)->count = (*S)->count - 1;
    return d;
}

listdata top(stack S)
{
    listdata d = S->data[S->count];
    return d;
}

void clear(stack *S)
{
    free((*S)->data);
    free(*S);
}

int ismember(stack S, listdata *ch)
{
    int i;
    for(i=S->count;i>=0;i--)
    {
        if(isequal(&(S->data[i]),ch))
            return 1;
    }
    return 0;
}

void printstack(stack S)
{
    int i;
    for(i=S->count;i>=0;i--)
    {
        printf("%c\n",S->data[i]);
    }
    printf("\n");
}
```

46. *Napisati algoritme za implementaciju ADT Queue*[11]*, pomoću niza (array).*

Elemente reda ćemo smestiti u niz susednih memorijskih lokacija, tzv. array[12]. Ovaj ADT treba da omogući dodavanje elemenata na početak reda i skidanje sa kraja. Pošto se to može naizmenično dešavati, početak i kraj reda se mogu pomeriti prema kraju niza.

Da izbegnemo pomeranje elemenata u memoriji, omogućavamo "premotavanje" elemenata u kružnoj strukturi, kao na slici:



Treba paziti da kad kraj reda pređe preko MAXQ = maksimalnog rezervisanog broja elemenata niza, da se za kraj reda uzme ostatak pri deljenju sa MAXQ.

Red je pun kad je kraj za jedan manji od početka. Pošto je to takođe stanje praznog reda, odlučujemo da umesto reprezentacije početni - krajnji (front - rear) element, koristimo reprezentaciju početni - broj (front - count), gde se krajnji element nalazi na rednom broju (front + count) % MAXQ.

```
struct _queue {
    listdata data[MAXQ];
    int front;
    int count;
};
```

Pakujemo u strukturu queue:
- data, niz od MAXQ elemenata,
- front, redni broj početnog elementa
- count, broj elemenata.

U pseudo kodu numeracija elemenata niza kreće od 1, ovde ćemo, radi lakše implementacije u C-u, numerisati od 0.

procedure MAKENULLQ($*Q$)
  $Q.front \leftarrow 0$
  $Q.count \leftarrow 0$
end procedure

function ISEMPTYQ(Q)
  return $\neg Q.count$
end function

procedure ENQUEUE(Q,d)
  $rear \leftarrow (Q.front + Q.count)\%MAXQ$
  $Q.data[rear] \leftarrow d$
  $Q.count \leftarrow Q.count + 1$
end procedure

function DEQUEUE(Q)
  $d \leftarrow Q.data[Q.front]$
  $Q.front \leftarrow (Q.front + 1)\%MAXQ$
  $Q.count \leftarrow Q.count - 1$
  return d
end function

function FRONT($*Q$)
  return $Q.data[Q.front]$
end function

function ISMEMBERQ($*Q,d$)
  for $i \leftarrow front$ **to** $front + count - 1$ **do**
    if $Q.data[i\%MAXQ] = d$ **then**
      return 1
    end if
  end for
  return 0
end function

procedure CLEARQ($*Q$)
  free(Q)
end procedure

[11] *queue* = red, EN
[12] *array* = poredak, red, EN

47. *Dati implementaciju ADT Queue u programskom jeziku C pomoću niza.*

queue.h

```
typedef char listdata;
typedef struct _node node;
typedef struct _queue *queue;

void makenullQ(queue *);
int isemptyQ(queue);
int enqueue(queue, listdata);
listdata dequeue(queue);
listdata front(queue);
void clearQ(queue);
int ismemberQ(queue, listdata *);
void printqueue(queue);
```

queue.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "queue.h"
#define MAXQ 1000

struct _queue
{
    listdata *data;
    int front;
    int count;
};

typedef struct _queue queues;

int isequal(listdata * lhs, listdata * rhs)
{
    return !memcmp(lhs, rhs, sizeof(listdata));
}

void makenullQ(queue *Q)
{
    (*Q) = malloc(sizeof(queues));
    (*Q)->data = malloc(sizeof(listdata)*MAXQ);
    (*Q)->front = 0;
    (*Q)->count = 0;
}

int isemptyQ(queue Q)
{
    return !(Q->count);
}

int enqueue(queue Q, listdata d)
{
    if(Q->count+1==MAXQ){
        return 1;
    }
    Q->data[(Q->front+Q->count)%MAXQ] = d;
    Q->count++;
    return 0;
}

listdata dequeue(queue Q)
{
    listdata d = Q->data[Q->front];
    Q->front = (Q->front+1) % MAXQ;
    Q->count--;
    return d;
}

listdata front(queue Q)
{
    listdata d = Q->data[Q->front];
    return d;
}

void clearQ(queue Q)
{
    free(Q->data);
    free(Q);
}

int ismemberQ(queue Q, listdata *chp)
{
    int i;
    for(i=0;i<Q->count;i++)
        if(isequal(
            &(Q->data[(Q->front+i)%MAXQ]),
                chp))
            return 1;
    return 0;
}

void printqueue(queue Q)
{
    int i;
    for(i=0;i<Q->count;i++)
        printf("%c\n",
               Q->data[(Q->front+i)%MAXQ]);
}
```

48. *Dati implementaciju ADT Queue u programskom jeziku C pomoću povezane liste.*

Za operacije potrebne za rad sa kjuom (*queue, EN*) dovoljna je jednostruko povezana lista, kao za stek. Ipak, pošto se elementi dodaju na kraj liste, pored pokazivača na prvi element liste (front) čuvamo i pokazivač na pokazivač pretposlednjeg elementa u listi (rear). Kad je kju prazan, taj pokazivač pokazuje na front pokazivač, a front pokazivač je NULL pointer.

queue.h

```
typedef char listdata;
typedef struct _node node;
typedef struct _queue *queue;

void makenullQ(queue *);
int isemptyQ(queue);
int enqueue(queue, listdata);
listdata dequeue(queue);
listdata front(queue);
void clearQ(queue);
int ismemberQ(queue, listdata *);
void printqueue(queue);
```

queue.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include "queue.h"

struct _node
{
    listdata data;
    node *next;
};

struct _queue
{
    node *front;
    node **rear;
};

typedef struct _queue queues;

int isequal(listdata * lhs, listdata * rhs)
{
    return !memcmp(lhs, rhs, sizeof(listdata));
}

void makenullQ(queue *Q)
{
    (*Q) = malloc(sizeof(queues));
    (*Q)->front = NULL;
    (*Q)->rear = &((*Q)->front);
}

int isemptyQ(queue Q)
{
    return (int) (Q->front==NULL);
}

int enqueue(queue Q, listdata d)
{
    node *N_new = malloc(sizeof(node));

    if(!N_new)
        return(1);

    N_new->data = d;
    N_new->next = NULL;
    *(Q->rear) = N_new;
    Q->rear = &(N_new->next);
    return 0;
}
listdata dequeue(queue Q)
{
    node *N_temp = Q->front;
    listdata d = N_temp->data;
    Q->front = N_temp->next;
    if(!(Q->front))
        Q->rear = &(Q->front);
    free(N_temp);
    return d;
}
listdata front(queue Q)
{
    listdata d = (Q->front)->data;
    return d;
}
void clearQ(queue Q)
{
    while(!isemptyQ(Q))
        dequeue(Q);
    free(Q);
}
int ismemberQ(queue Q, listdata *chp)
{
    node *N = Q->front;
    while(N){
        if(isequal(&(N->data),chp))
            return 1;
        N = N->next;
    }
    return 0;
}
void printqueue(queue Q)
{
    node *N = Q->front;
    while(N)
    {
        printf("%c\n",N->data);
        N = N -> next;
    }
}
```

49. *Napisati u programskom jeziku C program koji, koristeći ADT Queue, iz fajla ulaz.txt u fajl izlaz.txt prepisuje prvo pojavljivanje karaktera redom kojim se pojavljuju (ignoriše duplikate).*

main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "queue.h"

int main(void)
{
    FILE *ulaz;
    FILE *izlaz;
    queue Q;
    listdata ch;

    ulaz = fopen("ulaz.txt","r");
    izlaz = fopen("izlaz.txt","w");

    makenullQ(&Q);

    while((ch=fgetc(ulaz)) != EOF)
        if(!ismemberQ(Q,&ch))
            if(enqueue(Q,ch)){
                printf("\n Nema dovoljno memorije!\n");
                clearQ(Q);
                fclose(izlaz);
                fclose(ulaz);
                return 1;
            }

    while(!isemptyQ(Q)){
        fprintf(izlaz,"%c",dequeue(Q));
    }

    clearQ(Q);

    fclose(izlaz);
    fclose(ulaz);

    return 0;
}
```

3 Grafovi

Graf G je uređena trojka $(V(G), E(G), \psi_G)$, gde je

- $V(G)$ neprazan skup **čvorova** (*vertices*, EN),
- $E(G)$ skup **grana** (*edges*, EN), $V(G) \cap E(G) = \emptyset$,
- ψ_G **funkcija incidencije** (*incidence*, EN), koja svakoj grani pridružuje neuređen par (neobavezno različitih) čvorova.

Ako fukcija ψ_G granama pridružuje uređene parove (neobavezno različitih) čvorova, kažemo da je graf **orijentisan**, odnosno **digraf**.

Kažemo da je grana uv **incidentna** čvorovima u i v, u i v su njeni **krajevi**, a ako je graf orijentisan, onda je u **početak** i v **kraj** orijentisane grane uv.

Ako ne naglasimo, posmatramo neusmerene grafove.

Grane su **paralelne** ako su incidentne istim čvorovima.

Ako graf ima paralelnih grana kažemo da je **multigraf**.

Ako je $u = v$, grana uv je **petlja**.

Graf je **prost** ako nema paralelnih grana ni petlji.

Ako drugačije ne naglasimo, kad kažemo graf, mislimo na prost graf.

Čvorovi su **susedni** ako postoji grana kojoj su incidentni.

Susedstvo (*adjacency*, EN) čvora u je skup $\mathrm{Adj}(u)$ svih čvorova sa kojima je u susedan.

Stepen čvora $d(u)$ je broj njegovih suseda. Naravno: $\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2|V(G)|$.

Kompletan graf K_n je graf sa n čvorova čija su svaka dva čvora susedna.

Kažemo da je graf **bipartitan** ako se skup čvorova može podeliti na dve neprazne disjunktne klase tako da čvorovi u jednoj klasi nisu međusobno susedni. Ako su pritom čvorovi iz jedne klase susedni sa svim čvorovima iz druge klase, kažemo da je to **kompletan bipartitan** graf $K_{m,n}$ gde je m broj čvorova jedne, a n broj čvorova druge klase.

Graf H je **podgraf** grafa G ako je $V(H) \subseteq V(G)$ i $E(H) \subseteq E(G)$. Tada je G **nadgraf** od H. Ako je, pritom, $V(H) = V(G)$, G je **pokrivajući nadgraf** (H je **pokrivajući podgraf**).

Podgraf je **indukovan** podskupom čvorova, odnosno grana, ako mu pripadaju sve odgovarajuće grane, odnosno čvorovi.

Šetnja kroz graf je konačan, neprazan niz $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_k v_k$ u kojem se smenjuju čvorovi i grane grafa G, i čvorovi v_{i-1} i v_i su krajevi grane e_i. Kažemo da ova šetnja W spaja čvorove v_0 i v_k, pišemo $v_0 \rightsquigarrow v_k$.

Staza je šetnja u kojoj se grane ne ponavljaju.

Put je staza u kojoj se čvorovi ne ponavljaju.

Dva čvora su **povezana** ako postoji put koji ih povezuje.

Povezanost čvorova je relacija ekvivalencije, klase ekvivalencije su **komponente povezanosti**. Graf je **povezan** ako ima tačno jednu komponentu povezanosti.

Ako se početni i krajnji čvor šetnje, staze, puta, poklapaju, kažemo da je **zatvorena** šetnja, staza, put. Zatvorena staza je **kontura**.

Kontura koja sadrži sve grane grafa je **Ojlerova kontura**. Graf koji ima **Ojlerovu konturu** je **Ojlerov graf**. Graf u kome postoji staza koja sadrži sve grane grafa zove se **Polu Ojlerov graf**.

Netrivijalni graf (ili multigraf) bez izolovanih čvorova je Ojlerov ako i samo ako je povezan i svaki čvor je parnog stepena.

Put koji sadrži sve čvorove grafa je **Hamiltonov put**, graf koji ima Hamiltonov put je **Polu Hamiltonov graf**. Ako graf ima zatvoreni Hamiltonov put, onda je **Hamiltonov**.

Graf sa n čvorova $(n \geq 3)$ u kome za svaka dva susedna čvora u i v važi $d_G(u) + d_G(v) \geq n$ je Hamiltonov graf.

Graf koji nema konturu je **acikličan**.

Za graf sa skupom čvorova $V(G) = \{v_1, \ldots, v_m\}$ **matrica susedstva** (*adjacency matrix*, EN) je $M_G = [m_{i,j}]$, gde je

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{ako su } v_i \text{ i } v_j \text{ susedni,} \\ 0, & \text{ako } v_i \text{ i } v_j \text{ nisu susedni.} \end{cases}$$

Lista susedstva (*adjacency list*, EN) je niz $\text{Adj}(v_i)$, $i = 1, \ldots m$ susedstava čvorova v_i.

Povezan, acikličan graf je **drvo** (*tree*, EN). Acikličan graf je **šuma** (*forest*, EN).

Svaka dva čvora drveta su povezana jedinstvenim putem.

Čvor u drvetu je **viseći** ako je njegov stepen 1. $(d_G(v_i) = 1)$

Netrivijalno drvo sadrži bar dva viseća čvora. Drvo sa m čvorova ima $m - 1$ grana.

Ako je drvo T pokrivajući podgraf grafa G, kažemo da je T **pokrivajuće drvo** grafa G.

Graf ima pokrivajuće drvo ako i samo ako je povezan.

Orijentisani grafovi

Za orijentisane grafove se analogno neorijentisanim mogu definisati **orijentisana šetnja, staza, put**, poštujući orijentaciju.

Orijentisani graf je **orijentisano drvo** ako se ignorisanjem orijentacije dobije drvo. Ako su pritom sve grane usmerene od jednog čvora, kažemo da je to **korensko drvo** i da je čvor od koga su grane orijentisane **koren**. Za orijentisanu granu (u,v) u korenskom drvetu kažemo da je čvor u **roditelj (ili otac)** *(parent, EN)* a v je **dete** *(child, EN)*. Korensko drvo u kome svaki čvor ima najviše dva deteta zovemo **binarno drvo**.

Čvorovi u i v su **jako povezani** ako postoje putevi koji spajaju $u \rightsquigarrow v$ i $v \rightsquigarrow u$. Jaka povezanost je relacija ekvivalencije. Njene klase ekvivalencije zovemo **komponente jake**

povezanosti. Jaka povezanost indukuje **graf jako povezanih komponenti**: čvorovi su komponente, grane između komponenti postoje ako postoji grana između elemenata.

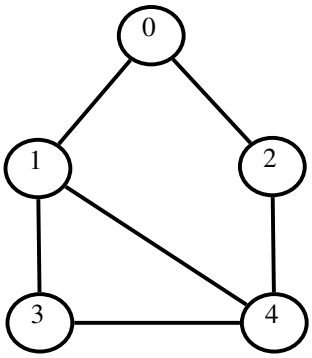
Orijentisani graf je **jako povezan** ako ima tačno jednu komponentu.

Orijentisani aciklični graf (*DAG = Directed Acyclic Graph*, EN) se može **topološki sortirati**, odnosno: čvorovi grafa se mogu poređati u niz tako da ako postoji grana (u,v), onda, u nizu, u prethodi v.

Strukture podataka za grafove

Matrica susedstva

Graf se u memoriju kompjutera može smestiti u matricu susedstva koja sadrži nule i jedinice. Za prost graf to je simetrična matrica sa nulama na glavnoj dijagonali, pa se radi uštede memorije može koristiti samo gornji trougao. Ako se za graf žele u memoriji smestiti težine grana, može se koristiti matrica koja na mestu (i,j) ima težinu grane između čvorova v_i i v_j, a ako ne postoji grana: specijalni džoker simbol čija vrednost nije dopustiva za težinu grane.



Graf

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrica susedstva

u	Adj(u)
0	1, 2
1	0, 3, 4
2	0, 4
3	1, 4
4	1, 2, 3

Lista susedstva

Lista susedstva

Susedstvo Adj(u) čvora u se može čuvati u povezanoj listi. Ako želimo sačuvati redosled dodavanja čvorova u graf u povezanoj listi susedstva, koristićemo tehnologiju dodavanja elemenata u queue: proceduru `enqueue` iz zadatka 48.

Lista susedstva se za graf najčešće pamti ne kao lista listi, već kao **niz** pokazivača na povezane liste suseda za svaki čvor. Na taj način se može brzo doći do svih suseda nekog čvora.

Binarna drva

Binarno drvo u memoriji računara možemo čuvati kao nizove *LC* i *RC* adresa levog i desnog deteta svakog čvora (*LC* = left child, *RC*= right child, EN). Koristi se poseban NULL simbol ako neki čvor nema levo odnosno desno dete. Pored toga, posebno se čuva adresa korena i niz *K* ključeva *(keys, EN)*, sa adresama informacionog sadržaja svakog čvora.

50. *U programskom jeziku C napisati proceduru koja koristeći sledeći tip podataka za graf*

```
typedef struct _node gnode;
typedef gnode *grana;
typedef int nextnode;

struct _node
{
    nextnode data;
    gnode *next;
};
```

- *dodaje granu na kraj liste susedstva:* enqueue_list,
- *oduzima prvu granu iz liste susedstva:* dequeue_list,
- *oslobađa dinamički alociranu memoriju jedne liste susedstva:* clear_list,
- *oslobađa dinamički alociranu memoriju grafa:* clear_graf,
- *štampa tabelu liste susedstva:* print_graf,
- *štampa matricu susedstva:* print_graf_matrix.

```
void enqueue_list(grana **grana_tail_p, nextnode d) {
    grana grana_new = malloc(sizeof(grana));

    grana_new -> data = d;
    grana_new -> next = NULL;
    **grana_tail_p = grana_new;
    *grana_tail_p = &(grana_new->next);
}

nextnode dequeue_list(grana *grana_head)
{
    grana grana_temp = *grana_head;
    nextnode d=-1;
```

```
    if(grana_head)
    {
        d = grana_temp -> data;
        *grana_head = grana_temp -> next;
        free(grana_temp);
    }
    return d;
}

void clear_list(grana *adjp)
{
    while(*adjp)
        dequeue_list(adjp);
}

void clear_graph(grana graf[])
{
    int i;
    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        clear_list(&(graf[i]));
    }
}

void print_graph(grana G[],int n)
{
    int i;
    grana gr;
    printf("\nCvor | Adj(Cvor):");
    printf("\n-----+-----------------------------------------------------\n");
    for(i=0;i<n;i++){
        printf("%4d |",i);
        gr = G[i];
        while(gr){
            printf(" %2d,",gr->data);
            gr = gr->next;
        }
        printf("\n");
    }
    printf("-----+-----------------------------------------------------\n");
}

void print_graph_matrix(unsigned char M[],int n)
{
    int i,j;
```

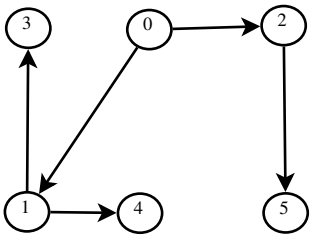
```
    printf("\n   |");
    for(j=0;j<n;j++)
        printf("%2d ",j);
    printf("\n");
    printf("---+");
    for(j=0;j<n;j++)
        printf("---");
    printf("\n");
    for(i=0;i<n;i++){
        printf("%2d |",i);
        for(j=0;j<n;j++){
            printf(" %1d ",M[i*n+j]);
        }
        printf("\n");
    }
}
```

51. *U programskom jeziku C napisati proceduru koja transponuje graf koristeći proceduru* enqueue_list *iz zadatka 50.*

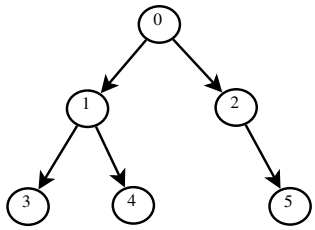
```
void transpose_graph(grana G[], int n, grana GT[])
{
    int i,j;
    grana gr;
    grana *rear[max_cvorova];

    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        GT[i] = NULL;
        rear[i] = &(GT[i]);
    }

    for(i=0;i<n;i++){
        gr = G[i];
        while(gr){
            j = gr->data;
            enqueue_list(&(rear[j]),i);
            gr = gr->next;
        }
    }
}
```

52. *Koristeći procedure iz zadatka 50 i 51 u programskom jeziku C napisati glavni program koji ubacuje graf sa slike u memoriju, štampa listu susedstva, transponuje graf, oslobađa memo-*

riju originalnog grafa, štampa listu susedstva transponovanog grafa i oslobađa memoriju transponovanog grafa.



Graf



Isti graf kao korensko drvo

u	Adj(u)
0	1, 2
1	3, 4
2	5

Lista susedstva

```
int main(void)
{
    grana G[max_cvorova],GT[max_cvorova];
    int i,n;
    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        G[i] = NULL;
    }
    grana *rear[max_cvorova];

    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        rear[i] = &(G[i]);
    }
    enqueue_list(&rear[0],1); enqueue_list(&rear[0],2);
    enqueue_list(&rear[1],3); enqueue_list(&rear[1],4);
    enqueue_list(&rear[2],5); n = 6;
    print_graph(G,n);
    transpose_graph(G, n, GT);
    clear_graph(G);
    print_graph(GT,n);
    clear_graph(GT,n);
    return 0;
}
```

53. *Napisati u programskom jeziku C proceduru* adjlist2adjmatrix *koja zapis grafa datog u listi susedstva (Adjacency list) pretvara u zapis matrice susedstva (Adjacency matrix). U matrici susedstva koja je formata $|V| \times |V|$ stavljamo 1 u u-toj vrsti i v-koloni ako postoji grana koja spaja čvorove u i v, inače 0. Napisati i proceduru* adjmatrix2adjlist *koja sa istim ulaznim parametrima radi obrnuto. Dati glavni program koji će testirati rešenje na grafu sa slike na strani 32.*

Zadate procedure se mogu pozvati radi testiranja iz programa kao što je ovaj:

```
int main(void) {
    grana G[max_cvorova];
    grana *rear[max_cvorova];
    int n;
    nextnode u;
    unsigned char M[max_cvorova*max_cvorova];
    for(u=0;u<max_cvorova;u++){
        G[u] = NULL;
        rear[u] = &(G[u]);
    }
```

```
enqueue_list(&rear[0],1);
enqueue_list(&rear[0],2);
enqueue_list(&rear[1],0);
enqueue_list(&rear[1],3);
enqueue_list(&rear[1],4);
enqueue_list(&rear[2],0);
enqueue_list(&rear[2],4);
enqueue_list(&rear[3],1);
enqueue_list(&rear[3],4);
enqueue_list(&rear[4],1);
enqueue_list(&rear[4],2);
```

```
    enqueue_list(&rear[4],3);
    n = 5; // broj cvorova

    print_graph(G,n);
    adjlist2adjmatrix(G,n,M);
    print_graph_matrix(M,n);
    clear_graph(G);
    adjmatrix2adjlist(G,n,M);
    print_graph(G,n);
    return 0;
}
```

Graf se smešta u niz povezanih listi, matricu smo, na uobičajeni način, smestili po vrstama u niz M veličine max_cvorova $\times$ max_cvorova.

```
void adjlist2adjmatrix(grana G[], int n,
    unsigned char M[])
{
    int i;
    grana gr;
    for(i=0;i<n*n;i++) M[i] = 0;
    for(i=0;i<n;i++){
        gr = G[i];
        while(gr){
            M[i*n+gr->data] = 1;
            gr = gr->next;
        }
    }
}
```

```
void adjmatrix2adjlist(grana G[], int n,
    unsigned char M[])
{
    int i,j;
    grana *grp;

    for(i=0;i<n;i++)
    {
        grp = &(G[i]);
        for(j=0;j<n;j++)
            if(M[i*n+j])
                enqueue_list(&grp,j,0);
    }
}
```

Kada se pozove dati program, njegov izlaz će biti:

```
Cvor | Adj(Cvor):
-----+-----------------------------------------------------
   0 |  1,  2,
   1 |  0,  3,  4,
   2 |  0,  4,
   3 |  1,  4,
   4 |  1,  2,  3,
-----+-----------------------------------------------------

   | 0  1  2  3  4
---+--------------
 0 | 0  1  1  0  0
 1 | 1  0  0  1  1
 2 | 1  0  0  0  1
 3 | 0  1  0  0  1
 4 | 0  1  1  1  0

Cvor | Adj(Cvor):
-----+-----------------------------------------------------
   0 |  1,  2,
   1 |  0,  3,  4,
   2 |  0,  4,
   3 |  1,  4,
   4 |  1,  2,  3,
-----+-----------------------------------------------------

Process returned 0 (0x0)   execution time : 0.016 s
Press any key to continue.
```

54. *Za graf sa V čvorova i E grana analizirati asimptotsku složenost procedura* adjlist2adjmatrix *i* adjmatrix2adjlist *iz zadatka 53.*

Slično kao u zadatku 61, dobijamo:
za adjlist2adjmatrix: $T_1(E,V) = \Theta(V^2)$,
za adjmatrix2adjlist: $T_2(E,V) = \Theta(V^2)$.

55. *Dati algoritam za pretraživanje grafa uskladištenog u listi susedstva (adjacency[13] list) "u širinu" (breadth[14] first search = BFS).*

- BFS polazi od izvora: čvor s i prolazi kroz sve čvorove koji su povezani sa s.
- BFS nalazi d, (najkraću) udaljenost od s za svaki čvor, $d = \infty$ ako nije povezan.
- BFS nalazi π, prethodnika u najkraćem putu, dajući "breadth first tree".
- BFS koristi atribut boja (color) $\in$ { WHITE, GRAY, BLACK } za svaki čvor.
- BFS redom otkriva sve čvorove koji su od s udaljeni za k, a potom za $k+1$.

```
function BFS(G,s)
    ▷ Pretražuje graf G "u širinu" (breadth first)
    ▷ U nizu d vraća izračunatu udaljenost od čvora s
    ▷ U nizu π vraća prethodnika za čvor
    for each u ∈ V[G]\{s} do
        d[u] ← ∞
        π[u] ← NULL
        color[u] ← WHITE
    end for
    MAKENULLQ(Q)
    d[s] ← 0
    π[s] ← NULL
    color[s] ← GRAY
    ENQUEUE(Q,s)
    while ¬ISEMPTYQ(Q) do
        u ← DEQUEUE(Q)
        for each v ∈ Adj(u) do
            if color[v] = WHITE then
                color[v] ← GRAY
                d[v] ← d[u] + 1
                π[v] ← u
                ENQUEUE(Q,v)
            end if
        end for
        color[u] ← BLACK
    end while
    return d,π
end function
```

[13] *adjacency* = susedstvo, EN
[14] *breadth* = širina, EN

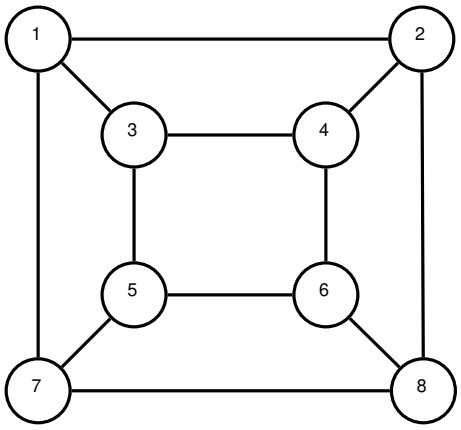
56. *Dati implementaciju u programskom jeziku C procedure* BFS *iz zadatka 55.*

```c
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "queue.h"
#define max_cvorova 50

typedef int cvor;
typedef struct _node gnode;
typedef gnode *grana;

struct _node
{
    cvor data;
    gnode *next;
};

int main(void)
{
    grana G[max_cvorova];
    int p[max_cvorova];
    int i,n,retcode;

    n = ucitaj_graf(G);
    print_graph(G,n);

    bfs(G, n, 1, d, p);
    path(p, 1, 7);
    printf("\n\n");
    for(i=0;i<n;i++){
        printf("d[%2d] = %2d, p[%2d] = %2d\n",
            i,d[i],i,p[i]);
    }

    clear_graph(G);
    return 0;
}
```

```c
int bfs(grana G[],int n,int s,int d[],int p[])
{
    grana gr;
    queue Q;
    int i,color[max_cvorova];
    cvor u,v;

    for(i=0;i<n;i++){
        d[i] = INT_MAX;          //infinity
        p[i] = -1;               //no predecessor
        color[i] = 0;            //WHITE
    }
    makenullQ(&Q);
    d[s] = 0;
    p[s] = -1;
    color[s] = 1;                //GRAY
    enqueue(Q,s);
    while(!isemptyQ(Q)){
        u = dequeue(Q);
        gr = G[u];
        while(gr){
            v = gr->data;
            if(!color[v]){
                color[v] = 1;    //GRAY
                d[v] = d[u] + 1;
                p[v] = u;
                enqueue(Q,v);
            }
            gr = gr->next;
        }
        color[u] = 2;            //BLACK
    }
    clearQ(Q);
    return 0;
}
```

57. *Za graf sa slike dole napisati reprezentaciju listama susedstva, držati se leksikografskog redosleda.*

Primeniti na isti graf BFS algoritam polazeći od čvora 1, dati tabelu udaljenosti (broj koraka) od čvora 1 i dati prethodnika u najkraćoj putanji ka čvoru 1.



v	$Adj(v)$	$d(v)$	$p(v)$
1	2, 3, 7	0	-
2	1, 4, 8	1	1
3	1, 4, 5	1	1
4	2, 3, 6	2	2
5	3, 6, 7	2	3
6	4, 5, 8	3	4
7	1, 5, 8	1	1
8	2, 6, 7	2	2

58. *Napisati u programskom jeziku C proceduru* path *koja bi se u zadatku 56 pozvala posle procedure* bfs *i ispisala putanju od proizvoljnog čvora do čvora broj 1.*

```
void path(int p[], int dovde, int odavde)
{
    if(p[odavde]==-1){
        printf("\nNo path!\n");
        return;
    }

    printf("\n%2d -> ",odavde);

    while(!(p[odavde]==dovde)){
        printf("%2d -> ",p[odavde]);
        odavde = p[odavde];
    }

    printf("%2d",dovde);
}
```

```
void path1(int p[], int dovde, int odavde)
{
    if(p[odavde]==-1){
        printf("\nNo path!\n");
        return;
    }
    if(p[odavde]==dovde){
        printf("\n%2d -> %2d",dovde,odavde);
        return;
    }
    else{
        path1(p,dovde,p[odavde]);
    }

    printf(" -> %2d",odavde);
}
```

59. *Napisati u programskom jeziku C proceduru* path1 *koja bi se u zadatku 56 pozvala posle procedure* path *sa istim ulaznim parametrima i ispisala putanju od čvora broj 1 do proizvoljnog čvora. (Rešenje zadatka 58 unazad.)*

Pošto program treba da iskoristi listu prethodnika istu kao i program zadatka 58, rešenje možemo realizovati primenom steka za obrtanje redosleda ispisa, ili elegantnije, iskoristiti rekurziju. Pored rešenja zadatka 58, gore, data je realizacija rekurzijom.

60. *Napisati u Programskom jeziku C proceduru koja za graf smešten u Adjacency list vraća stepen svih čvorova i funkciju koja vraća diametar grafa. Stepen je broj suseda, diametar je najveće najkraće rastojanje između dva čvora u grafu.*

```
1  void stepen(grana G[], int n, int s[])
2  {
3      int i;
4
5      grana gr;
6
7      for(i=0;i<n;i++){
8          gr = G[i];
9          s[i] = 0;
10         while(gr){
11             (s[i])++;
12             gr = gr->next;
13         }
14     }
15
16 }
```

```
int diametar(grana G[], int n)
{
    int diam = 0;
    int d[max_cvorova], p[max_cvorova];
    int i,j;

    for(i=0;i<n;i++){
        bfs(G,n,i,d,p);
        for(j=0;j<n;j++){
            if(d[j]>diam){
                diam = d[j];
            }
        }
    }
    return diam;
}
```

61. *Ispitati asimptotski red složenosti procedure* stepen *iz zadatka 60.*

Standardno sa c_k obeležavamo vreme potrebno da se izvrši linija k. Neka graf ima n čvorova i m grana. Za neusmereni graf, kod koga se grana (i,j) smešta i u listu susedstva čvora v_i i listu susedstva čvora v_j, vreme izvršavanja procedure stepen je $T(n,m) =$

$$= c_4 + c_5 + (n+1)\cdot c_7 + n\cdot c_8 + n\cdot c_9 + \sum_{i=0}^{n-1}(|Adj(v_i)|+1)\,c_{10} + \sum_{i=0}^{n-1}|Adj(v_i)|(c_{11}+c_{12}),$$

gde je $|Adj(v_i)|$ broj suseda čvora v_i. Kako je $\sum_{i=0}^{n-1}|Adj(v_i)| = 2m$, sledi

$$T(n,m) = n(c_7+c_8+c_9+c_{10}) + 2m(c_{10}+c_{11}+c_{12}) + c_4 + c_5 + c_7 = \Theta(n+m).$$

Standardno se obeležava broj čvorova grafa V, a broj grana E, složenost algoritma stepen je $\Theta(V+E)$.

62. *Analizirati asimptotsku složenost BFS algoritma.*

Označavamo broj čvorova grafa V i broj grana grafa E.

Priprema praznih listi koje se vrše za sve čvorove traje $\Theta(V)$, priprema za petlju $\Theta(1)$.

Pozivanje operacije ENQUEUE i DEQUEUE traje $\Theta(1)$. Pošto svaki povezan čvor prođe kroz queue, ukupno se za te operacije potroši $O(V)$ vremena.

Elementi listi susedstva se u algoritmu obrade najviše jednom, kad se čvor skida sa queue. Za njihovu obradu treba $O(E)$ vremena, jer je njihov broj $\Theta(E)$.

Ukupno vreme izvršavanja BFS algoritma je $O(V+E)$.

63. *Napisati algoritam za pretraživanje grafa uskladištenog u liste susedstva "u dubinu" (depth*[15] *first search = DFS).*

- DFS prolazi kroz sve čvorove u koje nije posetio.
- DFS rekurzivno nastavlja kroz sve grane čiji su susedi v neistraženi.
- kad DFS istraži sve čvorove koji su susedi od v, backtrack[16] postupkom se vraća u čvor iz kojeg je stigao u v.
- kad DFS istraži sve grane iz polaznog čvora, nastavlja sa neistraženim čvorovima.
- kad DFS dođe od čvora u do čvora v, upisuje da je predecessor[17] od v čvor u.
- DFS koristi atribut boja (*color*) $\in$ { WHITE, GRAY, BLACK } za svaki čvor. U početku su svi WHITE. Kad se otkrije, čvor postaje GRAY, kad završi sa njim, postaje BLACK.
- DFS za svaki čvor u zapisuje *timestamps*[18] $d[u]$ i $f[u]$ $(d[u] < f[u])$ momenta kad je otkrio u (*discovery*) i kad je završio sa u (*finish*).
- Vremenske oznake timestamps su iz skupa $\{1,2,\ldots,2 \cdot |V|\}$.
- Čvor u je WHITE od momenta 1 do $d[u]$, GRAY od $d[u]$ do $f[u]$ i BLACK posle $f[u]$.
- U pseudokodu koji sledi promenljiva *time* je globalna promenljiva. Radi jednostavnosti, za DFS-VISIT globalne promenljive su i G (graf), d, f, kao i π.
- Rezultat primene algoritma zavisi od redosleda kojim su numerisani čvorovi i redosleda kojim su čvorovi uneti u Adj liste.

```
function DFS(G)
    for each u ∈ V[G] do
        color[u] ← WHITE
        π[u] ← NULL
    end for
    time ← 0
    for each u ∈ V[G] do
        if color[u] = WHITE then
            DFS-VISIT(u)
        end if
    end for
    return d, f, π
end function
```

```
procedure DFS-VISIT(u)
    color[u] ← GRAY
    time ← time + 1
    d[u] ← time
    for each v ∈ Adj(u) do
        if color[v] = WHITE then
            π[v] ← u
            DFS-VISIT(v)
        end if
    end for
    color[u] ← BLACK
    time ← time + 1
    f[u] ← time
end procedure
```

[15] *depth* = dubina, EN
[16] *backtrack* = vratiti se istim putem, EN
[17] *predecessor* = prethodnik, EN
[18] *timestamps* = vremenske oznake, EN

64. *Dati implementaciju u programskom jeziku C procedure* DFS *iz zadatka 63.*

Radi elegantnosti, modularnosti i ubrzanja rekurzije procedura DFS i DFS-VISIT se izdvajaju u poseban ulazni modul `dfs.c` čiji je heder fajl `dfs.h`. Onda je u C-u moguće realizovati globalne promenljive kao što je urađeno u pseudokodu u zadatku 63.

Pretpostavljamo da su osnovne procedure za definisanje tipa liste susedstva i osnovnih manipulacija sa grafom date u fajlovima `graf.c` i `graf.h`.

graf.h

```
typedef int nextnode;
typedef struct _node gnode;
typedef gnode *grana;

struct _node
{
    nextnode data;
    gnode *next;
};
```

dfs.h

```
void dfs(grana[],int,int[],int[],int[]);
```

U heder fajlu `dfs.h` se prikazuje samo procedura DFS, dok globalne promenljive i rekurzivna procedura DFS-VISIT ostaju lokalne za modul `dfs.c`.

Radi testiranja napisane procedure se mogu pozvati iz glavnog programa kao što sledi.

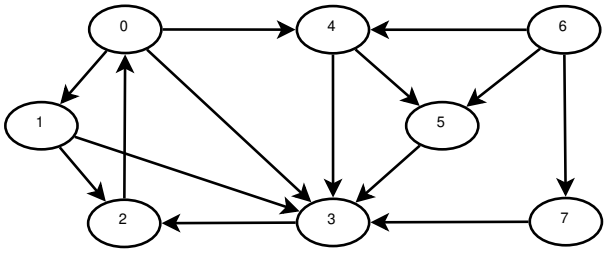
main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "graf.h"
#include "dfs.h"
#define max_cvorova 50

int main(void) {
    grana *G[max_cvorova];
    int d[max_cvorova], f[max_cvorova],
        p[max_cvorova];
    int n;
    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        G[i] = NULL;
    }
    n = ucitaj_graf(G);
    print_graph(G,n);
    dfs(G, n, d, f, p);
    printf("\n\n");
    for(i=0;i<n;i++){
        printf("d[%2d] = %2d, f[%2d] = %2d,\
p[%2d] = %2d\n",i,d[i],i,f[i],i,p[i]);
    }
    clear_graph(G);
    return 0;
}
```

dfs.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include "graf.h"
#include "dfs.h"
#define max_cvorova 50

int n;
grana *G;
int *d;
int *f;
int *p;
unsigned char color[max_cvorova];
int time;
void dfs_visit(int);

void dfs(grana G1[], int n1, int d1[],
         int f1[], int p1[])
{
    n=n1; G=G1; d=d1; f=f1; p=p1;
    int u;

    for(u=0;u<n;u++){
        color[u] = 0;        //WHITE
        p[u] = -1;           //no predecessor
    }

    time = 0;
    for(u=0;u<n;u++)
        if(!color[u])
            dfs_visit(u);
}

void dfs_visit(int u)
{
    grana gr;

    color[u] = 1;            //GRAY
    time++;
    d[u] = time;
    gr = G[u];
    while(gr){
        if(!color[gr->data]){
            p[gr->data] = u;
            dfs_visit(gr->data);
        }
        gr = gr->next;
    }
    color[u] = 2;            //BLACK
    time++;
    f[u] = time;
}
```

65. *Primeniti algoritam* DFS *na graf sa slike, uzimajući čvorove i grane leksikografski.*



U čvorove upisati d i f vrednosti.

Napraviti tabelu zagrada.

Opisati šumu ovog DFS.

Označiti tipove grana kad se prvi put otkriju.

Tipovi grana:

T - tree edge, grana drveta iz DFS šume, pronalazi novi čvor drveta,

F - forward edge, (u,v) je grana unapred ako pronalazi čvor koji već pripada drvetu, t.j. ako je v potomak od u.

B - back edge, (u,v) je grana unazad ako je u je potomak od v.

C - cross edge, poprečne grane, su sve ostale grane.

Na sledećoj slici vidimo levo: DFS šumu i desno: d i f vrednosti u čvorovima i oznaku tipa grane na samim granama.

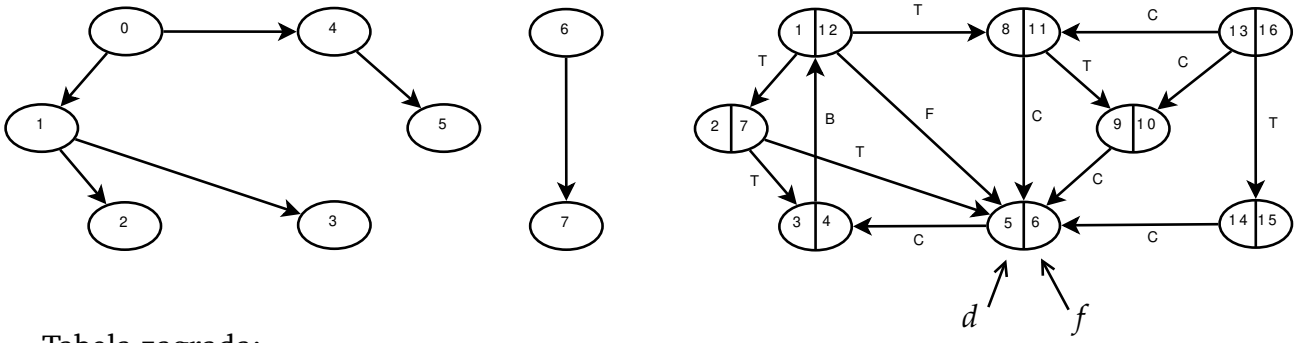


Tabela zagrada:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	(											)				
1		(					)									
2			(	)												
3					(	)										
4								(			)					
5									(	)						
6													(			)
7														(	)	

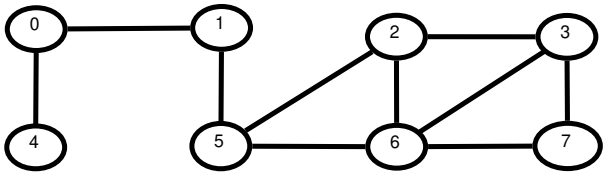
Zagrada se otvara kad se otkrije čvor, zatvara kad se završi sa čvorom.

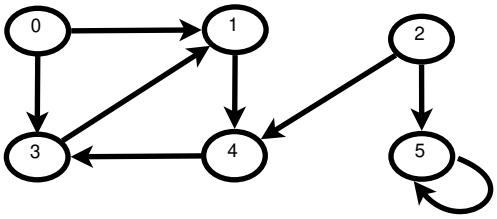
Za dva različita čvora u i v nije moguće $d(u) < d(v) < f(u) < f(v)$.

Za DFS nekog grafa čvor v je potomak čvora u ako i samo ako $d(u) < d(v) < f(v) < f(u)$.

Za DFS neusmerenog grafa grane (u,v) i (v,u) su ista grana, klasifikuje se po prvom kriterijumu koji zadovolji. Za neusmereni graf sve grane su ili tree edge ili back edge.

66. *Sve iz zadatka 65 za graf sa slike dole levo.*





67. *Sve iz zadatka 65 za graf sa slike gore desno.*

68. *Modifikovati DFS algoritam tako da za usmerene grafove za svaku granu identifikuje koji je tip.*

Vidi rešenje zadatka 74.

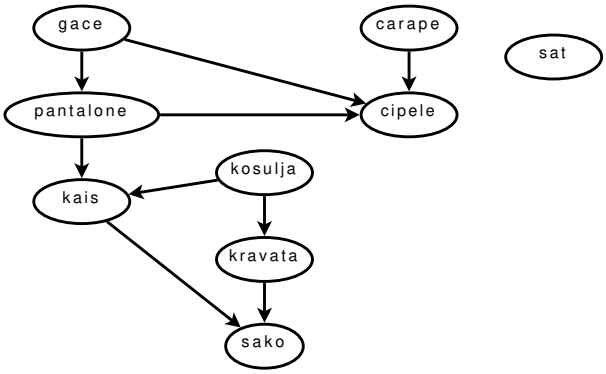
69. *Opisati potrebne modifikacije iz zadatka 68 za neusmerene grafove.*

70. *Modifikovati DFS algoritam tako da prebroji povezane komponente i da svakom čvoru pridruži redni broj povezane komponente kojoj pripada.*

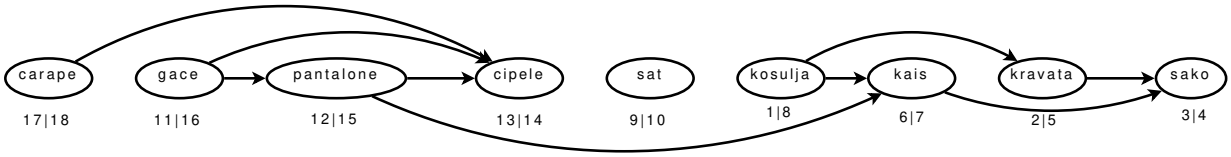
Vidi rešenje zadatka 74.

71. *Za usmereni graf važi:* graf je acikličan $\Leftrightarrow$ proizvoljna DFS šuma nema Back edges. *Dokazati.*

72. *Profesor Rasejanko je napravio graf kojim opisuje koji odevni predmet treba da se obuče pre kojeg.*
Izvršiti DFS algoritam na datom grafu i ustanoviti da je acikličan.
Uraditi topološko sortiranje datog grafa i napraviti plan kojim Profesor treba da se obuče.
Da li je rešenje jedinstveno?



Do rešenja se dolazi kad se primeni DFS algoritam na dati graf. Lako se ustanovljava da u grafu nema *back edges*, pa je acikličan. Potom se *finish* vremena čvorova $f(u)$ sortiraju opadajuće i po tom redosledu se poređaju čvorovi odevnih predmeta.
Dobije se graf kao na slici:



Druga rešenja bi se dobila da su čvorovi i susedi u listama susedstva drugačije poređani.

73. *Dokazati da postupak iz zadatka 72 daje topološko sortiranje grafa.*

74. *Modifikovati DFS algoritam tako da za acikličan graf daje listu topološki sortiranih čvorova.*

Ovde dajemo rešenja zadataka 68, 70, 74. Modifikacije su date u odgovarajućoj boji.
Osnova je algoritam DFS sa procedurom DFS-VISIT iz zadatka 63.

```
function DFS(G)
    for each (u,v) ∈ E[G] do
        type[(u,v)] ← NULL
    end for
    for each u ∈ V[G] do
        color[u] ← WHITE
        π[u] ← NULL
    end for
    time ← 0
    dag ← TRUE
    MAKENULL(S)
    ccounter ← 0
    for each u ∈ V[G] do
        if color[u] = WHITE then
            DFS-VISIT(u)
            ccounter ← ccounter + 1
        end if
    end for
    if dag then
        while ¬ISEMPTY(S) do
            WRITELN(POP(S))
        end while
    else
        CLEAR(S)
    end if
    return d, f, π, type, cc, dag
end function
```

```
procedure DFS-VISIT(u)
    color[u] ← GRAY
    cc[u] ← ccounter
    time ← time + 1
    d[u] ← time
    for each v ∈ Adj(u) do
        if type[(u,v)] = NULL then
            if color[v] = WHITE then
                type[(u,v)] ← TREE
            else if color[v] = GRAY then
                type[(u,v)] ← BACK
                dag ← FALSE
            else if color[v] = BLACK then
                if d[v] > d[u] then
                    type[(u,v)] ← FORWARD
                else
                    type[(u,v)] ← CROSS
                end if
            end if
        end if
        if color[v] = WHITE then
            π[v] ← u
            DFS-VISIT(v)
        end if
    end for
    color[u] ← BLACK
    PUSH(S,u)
    time ← time + 1
    f[u] ← time
end procedure
```

Po završetku, osim vremena otkrića d i završetka f za čvor, prethodnika π u DFS šumi, algoritam vraća i redni broj komponente kojoj čvor pripada cc, tip grane $type$ i tačno/netačno da li je graf acikličan u dag.

Topološko sortiranje se dobija ispisivanjem steka S u proceduri DFS (ako je graf acikličan).

75. *Dati asimptotsku analizu složenosti DFS algoritma.*

Kao u zadatku 62 uradićemo celokupnu analizu. Sama procedura DFS bez ulaska u DFS-VISIT se izvršava za svaki čvor jednom, stoga traje $\Theta(V)$.

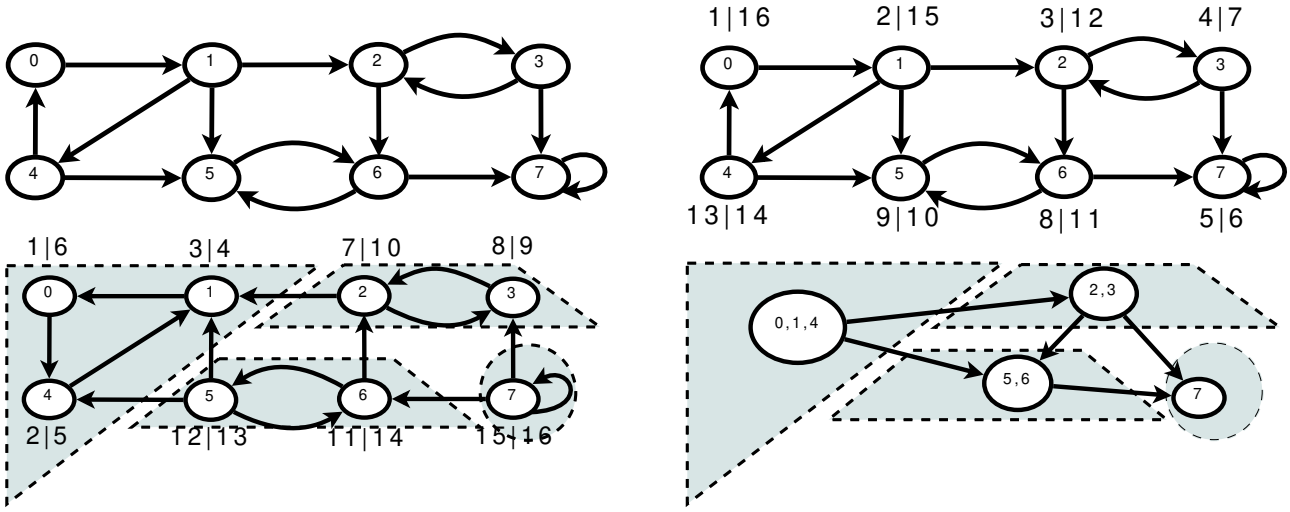
Procedura DFS-VISIT se za svaki čvor v poziva tačno jednom. Unutar nje je petlja koja se izvršava $|Adj(v)|$ puta. Kako je

$$\sum_{v \in V} |Adj(v)| = \Theta(E),$$

sledi da je ukupno vreme izvršavanja DFS algoritma $\Theta(V + E)$.

76. *Primeniti algoritam* JAKO_POVEZANE_KOMPONENTE *na graf sa slike.*

function JAKO_POVEZANE_KOMPONENTE*(G)*
call DFS (G) *da bi izračunao* finish *vremena* $f(u)$
call TRANSPOSE_GRAPH (G, G^T)
call DFS (G^T) *uzimajući čvorove u glavnoj petlji u opadajućem redosledu po* $f(u)$
komponente povezanosti postaju čvorovi G_1
grane G postaju grane G_1 *ako povezuju komponente povezanosti*
return G_1
end function



77. *Dokazati da algoritam iz zadatka 76 daje graf jako povezanih komponenti.*

78. *Dokazati da je graf jako povezanih komponenti usmereni acikličan graf (DAG).*

79. *Implementirati u programskom jeziku C algoritam za nalaženje jako povezanih komponenti.*

80. *Na grafu $G = (V, E)$ je data težinska funkcije $w : E \to \mathbb{R}$. Dati Kruskalov algoritam za nalaženje minimalnog pokrivajućeg drveta (MST = minimum spanning tree, EN).*

```
function KRUSKAL(G, w)
    A ← ∅
    for each v ∈ V[G] do
        MAKE-SET(v)              ▷ za svaki element skup koji ga sadrži
    end for
    sort(E, w)                   ▷ sortiraj grane iz E neopadajuće po w
    for each (u, v) ∈ E[G] do    ▷ redom, neopadajuće po w
        if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v) then
            A ← A ∪ {(u, v)}     ▷ dodaj granu
            UNION(u, v)          ▷ spoji skupove
        end if
    end for
    return A
end function
```

Procedura MAKE-SET(v) pravi skup koji sadrži samo element v.

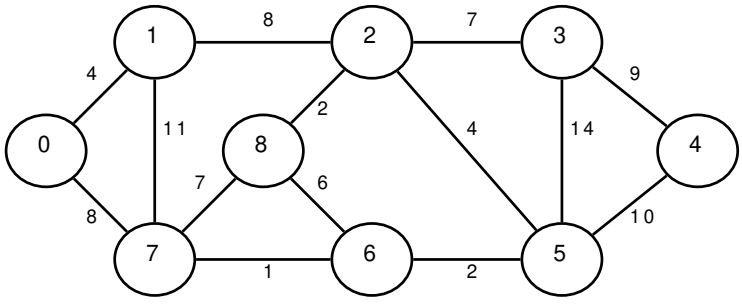
Procedura FIND-SET(v) nalazi skup u kojem je sadržan element v. Taj skup sadrži sve čvorove koji su do tad otkriveni i povezani su sa v dotad formiranim delom pokrivajućeg drveta.

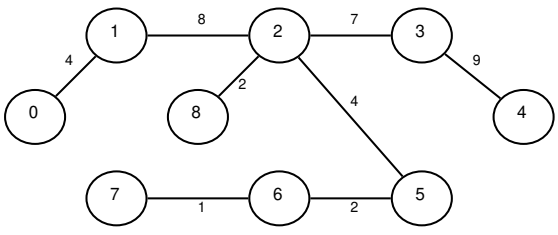
Procedura UNION(u, v) spaja skupove čvorova povezanih sa u i v, jer kad se grana (u, v) doda u pokrivajuće drvo, čvorovi iz tih skupova postaju povezani.

Kruskalov algoritam polazi od praznog skupa. U for-petlji dodaje grane sa težinama po neopadajućem redosledu na pokrivajuće drvo.

81. *Implementirati Kruskalov algoritam iz zadatka 80 u programskom jeziku C.*

82. *Primeniti Kruskalov algoritam na graf sa slike desno.*
Napisati redosled kojim su grane dodavane na pokrivajuće drvo i naći ukupnu težinu pokrivajućeg drveta.





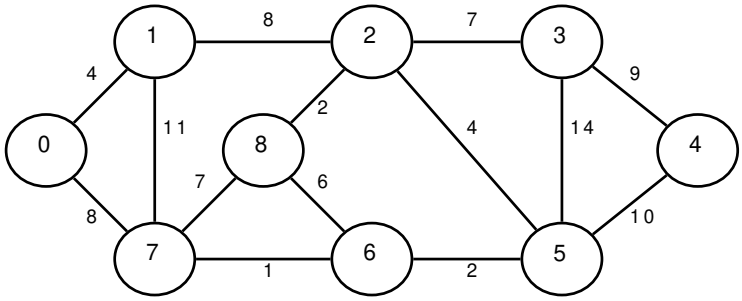
	1	2	3	4	5	6	7	8	
u	6	5	2	2	0	2	1	3	
v	7	6	8	5	1	3	2	4	$\sum$
w	1	2	2	4	4	7	8	9	37

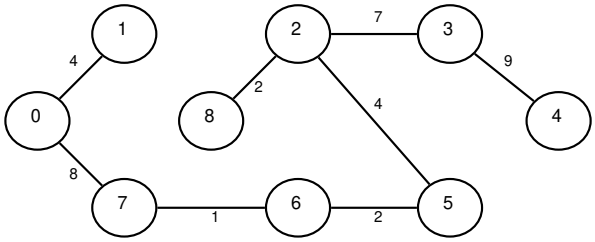
83. *Na grafu $G = (V, E)$ je data težinska funkcije $w : E \to \mathbb{R}$. Dati Primov algoritam za nalaženje minimalnog pokrivajućeg drveta.*

```
function PRIM(G, w, r)
    for each u ∈ V[G] do
        key[u] ← ∞
        π[u] ← NULL
    end for
    key[r] ← 0
    Q ← PQ_BUILD(V[G], key)          ▷ lista svih čvorova postaje priority queue
    while ¬PQ_ISEMPTY(Q) do
        u ← PQ_EXTRACT_MIN(Q, key)   ▷ isto kao DEQUEUE sa najmanjim key
        for each v ∈ Adj(u) do
            if PQ_ISMEMBER(v, Q)&(w(u, v) < key[v]) then
                π[v] ← u             ▷ ako budemo odabrali v, prethodnik je u,
                key[v] ← w(u, v)     ▷ onda će grana w(u, v) ući u MST
            end if
        end for
    end while
    A ← ∅
    for each u ∈ V[G]\{r} do
        A ← A ∪ (π[u], u)            ▷ u listi prethodnika implicitno imamo MST
    end for
    return A
end function
```

84. *Implementirati Primov algoritam iz zadatka 83 u programskom jeziku C.*

85. *Primeniti Primov algoritam sa $r = 0$ na graf sa slike desno. Napisati redosled kojim su grane dodavane na pokrivajuće drvo i naći ukupnu težinu pokrivajućeg drveta.*

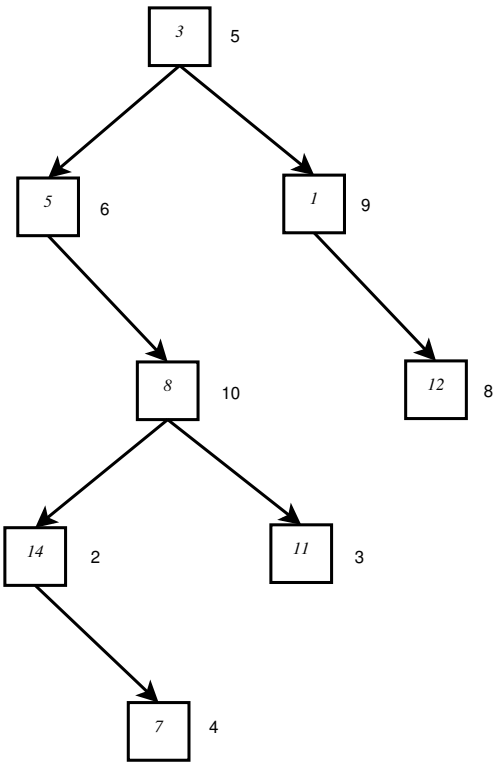




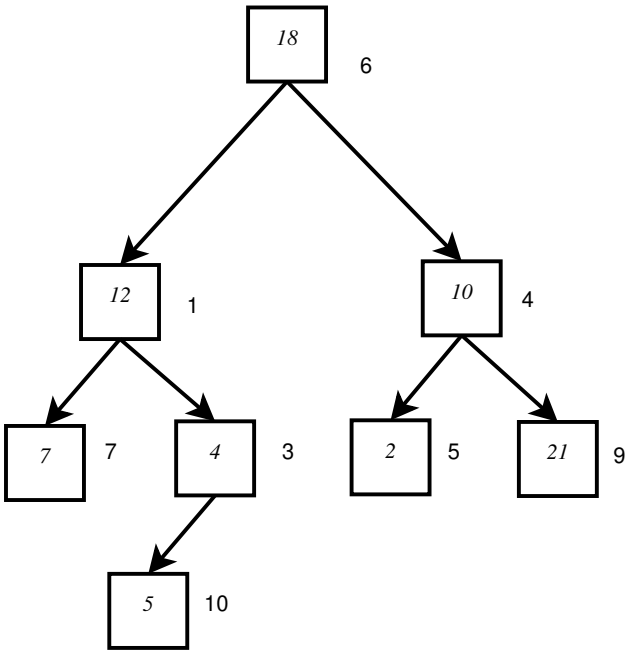
	1	2	3	4	5	6	7	8	
u	0	0	7	6	5	2	2	3	
v	1	7	6	5	2	8	3	4	$\sum$
w	4	8	1	2	4	2	7	9	37

86. *Rekonstruisati binarno drvo dato u LC-RC reprezentaciji sa korenom na adresi 5.*

I	K	LC	RC
1	9	7	-
2	14	-	4
3	11	-	-
4	7	-	-
5	3	6	9
6	5	-	10
7	4	6	1
8	12	-	-
9	1	-	8
10	8	2	3

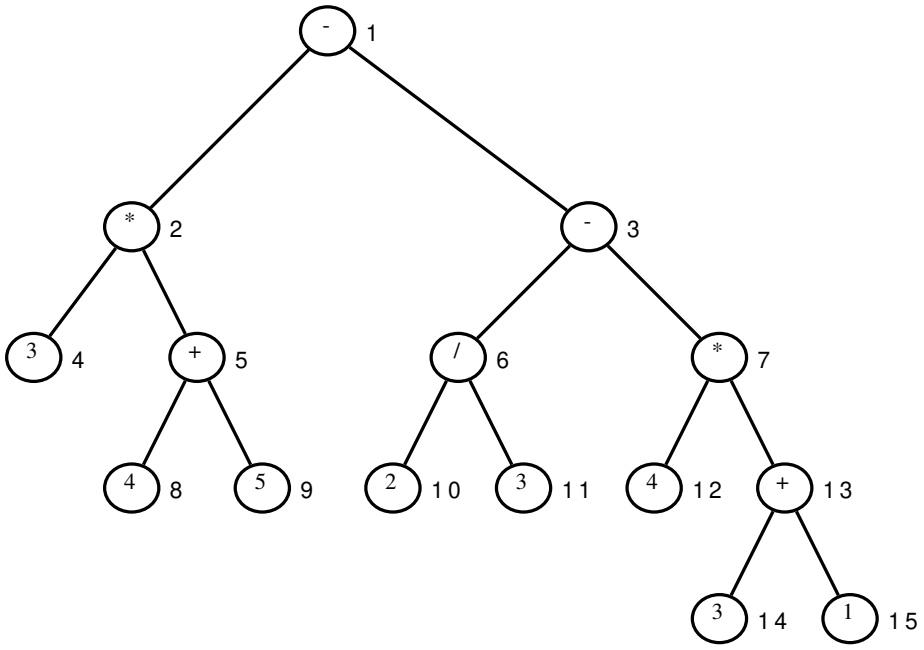


87. *Dati tabelu LC-RC reprezentacije grafa sa slike.*



I	K	LC	RC
1	12	7	3
2			
3	4	10	-
4	10	5	9
5	2	-	-
6	18	1	4
7	7	-	-
8			
9	21	-	-
10	5	-	-

88. *Nacrtati drvo terma izraza* $3 \cdot (4+5) - (2/3 - 4 \cdot (3+1))$ *i dati LC-RC reprezentaciju.*



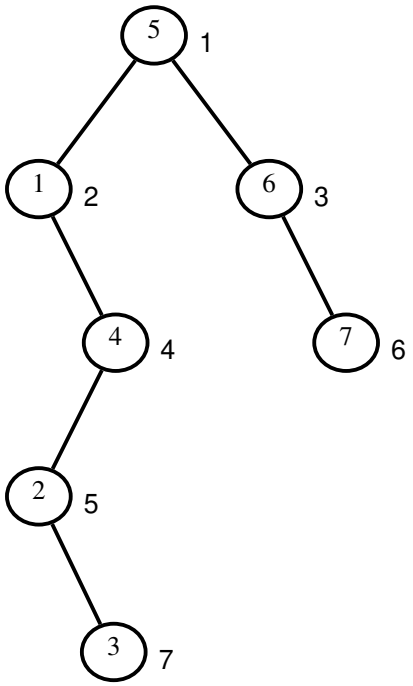
I	K	LC	RC
1	−	2	3
2	∗	4	5
3	−	6	7
4	3	−	−
5	+	8	9
6	/	10	11
7	∗	12	13
8	4	−	−
9	5	−	−
10	2	−	−
11	3	−	−
12	4	−	−
13	+	14	15
14	3	−	−
15	1	−	−

89. *Napisati rekurzivnu proceduru koja ispisuje elemente drveta iz zadatka 86 u infiksnom redosledu i rekurzivnu proceduru koja dodaje parent polje svim čvorovima drveta.*

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int key[] =  {0, 9,14,11, 7, 3, 5, 4,12, 1, 8};
int LC[] =   {0, 7,-1,-1,-1, 6,-1, 6,-1,-1, 2};
int RC[] =   {0,-1, 4,-1,-1, 9,10, 1,-1, 8, 3};
int parent[]={0,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1};

void infix_print(int root) {
    if(root>-1){
        infix_print(LC[root]);
        printf("%3d,",key[root]);
        infix_print(RC[root]);
    }
}

void find_parent(int root, int p) {
    if(root>-1){
        parent[root] = p;
        find_parent(LC[root],root);
        find_parent(RC[root],root);
    }
}

int main() {
    int i, root = 5;
    printf("Infix print: \n");
    infix_print(root);
    printf("\n");
    printf("Parent:\n");
    for(i=1;i<11;i++)
        printf("%3d,",i);
    printf("\n");
    find_parent(5,-1);
    for(i=1;i<11;i++)
        printf("%3d,", parent[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

```
Infix print:
  5, 14,  7,  8, 11,  3,  1, 12,
Parent:
  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9, 10,
 -1, 10, 10,  2, -1,  5, -1,  9,  5,  6,
```

90. *Za ulazni niz* [5,1,6,4,2,7,3] *kreirati binarno drvo tako da se element ako je manji od korena ubacuje u levo poddrvo, inače u desno poddrvo.*
Čvorove ubacivati redom kojim su dati.




```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define max 10
int ulaz[]={5,1,6,4,2,7,3};
int key[max];
int LC[max];
int RC[max];
int iskorisceno = -1;

int ubaci(int koren, int broj) {
    if(koren>-1){
        if(broj<key[koren])
            LC[koren]=ubaci(LC[koren],broj);
        else
            RC[koren]=ubaci(RC[koren],broj);
        return koren;
    }
    else{
        iskorisceno++;
        key[iskorisceno] = broj;
        LC[iskorisceno] = -1;
        RC[iskorisceno] = -1;
        return iskorisceno;
    }
}

int main() {
    int i,koren;
    koren = ubaci(-1,ulaz[0]);
    for(i=1;i<7;i++)
        koren = ubaci(koren,ulaz[i]);
    infix_print(koren);
    return 0;
}
```

91. *Napisati proceduru* `ubaci` *koja ubacuje čvorove iz niza u drvo kao u zadatku 90. Reprezentacija drveta neka bude LC-RC. Neka ih glavni program potom ispiše u infiksnom redosledu dajući sortirani niz.*

Rešenje je gore.

92. *Trener plivačke reprezentacije ima za štafetu 4X100m na raspolaganju četiri plivača čija su vremena na 100m po stilovima: slobodno, leđno, prsno, baterflaj, data u tabeli.*

	S	L	P	B
A	57	61	64	62
B	55	63	65	64
C	59	64	66	63
D	56	62	67	64

Kako da sastavi najbolju štafetu?

Ovo je problem angažovanja $n = 5$ radnika na $n = 5$ poslova, *Assignment Problem, EN*. To je specijalni slučaj transportnog problema koji je specijalni slučaj problema linearnog programiranja.

Kao problem linearnog programiranja, moguće je ovaj problem rešiti simplex metodom. Ipak, za rešavanje ćemo koristiti mađarsku metodu, *Hungarian Method, EN*.

1. korak: od elemenata matrice se oduzmu minimumi po vrstama:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 5 \\ 0 & 8 & 10 & 9 \\ 0 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 6 & 11 & 8 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

2. korak: od elemenata matrice se oduzmu minimumi po kolonama.

3. korak: nule se precrtaju minimalnim brojem k vertikalnih i horizontalnih linija:

3. $\begin{bmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} \\ 0 & 4 & 3 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4. korak: zato što je $k = 3 < n = 4$, minimalni neprecrtan broj $m = 2$ se oduzima od neprecrtanih elemenata i dodaje dvaput precrtanim elementima i vraćamo se na 3.

3'. korak: nule se sad mogu precrtati sa minimalno $k = 4$ vertikalnih i horizontalnih linija, zato prelazimo na korak 5.

5. korak: Angažovanje se vrši izborom nule koja je sama u vrsti. Ako nema, bira se nula sama u koloni. Ako ni to nema, biramo proizvoljnu nulu.

Pri svakom izboru eliminišu se preostale nule u izabranoj vrsti/koloni.

5. $\begin{bmatrix} 2 & \emptyset & \underline{\mathbf{0}} & 1 \\ \underline{\mathbf{0}} & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & \emptyset & \underline{\mathbf{0}} \\ \emptyset & \underline{\mathbf{0}} & 2 & 2 \end{bmatrix}$ Konačno: $\begin{bmatrix} 57 & 61 & \underline{\mathbf{64}} & 62 \\ \underline{\mathbf{55}} & 63 & 65 & 64 \\ 59 & 64 & 66 & \underline{\mathbf{63}} \\ 56 & \underline{\mathbf{62}} & 67 & 64 \end{bmatrix}$

Kad se izabrana angažovanja prenesu na polaznu tabelu vremena, dobija se optimalna štafeta čije "vreme" je $64 + 55 + 63 + 62 = 244$.

93. *Softuerska kompanija je zaposlila 5 pripravnika (A, B, C, D, E). Pripravnici će biti angažovani u 5 departmana kompanije (1, 2, 3, 4, 5). Da bi odredili koji pripravnik će se angažovati u kojem departmanu, uradili su test iz veština koje se koriste u odgovarajućem departmanu.*

U tabeli su dati poeni osvojeni na testu.

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
A	*121*	*160*	*130*	*115*	*124*
B	*132*	*162*	*140*	*125*	*128*
C	*118*	*150*	*142*	*122*	*120*
D	*110*	*148*	*129*	*117*	*115*
E	*130*	*155*	*135*	*120*	*118*

Naći optimalno angažovanje.

U ovom problemu optimalno angažovanje se dobija za maksimalni zbir bodova na testu. Maksimalni osvojeni broj bodova kod svih pripravnika na svim testovima je za B-2: 162.

Stoga ćemo napraviti novu tabelu u koju ćemo uneti koliko na pojedinom testu fali do maksimalnih 162. Optimalno angažovanje je, onda, rešenje minimalnog angažovanja za novu tabelu.

Rešenje dobijeno mađarskom metodom je naznačeno u matrici:

$$\begin{bmatrix} 41 & \underline{\mathbf{2}} & 32 & 47 & 38 \\ 30 & 0 & 22 & 37 & \underline{\mathbf{34}} \\ 44 & 12 & \underline{\mathbf{20}} & 40 & 42 \\ 52 & 14 & 33 & \underline{\mathbf{45}} & 47 \\ \underline{\mathbf{32}} & 7 & 27 & 42 & 44 \end{bmatrix}$$

Kada se to rešenje prenese na početnu tabelu dobija se maksimalno angažovanje: $160 + 128 + 142 + 117 + 130 = 677$.

94. *Dati matematičku formulaciju problema angažovanja radnika* $1,\ldots,n$ *na poslove* $1,\ldots,n$*, ako su u matrici* $C = [c_{i,j}]_{n\times n}$ *data vremena* $c_{i,j}$ *koja su potrebna da radnik* i *obavi posao* j*.*

Dodelićemo vrednost $x_{i,j} = 1$ ako se radnik i angažuje na posao j, $x_{i,j} = 0$ inače.

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \min$$

$$0 \le x_{i,j} \le 1,\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, x_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

95. *Neka je dat kompletan graf sa n čvorova i nad njegovim granama funkcija težina matricom* $C = [c_{i,j}]_{n\times n}$. *Težine* $c_{i,j}$ *predstavljaju dužinu ili cenu putovanja od mesta i do mesta j.*

Dati matematičku formulaciju problema trgovačkog putnika[19].

Problema trgovačkog putnika je nalaženje zatvorenog Hamiltonovog puta sa minimalnom ukupnom cenom, odnosno dužinom. Put (staza u kojoj se čvorovi ne ponavljaju) koji sadrži sve čvorove grafa je Hamiltonov put.

U kompletnom grafu nema petlji. Da bi se pojednostavio zapis problema, pretpostavljamo da je $c_{i,i} = \infty$, $i = 1,2,\ldots,n$. Na taj način smo sigurni da u optimalnom rešenju nema petlji.

Planove putovanja ćemo definisati vrednostima $x_{i,j} = 1$ ako se putuje od mesta i do j, $x_{i,j} = 0$ inače. Tražimo:

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \min$$

$$0 \le x_{i,j} \le 1,\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, x_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, i \in \{1,2,\ldots,n\},$$

uz uslov nepostojanja zatvorenog podputa.

Ako se uslov nepostojanja podkonture izostavi, dobija se problem angažovanja, koji nazivamo **relaksirani problem** koji odgovara TSP.

Dopustivo neoptimalno rešenje se dobija metodom **najbližeg suseda**: polazi se od nekog čvora i ide u najbliži neposećen čvor sve dok se ne obiđu svi čvorovi, a tad se vraća u polazni čvor.

Optimalno rešenje se može naći Branch & Bound[20] metodom:

Reši se relaksirani problem. Ako se dobije rešenje bez podputova, to je optimum.

Ako postoje podputovi vrši se **grananje** mogućnosti da pojedina grana Hamiltonovog puta pripada ili ne pripada rešenju. U svakoj grani se rešava odgovarajući problem. U početku je donja granica optimum relaksiranog problema, posle se donja granica ažurira kako se pronađe novo rešenje relaksiranog problema.

Gornja granica je u početku rešenje najbližeg suseda. Kad se u Branch & Bound drvetu pronađe sledeće dopustivo rešenje ažurira se gornja granica. Tako ažurirana **granica** se koristi da prekine traženje rešenja u nekom poddrvetu kad se dobije da je relaksirano rešenje lošije od gornje granice.

[19] *Travelling salesman problem (TSP), EN*

[20] *Grananje i ograničavanje, EN*

96. *U tabeli su date udaljenosti između 5 gradova.*

	1	*2*	*3*	*4*	*5*
1	-	*28*	*115*	*45*	*110*
2	*28*	-	*87*	*30*	*93*
3	*100*	*87*	-	*75*	*115*
4	*45*	*30*	*75*	-	*135*
5	*120*	*93*	*110*	*135*	-

(a) Definisati problem trgovačkog putnika.

(b) Polazeći od čvora 1, metodom najbližeg suseda naći približno rešenje problema trgovačkog putnika.

(c) Za isti problem naći mađarskom metodom angažovanje koje je rešenje relaksiranog problema trgovačkog putnika.

(d) Znajući rešenja (b) i (c), u kojim granicama se nalazi optimalno rešenje problema trgovačkog putnika?

(a) Polazeći od jednog grada obići sve ostale gradove tačno jednom, vratiti se u početni grad tako da ukupan pređeni put bude minimalan.

Ili: naći zatvoreni Hamiltonov put minimalne dužine.

(b) $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5 \to 1$

Dužina puta $28 + 30 + 75 + 115 + 120 = 368$.

(c) Mađarska metoda daje rešenje relaksiranog problema $\begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 4 \\ 4 \to 1 \\ 3 \to 5 \\ 5 \to 3 \end{matrix}$, čija dužina puta je

$28 + 30 + 115 + 45 + 110 = 328$.

(d) Rešenje pod (c) nije optimalno jer ima podputove $1 \to 2 \to 4 \to 1$ i $3 \to 5 \to 3$. Zaključujemo da je optimalno rešenje između rešenja pod (b) i (c): $328 \leq \zeta^* \leq 368$.

Uzgred, optimalno rešenje je $\begin{matrix} 1 \to 2 \\ 2 \to 5 \\ 5 \to 3 \\ 3 \to 4 \\ 4 \to 1 \end{matrix}$, dužina puta je $28 + 93 + 110 + 75 + 45 = 351$.

Spisak pitanja

1. Bubble sort
2. Insertion sort
3. Selection sort
4. Merge sort
5. Quick sort
6. Složenost algoritama i asimptotske oznake
7. Rekurzija
8. Pregled algoritama za sortiranje
9. Matrice
10. Povezane liste
11. Stack pomoću povezanih listi
12. Queue pomoću povezanih listi
13. Stack pomoću nizova
14. Queue pomoću nizova
15. Grafovi, osnovne definicije i teoreme
16. Strukture podataka za grafove
17. Breadth first search (BFS)
18. Algoritmi nad grafovima (stepen, diametar, path, . . .)
19. Depth first search (DFS)
20. DFS forest, tipovi grana
21. DFS forest, topološko sortiranje
22. DFS forest, jako povezane komponente
23. Minimalno pokrivajuće drvo, Kruskal
24. Minimalno pokrivajuće drvo, Prim
25. Binarna drva, LC-RC reprezentacija
26. Binary search tree sort
27. Problem angažovanja, mađarska metoda
28. Problem trgovačkog putnika