17.IZOO64.IT Verovatnoća i statistika
17.SE001.SV Statistika

Zoran Ovcin

školska 2023/24

Literatura

[1] Ghilezan et. al., Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike, CMS, NS, 2009.

[2] Stojaković M., Matematička statistika, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2000.

[3] Chihara L., Hesterberg T, Mathematical Statistics with Resampling and R by John Wiley & Sons, Ltd

[4] Grbić T., Nedović Lj., Zbirka odabranih rešenih ispitnih zadataka iz Verovatnoće, Statistike i Slučajnih procesa, Novi Sad, Fakultet tehničkih nauka, 2016.

Bodovi i datumi

	Kol. 1	Kol. 2	Test R1	Test R2	Test	Usm.	Σ
MAX	25	25	15	15	10	10	100
MIN	10	10	0	0	0	0	51
Datumi	24. III	8. VI					
	7:30	7:30					

Prostor verovatnoće

σ-polje događaja

Definicija 1 *Ako je $\Omega \neq \emptyset$ (neprazan skup ishoda), $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ i važi:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) $\forall A \in \mathcal{F}, \overline{A} := \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$,

(iii) *za prebrojivu familiju* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}, \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$,

*onda za $\mathcal{F}$ kažemo da je σ**-polje događaja (nad Ω)**.*

Elemente $\mathcal{F}$ nazivamo **događaji**. Ω je **siguran događaj**.
Za događaj A, njegov komplement $\overline{A}$ je **suprotan događaj**.

Primer 1 *Partitivni skup $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ su σ-polja događaja nad Ω.*

Primer 2 *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$ je σ-polje događaja.*

Osobine σ-polja događaja

$\emptyset \in \mathcal{F}$. $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}$.

$A, B \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; A \cup B \in \mathcal{F}, A\,B = A \cap B \in \mathcal{F}, A \backslash B \in \mathcal{F}, A \Delta B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \in \mathcal{F}$.

$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \;\Rightarrow\; \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$.

Ako je $A\,B = \emptyset$, kažemo da su događaji A i B **disjunktni**.

Ako za prebrojivu familiju $A_1, A_2, \ldots$ važi

$$\forall k, j \in \{1, 2, \ldots\}, k \neq j \Rightarrow A_k A_j = \emptyset,$$

kažemo da su događaji te familije **disjunktni po parovima**.

Verovatnoća

Definicija 2 *Za σ-polje $\mathcal{F}$ nad nepraznim skupom Ω,* ***verovatnoća*** *je funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava*

1. $\forall A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0.$
2. *Za prebrojivu familiju događaja disjunktnih po parovima $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$,* $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$
3. $P(\Omega) = 1.$

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo ***prostor verovatnoće****.*

Primer 3 *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$, funkcija*

$$P = \begin{pmatrix} \emptyset & \Omega & \{1,2\} & \{3,4,5,6\} \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

je verovatnoća, odnosno, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor verovatnoće.

Osobine verovatnoće

Za proizvoljne događaje A i B:

4. $P(A) \leq 1$
5. $P(\emptyset) = 0$
6. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
8. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Za prebrojivu familiju događaja $A_1, A_2, \ldots$ i događaj A

9. $A_k \uparrow A$ ili $A_k \downarrow A \Rightarrow P(A_k) \to P(A)$
10. $P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$

PRIMER 4 *Neka je skup ishoda konačan:* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, *i neka je* σ*-polje skup svih podskupova* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Neka je $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ *i* $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Verovatnoća je definisana

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k.$$

Ovaj prostor zovemo ***diskretni prostor verovatnoće.***

PRIMER 5 *Ako u primeru 4 važi i* $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$, *dobijamo* $P(A) = \#A/\#\Omega$, *to je* ***klasična definicija*** verovatnoće. *U klasičnoj definiciji verovatnoće se kaže da je verovatnoća* broj povoljnih podeljen sa brojem mogućih ishoda. *Klasična definicija verovatnoće se koristi kada imamo konačno mnogo jednako verovatnih ishoda, odnosno, kada se vrši slučajan izbor.*

PRIMER 6 *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ *Euklidski prostor.*

Neka je $\mathcal{F}$ *skup podskupova od* Ω *koji su merljivi merom* m *i neka je* $m(\Omega) > 0$.

Geometrijsku verovatnoću *za* $A \subseteq \Omega$ *definišemo:* $P(A) = m(A)/m(\Omega)$.

Onda je $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ *prostor verovatnoće.*

Skup čija verovatnoća je 0 zovemo **nemoguć događaj**. Na primer, $\emptyset$ je nemoguć događaj. Ako podskupovi nemogućeg događaja pripadaju $\mathcal{F}$, kažemo da je prostor **kompletan**. Ako nije kompletan, prostor se može kompletirati proširivanjem.

Ako je $P(A) = 1$, kažemo da je A **skoro siguran skup**. Ako nešto važi na skupu verovatnoće 1, kažemo da **skoro sigurno važi**.

Primer 7 *Tri dečaka i tri devojčice sedaju na slučajan način u red sa 6 mesta. (Svi rasporedi sedenja su jednako verovatni.) Kolika je verovatnoća da nema dve osobe istog pola koje sede jedna do druge?*

Primer 8 *Iz špila od 52 karte na slučajan način se izvlači jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta dama ili herc?*

Ako u prostoru verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ za događaje $A, B \in \mathcal{F}$ važi $P(AB) = P(A)P(B)$, kažemo da su A i B **nezavisni**.

Familija događaja $A_1, A_2, \ldots$ je **nezavisna u ukupnosti** ako za proizvoljan skup indeksa $i_1, i_2, \ldots i_k$ važi $P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$.

Primer 9 *Novčić se baca tri puta. Bacanja su nazavisna. Izračunati verovatnoće p_k da će pasti k grbova za $k = 0, 1, 2, 3$.*

PRIMER 10 *Novčić se baca dok se ne dobije grb. Izračunati ver. da bude paran broj bacanja.*

PRIMER 11 *(Bernulijeva shema) Pozitivna realizacija eksperimenta u svim pokušajima ima istu verovatnoću* $p \in (0,1)$. *Eksperiment se vrši* n *puta. Kolika je verovatnoća da će biti* k, *za* $0 \leq k \leq n$ *pozitivnih realizacija?*

PRIMER 12 *U odeljenju od 30 đaka ima 12 dečaka. Na slučajan način se bira petočlana komisija. Kolika je verovatnoća da u komisiji ima (barem) 2 dečaka?*

PRIMER 13 *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka u lopti. Kolika je verovatnoća da je izabrana tačka u kocki?*

PRIMER 14 *Na slučajan način se biraju brojevi* a *i* b *u intervalu* $[0,1]$. *Kolika je verovatnoća da će jednačina* $x^2 + ax + b = 0$ *imati realna rešenja?*

PRIMER 15 *Dve osobe dolaze na sastanak na dogovoreno mesto u slučajno odabranom momentu između 12 i 13 časova. Dogovor je da se čeka 20 minuta.*

Kolika je verovatnoća da će se sresti?

PRIMER 16 *(Bertranov paradoks) Izračunati verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu.*

(a) Ako se jedan kraj tetive fiksira, a drugi se bira slučajno.

(b) Ako se fiksira pravac tetive.

(c) Ako se slučajno bira središte tetive (unutar kružnice).

Uslovna verovatnoća

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ prostor verovatnoće i neka je $A \in \mathcal{F}$ i $P(A) > 0$.
Definišemo za $B \in \mathcal{F}$ **verovatnoću pod uslovom da se desio događaj** A:

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Onda je $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|A))$ prostor verovatnoće.
Prebrojiva familija događaja $H_1, H_2, \ldots$ čini **potpun sistem događaja** ako su događaji disjunktni po parovima i ako važi $\bigcup_{j=1}^{\infty} H_j = \Omega$.

Formula totalne verovatnoće za potpuni sistem događaja $H_1, H_2, \ldots$ i događaj A:

$$P(A) = \sum_{j=1}^{\infty} P(H_j)\, P(A|H_j).$$

Bejzova (Bayes) formula: $$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)\,P(A|H_j)}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(H_j)\,P(A|H_j)}.$$

Primer 17 *Simptom X se pojavljuje usled bolesti A, B i C. Poznato je da se bolest A, B i C pojavljuju kod redom 10%, 5%, 20% populacije. Bolesti A, B i C isključuju jedna drugu. Simptom X se u slučaju bolesti A razvija u 90% slučajeva, u slučaju bolesti B razvija se u 95% slučajeva, i u slučaju bolesti C razvija u 75% slučajeva.*

Kolika je verovatnoća da će se kod slučajno odabranog čoveka pojaviti simptom X?

Ako se pojavio simptom X, kolika je verovatnoća da ima bolest A, B, odnosno C?

Primer 18 *Od n novčića jedan je neispravan: ima grb sa obe strane. Na slučajan način se bira novčić i baca k puta. Kolika je verovatnoća da svih k puta padne grb?*

Ako je svih k puta pao grb, kolika je verovatnoća da je u pitanju neispravan novčić?

Primer 19 *Osobe A, B, C i D prenose informaciju koju dobiju u obliku iskaza DA ili NE u jednom od tri slučaja. Osoba A dobija informaciju, prenosi je osobi B, zatim ona osobi C, zatim ona osobi D i na kraju osoba D saopštava informaciju.*

Kolika je verovatnoća da je prva osoba prenela početnu informaciju ako se zna da je poslednja osoba prenela početnu informaciju?

Uopštena formula preseka:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

PRIMER 20 *Koliko treba da ima osoba u nekoj grupi pa da verovatnoća da barem dve osobe iz grupe imaju rođendan istog dana bude veća od* $\frac{1}{2}$*?*

PRIMER 21 *Koliko osoba treba da pitam za rođendan da bih sreo osobu koja ima rođendan istog dana kad i ja sa verovatnoćom većom od* $\frac{1}{2}$*?*

Uopštena formula unije:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) -$$

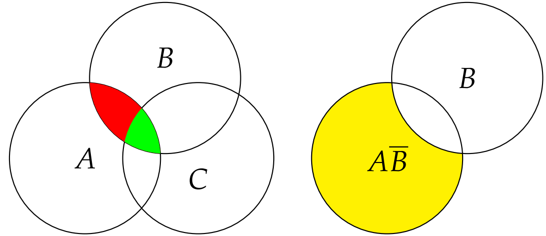
$$\cdots + (-1)^{(n-1)} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

PRIMER 22 *Nestalo je struje u pozorištu i svih* n *lica su u mraku (na slučajan način) uzeli kaput u garderobi. Kolika je verovatnoća da je barem jedno lice uzelo svoj kaput?*

Kojem broju teži dobijena verovatnoća kad $n \to \infty$*?*

PRIMER 23 *Neka je:* $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(AB) = 0.4$, $P(BC) = 0.25$, $P(ABC) = 0.15$.

- *Izračunati* $P(A\overline{B})$, $P(AB\overline{C})$ *i* $P(\overline{A}BC)$.
- *Izračunati* $P(A|B)$, $P(B|A)$.



PRIMER 24 *U kutiji se nalazi 10 kuglica sa brojem 0, 11 kuglica sa brojem 1 i 12 kuglica sa brojem 2. Na slučajan način se izvlači kuglica i posmatra izvučeni broj. Opisati skup ishoda i prostor verovatnoće.*

PRIMER 25 *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice bez vraćanja, kolika je verovatnoća da su izvučeni redom 0, 1 i 2?*

PRIMER 26 *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice bez vraćanja, kolika je verovatnoća da su izvučena tri različita broja?*

PRIMER 27 *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice sa vraćanjem, kolika je verovatnoća da su izvučena tri različita broja?*

Primer 28 *Na deonici pravog puta su postavljena dva semafora. Vozila stižu u slučajnim momentima. Prvi semafor propušta 80% vozila. Drugi semafor propušta 75% vozila koja nisu stala na prvom semaforu i 60% vozila koja su stala na prvom semaforu.*

Kolika je verovatnoća da će vozilo proći deonicu sa tačno jednim zaustavljanjem?

Slučajne promenljive

Ako $X : \Omega \to \mathbb{R}$, za $S \subseteq \mathbb{R}$, **inverzna sliku** od S je

$$X^{-1}(S) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}\,.$$

Definicija

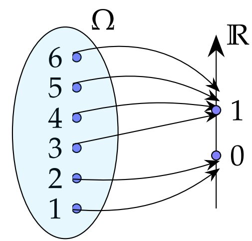
Ako je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i $X : \Omega \to \mathbb{R}$ zadovoljava:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ X^{-1}((-\infty, x]) \in \mathcal{F}\,,$$

kažemo da je X **slučajna promenljiva**.

PRIMER 29 *Za prostor verovatnoće iz primera 3, možemo definisati slučajnu promenljivu* ***indikator događaja*** *koja registruje sa 1 da li je pao broj veći od 2 (inače je nula):*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



Funkcija raspodele

Za slučajnu promenljivu X nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definišemo **funkciju raspodele**:

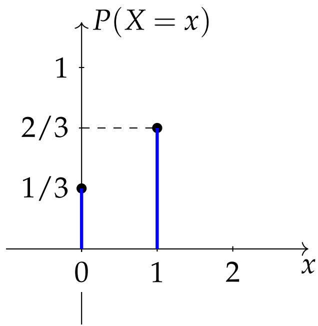
$$F(x) = P\left(X^{-1}((-\infty, x])\right) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x)\,.$$

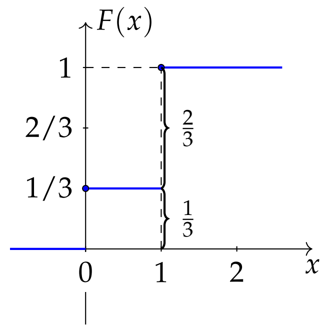
PRIMER 30 *Za slučajnu promenljivu X iz primera 29 funkcija raspodele je*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Zakon raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$





Osobine funkcije raspodele

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$
3. $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
4. $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim\limits_{x \to a^+} F(x) = F(a)$
5. $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Diskretne slučajne promenljive

Neka je X slučajna promenljiva nad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Sliku skupa ishoda Ω označavamo sa $\mathcal{R}_X$. Kažemo da je X **diskretna slučajna promenljiva** ako je slika $\mathcal{R}_X$ konačan ili prebrojiv skup. Ako je $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ onda $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (X = x_n)$ sledi da je $1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P(X = x_n)$. Možemo uvesti oznake $p_n = P(X = x_n)$. Funkciju $x_n \mapsto p_n$ zovemo **zakon raspodele** slučajne promenljive X i zapisujemo $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$. Važi $F(x) = \sum\limits_{n : x_n \leq x} p_n$.

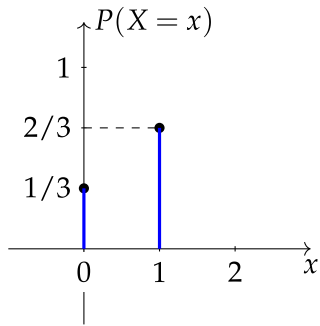
Bernulijeva raspodela sa parametrom $p \in (0,1)$ je $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.

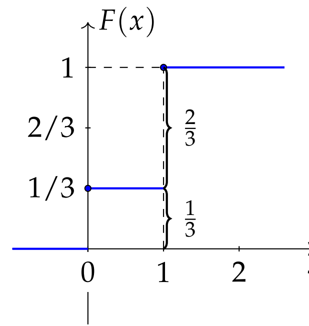
Primer 31 *U primeru 29 posmatra se slučajna promenljiva X koja uzima vrednost 1 ako u bacanju kocke za igru padne broj veći u 2, inače uzima vrednost 0. Ovde je skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = X^{-1}(\{1\}) = \{3,4,5,6\}$. Po klasičnoj definiciji verovatnoće:*

$p = P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. *Zakon raspodele je* $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Funkcija raspodele

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1/3 & 0 \leq x < 1, \\ 1 & x \geq 1. \end{cases}$$





Binomna raspodela sa parametrima $p \in (0,1)$ i $n \in \mathbb{N}$ u oznaci $\mathcal{B}(n,p)$:

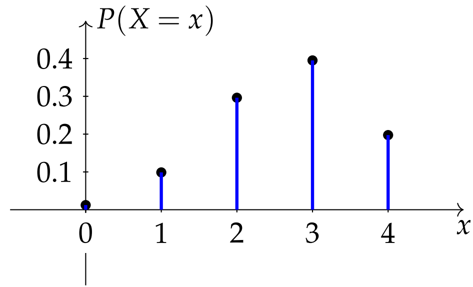
$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},\ k \in \{0,1,\ldots,n\}.$$

Primer 32 *U primeru 11 (Bernulijeva shema) je opisana ova raspodela. Recimo, ako posmatramo koliko puta je pao broj veći od dva u četiri nezavisna bacanja kockice za igru, dobija se Binomna raspodela sa* $p = \frac{2}{3}, n = 4$. $X : \mathcal{B}\left(4, \frac{2}{3}\right)$. *Zakon raspodele je:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^4 & \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3 & \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 & \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1 & \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^0 \end{pmatrix}$$

Kad se izračuna i nacrta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0.0123 & 0.0988 & 0.2963 & 0.3951 & 0.1975 \end{pmatrix}$$



$$E(X) = 0 \cdot 0.0123 + 1 \cdot 0.0988 + 2 \cdot 0.2963 + 3 \cdot 0.3951 + 4 \cdot 0.1975 = 2.6667 = 4 \cdot \frac{2}{3}$$

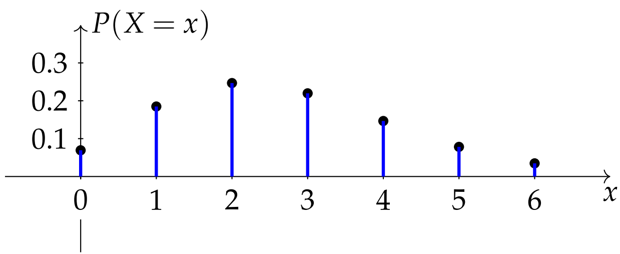
Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda \in (0,\infty)$ u oznaci $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\, k = 0,1,\ldots$$

Kada se posmatra učestalo pojavljivanje događaja kroz vreme i kad pojava jednog događaja ne utiče na vreme pojave sledećeg, onda broj događaja koji su se pojavili do nekog fiksnog momenta ima Poasonovu raspodelu. Parametar λ predstavlja učestalost tih događaja.

Primer 33 *Broj klijenata koji se pojave na šalterima za kupovinu karata ima Poasonovu raspodelu sa prosekom* 160 *klijenata u na sat. Zakon raspodele slučajne promenljive* $X =$ *broj klijenata u minutu ima Poasonovu raspodelu sa* $\lambda = 160/60 = 2.6667$.

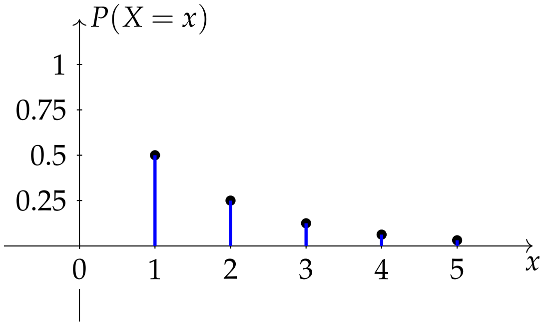
$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\ 0.0693 & 0.1849 & 0.2468 & 0.2197 & 0.1466 & 0.0783 & 0.0348 & \ldots \end{pmatrix}$$

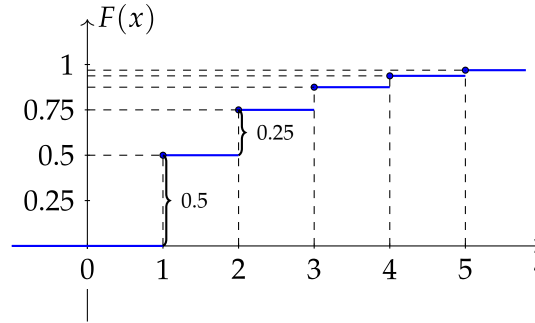


Geometrijska raspodela sa parametrom $p \in (0,1)$ u oznaci $\mathcal{G}(p)$:
$$P(X=k) = p\,(1-p)^{k-1},\ k = 1,2,\ldots$$

Primer 34 *Novčić se baca dok se ne dobije grb. Slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja. Naći zakon raspodele X. Izračunati verovatnoću da je bio paran broj bacanja.*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots \\ 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 & 0.03125 & \ldots \end{pmatrix}$$





Paran broj bacanja $=: A = \{2,4,6,\ldots\}$. $P(A) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X=2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

PRIMER 35 *U kutiji se nalazi 10 kuglica sa brojem 0, 11 kuglica sa brojem 1 i 12 kuglica sa brojem 2. Na slučajan način se izvlači dve kuglice. Slučajna promenljiva X predstavlja zbir izvučenih brojeva.*

Naći zakon raspodele i očekivanje slučajne promenljive X.

$$P(X=0)=P(\{0+0\})=\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{9}{32},$$
$$P(X=1)=P(\{0+1,1+0\})=2\cdot\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{11}{32},$$
$$P(X=2)=P(\{0+2,2+0,1+1\})=2\cdot\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{12}{32}+\tfrac{11}{33}\cdot\tfrac{10}{32},$$
$$P(X=3)=P(\{1+2,2+1\})=2\cdot\tfrac{11}{33}\cdot\tfrac{12}{32},$$
$$P(X=4)=P(\{2+2\})=\tfrac{12}{33}\cdot\tfrac{11}{32}.$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{10}{33}\cdot\frac{9}{32} & 2\cdot\frac{10}{33}\cdot\frac{11}{32} & 2\cdot\frac{10}{33}\cdot\frac{12}{32}+\frac{11}{33}\cdot\frac{10}{32} & 2\cdot\frac{11}{33}\cdot\frac{12}{32} & \frac{12}{33}\cdot\frac{11}{32} \end{pmatrix}$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{90}{33\cdot 32} & \frac{220}{33\cdot 32} & \frac{350}{33\cdot 32} & \frac{264}{33\cdot 32} & \frac{132}{33\cdot 32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= 0\cdot\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{9}{32}+1\cdot 2\cdot\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{11}{32}+2\cdot\left(2\cdot\tfrac{10}{33}\cdot\tfrac{12}{32}+\tfrac{11}{33}\cdot\tfrac{10}{32}\right)+ \\ &\quad +3\cdot 2\cdot\tfrac{11}{33}\cdot\tfrac{12}{32}+4\cdot\tfrac{12}{33}\cdot\tfrac{11}{32}=\tfrac{2240}{33\cdot 32}=2.1212 \end{aligned}$$

Neprekidne slučajne promenljive

Kažemo da je slučajna promenljiva **apsolutno neprekidnog tipa** ako postoji funkcija $\varphi:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ takva da je

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(t)dt.$$

Funkciju φ nazivamo **funkcija gustine raspodele** slučajne promenljive X.

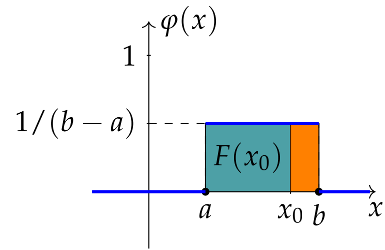
Osobine gustine raspodele

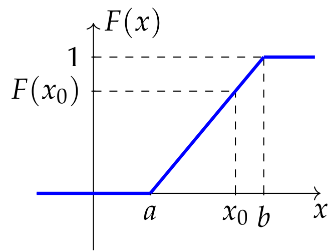
1. $\varphi(x)=F'(x)$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)dt=1$
3. $\int_a^b\varphi(x)dx=F(b)-F(a)=$ $P(a<X<b)=P(a\leq X<b)=$ $P(a\leq X\leq b)=P(a<X\leq b)$

Uniformna raspodela $\mathcal{U}(a,b)$, $a<b\in\mathbb{R}$

$$\varphi(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & x\in(a,b),\\ 0, & x\notin(a,b);\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \frac{x-a}{b-a}, & a\leq x<b,\\ 1, & x\geq b.\end{cases}$$



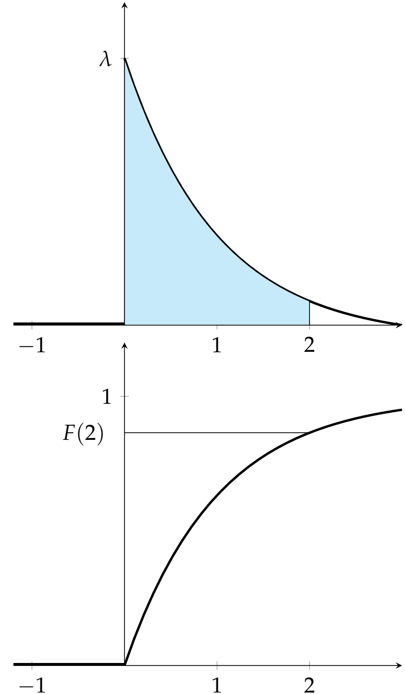


Eksponencijalna raspodela

$$\mathcal{E}(\lambda),\ \lambda \in (0,\infty)$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

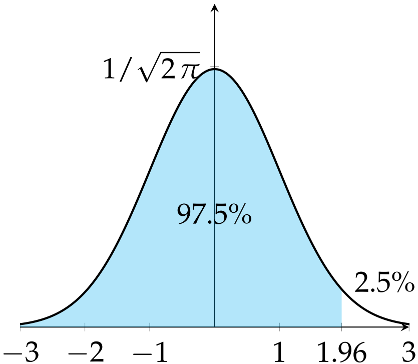
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

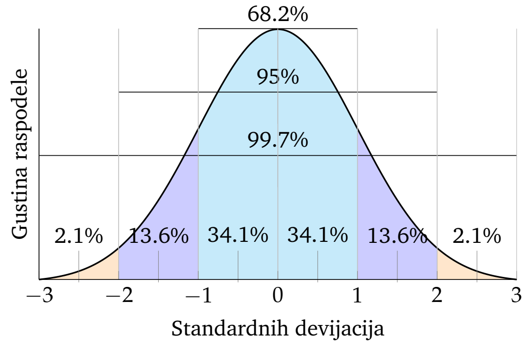


Normalna (Gausova) raspodela $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, $m,\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x \in \mathbb{R}; \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

Za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, $\mathcal{N}(0,1)$, standardna normalna raspodela $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.





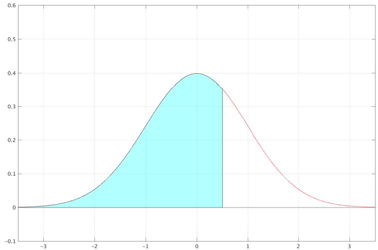
Tablice Na primer $P(X \leq 1.960) = \Phi(1.960) = 0.975$, $\Phi^{-1}(0.975) = 1.960$.

$p = P(X \leq z)$

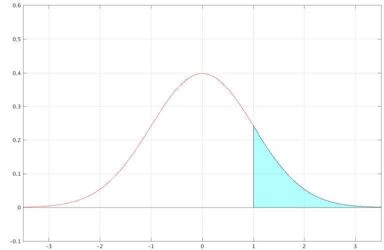
p	.75	.90	.95	.975	.990	.995	.9995
z	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

PRIMER 36 *Ako* $X : \mathcal{N}(0,1)$, *iz tablica funkcije* Φ *očitati vrednosti* $P(X \leq 0.55), P(X > 1), P(|X| < 2)$ *i naći vrednost* x *za koju je* $P(X \leq x) = F(x) = 0.975$.

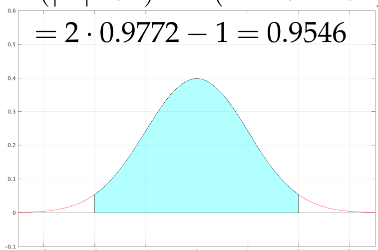
$$P(X \leq 0.55) = 0.7088$$



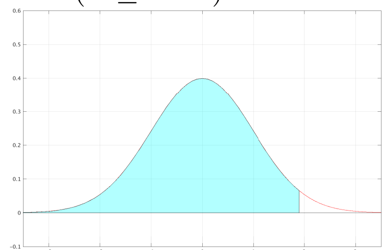
$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$



$$P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) =$$
$$= 2 \cdot 0.9772 - 1 = 0.9546$$



$$P(X \leq 1.960) = 0.975$$



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9924	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981

Transformacija slučajne promenljive

Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna promenljiva nad prostorom verovatnoće $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Neka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neka je $Y = f \circ X$ slučajna promenljiva. Za $\omega \in \Omega, Y(\omega) = f(X(\omega))$.

Ako je f neprekidna funkcija, onda je Y slučajna promenljiva.

Obeležavamo $Y = f(X)$.

Zadatak je naći raspodelu slučajne promenljive Y kada je poznata raspodela slučajne promenljive X i funkcija f.

X je diskretna slučajna promenljiva

Aka je X diskretna slučajna promenljiva sa raspodelom $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$, onda je Y diskretna slučajna promenljiva.

Neka je $\{y_1, y_2 \ldots\}$ skup slika za Y. Onda je zakon raspodele za Y:

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ q_1 & q_2 & \cdots \end{pmatrix}, \text{ gde je } q_i = \sum_{\substack{m \\ y_i = f(x_m)}} p_m.$$

PRIMER 37 *Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj koji padne na kockici za igru. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = (X-3)^2$.*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

X je neprekidna slučajna promenljiva

Neka je X slučajna promenljiva sa gustinom raspodele φ_X. Neka je f rastuća ili opadajuća neprekidna funkcija. Onda je inverzna funkcija f^{-1} rastuća, odnosno, opadajuća funkcija. Onda je gustina za Y: $\varphi_Y(y) = \varphi_X(f^{-1}(y))\,|(f^{-1}(y))'|$, $y \in Y(\Omega) = f(X(\Omega))$.

PRIMER 38 *Neka $X : \mathcal{U}(0,1)$ i neka je $Y = -\ln X$. Naći raspodelu za Y.*

PRIMER 39 *Neka $X : \mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = aX + b$, $a \neq 0$. Naći raspodelu za Y.*

PRIMER 40 *Neka $X : \mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = X^2$. Naći raspodelu za Y.*

Standardizacija Normalne raspodele

Neka $X : \mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = aX + b$, $a \neq 0$. Onda slučajna promenljiva Y ima Normalnu (Gausovu) raspodelu $Y : \mathcal{N}(b, |a|)$.

Ako $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, onda $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$.

Primer 41 *Neka* $X : \mathcal{N}(0.5, 2)$. *Izračunati verovatnoće* $P(X \leq 0.55), P(X > 1), P(|X| < 2)$.

$$P(X \leq 0.55) = P((X - 0.5)/2 \leq (0.55 - 0.5)/2) = P(X^* \leq 0.025) = 0.510,$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P((X - 0.5)/2 \leq (1 - 0.5)/2) = 1 - P(X^* \leq 0.25) =$$
$$= 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013,$$

$$P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = P((-2 - 0.5)/2 < (X - 0.5)/2 < (2 - 0.5)/2) =$$
$$= P(-1.25 < X^* < 0.75) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.5) = 0.7734 - (1 - 0.8944) = 0.6678.$$

Dvodimenzionalne slučajne promenljive

Kažemo da je (X,Y) **dvodimenzionalna slučajna promenljiva**, odnosno **dvodimenzionalni slučajni vektor**, nad prostorom verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$, ako su X i Y slučajne promenljive nad $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Funkcija raspodele slučajnog vektora (X,Y) je

$$F(x,y) = P(\{\omega : X(\omega) \leq x\} \cap \{\omega : Y(\omega) \leq y\}) = P(X \leq x, Y \leq y)\,.$$

Osobine funkcije raspodele dvodimenzionalnog vektora

1. $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0$
2. $F(\infty,\infty) = 1$
3. $F(x,y)$ je neprekidna s desna po obe promenljive.
4. $F(x,y)$ je neopadajuća po obe promenljive.
5. $P(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$.

Marginalne raspodele slučajnog vektora (X,Y) su raspodele slučajnih promenljivih X i Y čije funkcije raspodele dobijamo:

$$F_X(x) = F(x,\infty)\,,\; F_Y(y) = F(\infty,y)\,.$$

Diskretna dvodimenzionalna slučajna promenljiva

Neka je (X,Y) slučajni vektor nad $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Neka je $\mathcal{R}_{(X,Y)} = (X,Y)(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^2$ prebrojiv skup.

Preslikavanje koje elementima slike $\mathcal{R}_{(X,Y)}$ pridružuje verovatnoće $(x_i,y_j) \mapsto p_{i,j}$ definisano:

$$p_{i,j} = P(\{\omega : X(\omega) = x_i \wedge Y(\omega) = y_j\})$$

zovemo **zakon raspodele vektora** (X,Y).

Često zakon raspodele zadajemo tabelom na čijim marginama možemo izračunati verovatnoće marginalnih raspodela. $p_{i\cdot} = \sum_j p_{i,j}, \quad p_{\cdot j} = \sum_i p_{i,j}, \quad i,j = 1,2,\dots$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	
x_1	$p_{1,1}$	$p_{1,2}$	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	$p_{2,1}$	$p_{2,2}$	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_{1\cdot} & p_{2\cdot} & \cdots \end{pmatrix}, \ Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \cdots \end{pmatrix}.$$

Primer 42 *Tri puta se baca novčić. Neka X predstavlja broj grbova, a Y broj promena. Naći zakon raspodele slučajnog vektora (X,Y) i marginalne zakone raspodele.*

Neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ prostor verovatnoće i (X,Y) slučajni vektor sa funkcijom raspodele $F(x,y)$. Ako postoji integrabilna funkcija $\varphi(x,y) : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$ takva da je $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$F(x,y) = \iint\limits_{D_{x,y}} \varphi(u,v)\, du dv, \ \text{gde je } D_{x,y} = (-\infty, x] \times (-\infty, y]\,,$$

kažemo da je (X,Y) **neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva** i da je $\varphi(x,y)$ njena **gustina raspodele**.

Poslednji dvostruki integral se računa preko ponovljenih (nesvojstvenih) integrala:

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{y}\varphi(u,v)dv\right)du\,.$$

Osobine dvodimenzionalne gustine raspodele

1. Ako je $\varphi(x,y)$ neprekidna u (x,y), onda je $\varphi(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$.
2. $\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\varphi(x,y)\,dxdy=1$
3. $P((X,Y)\in S)=\iint\limits_{S}\varphi(x,y)\,dxdy$

Gustine marginalnih raspodela slučajnog vektora (X,Y) su

$$\varphi_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\,dy\,,\qquad \varphi_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,y)\,dx\,.$$

Uslovne raspodele

Neka je (X,Y) slučajni vektor nad prostorom verovatnoće $(\Omega,\mathcal{F},P)$ i neka je $P(X\in S)>0$. Uslovna funkcija raspodele slučajne promenljive $Y|X\in S$ u $(\Omega,\mathcal{F},P(\cdot|X\in S))$ je

$$F_{Y|X\in S}(y)=P(\{\omega:Y(\omega)\le y\}|X\in S)=\frac{P(Y\le y,X\in S)}{P(X\in S)}.$$

Diskretne uslovne raspodele

Neka je dat zakon raspodele diskretnog slučajnog vektora (X,Y). Ako je $p_{\cdot j}>0$, **uslovni zakon raspodele** slučajne promenljive X ako je $Y=y_j$ je $p(x_i|y_j)=p_{i,j}/p_{\cdot j}$:

$$X|Y=y_j:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ \frac{p_{1,j}}{p_{\cdot j}} & \frac{p_{2,j}}{p_{\cdot j}} & \cdots \end{pmatrix}\ \text{slično}\ Y|X=x_i:\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ \frac{p_{i,1}}{p_{i\cdot}} & \frac{p_{i,2}}{p_{i\cdot}} & \cdots \end{pmatrix},\ p(y_j|x_i)=\frac{p_{i,j}}{p_{i\cdot}}$$

PRIMER 43 *Za diskretnu slučajnu promenljivu iz primera 42 naći uslovne zakone raspodele* $Y|X=2$ *i* $X|Y=1$.

Neprekidne uslovne raspodele

Za neprekidni slučajni vektor (X,Y) sa gustinom $\varphi(x,y)$ funkciju raspodele slučajne promenljive $Y|X=x$ definišemo:

$$F_{Y|X=x}(y) = \lim_{h\to 0^+} P(Y \le y | x \le X < x+h)\,.$$

Može se dokazati da je

$$F_{Y|X=x}(y) = \int\limits_{-\infty}^{y} \frac{\varphi(x,v)}{\varphi_X(x)}\,dv\,,\ \text{ za }\ \varphi_X(x) > 0,\ \text{ odnosno,}$$

$\varphi(y|x) := \frac{\varphi(x,y)}{\varphi_X(x)}$ za $\varphi_X(x) > 0$ je **uslovna gustina raspodele** za $Y|X=x$.

Primer 44 *X se na slučajan način bira iz intervala $(0,1)$. Potom se Y bira na slučajan način iz intervala $(X,1)$. Naći gustinu raspodele za (X,Y) i marginalnu raspodelu za Y.*

Nezavisnost slučajnih promenljivih

Neka je (X,Y) slučajni vektor nad prostorom $(\Omega,\mathcal{F},P)$ sa funkcijom raspodele $F(x,y)$ i neka su $F_X(x)$ i $F_Y(y)$ marginalne funkcije raspodele.

Kažemo da su X i Y **nezavisne** slučajne promenljive ako $\forall x, y \in \mathbb{R},\ F(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$.

Diskretne slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako je $p_{i,j} = p_{i\cdot}\ p_{\cdot j}$ za sve i, j, gde je $p_{i,j}$ zajednički zakon raspodele za (X,Y), a $p_{i\cdot}$ i $p_{\cdot j}$ marginalni zakoni raspodele.

Neprekidne slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako je $\varphi(x,y) = \varphi_X(x)\,\varphi_Y(y)$ za sve x, y, gde je $\varphi(x,y)$ zajednička gustina, a $\varphi_X(x)$ i $\varphi_Y(y)$ marginalne gustine.

Za niz promenljivih $X_1, X_2, \ldots$ kažemo da su **nezavisne** ako $\forall i, j,\ i \neq j \ \Rightarrow\ X_i$ nezavisno od X_j.

Transformacija dvodimenzionalne slučajne promenljive

Posmatraćemo transformacije $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Diskretne slučajne promenljive

Ako je (X,Y) diskretni slučajni vektor sa zakonom raspodele $(x_i, y_j) \mapsto p_{i,j}$ i transformacija $(X,Y) \mapsto (U,Z) = (f_1(X,Y), f_2(X,Y))$, onda je zakon raspodele $(U,Z):\ (u_k, z_l) \mapsto q_{k,l}$,

$$q_{k,l} = P(U = u_k, Z = z_l) = \sum_{\substack{(i,j) \\ (u_k, z_l) = (f_1(x_i, y_j), f_2(x_i, y_j))}} p_{i,j},$$

za sve vrednosti (u_k, z_l) iz slike $\mathcal{R}_{(U,Z)}$.

Slično ako je $Z = f(X, Y)$.

Primer 45 *Nezavisne slučajne promenljive X i Y imaju istu Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z = X + Y$.*

Primer 46 *Neka su slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne sa istom Bernulijevom raspodelom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.*

Neprekidne slučajne promenljive

Nalaženje raspodele transformisane slučajne promenljive ćemo pokazati za $Z = X + Y$ (tzv. konvolucija slučajnih promenljivih X i Y).

Neka je (X, Y) dvodimenzionalni neprekidni slučajni vektor sa gustinom raspodele $\varphi(x, y)$.

Gustina raspodele slučajne promenljive $Z = X + Y$ je $\varphi_Z(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(z - y, y)\, dy$.

Numeričke karakteristike slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje

Za diskretnu slučajnu promenljivu $X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{pmatrix}$, definišemo $E(X) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i\, p_i$.

Za neprekidnu slučajnu promenljivu $X : \varphi(x)$, definišemo $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x)\,dx$.

(Ako suma, odnosno integral, apsolutno konvergira.)

Osobine matematičkog očekivanja

1. $X = c,\, c = const \;\Rightarrow\; E(X) = c$
2. $Y = f(X),\, E(Y) = E(f(X)) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} f(x_i)\, p_i, & X \text{ diskretna} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx, & X \text{ neprekidna} \end{cases}$

3. $Z = f(X,Y)$, $E(Z) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=1}^{\infty} f(x_i, y_j)\, p_{i,j}, & (X,Y) \text{ diskretna} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, \varphi(x,y)\, dy \right) dx, & (X,Y) \text{ neprekidna} \end{cases}$

4. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

5. $E(cX) = c\,E(X)$

6. X i Y nezavisne $\Rightarrow$ $E(XY) = E(X)\,E(Y)$

7. $a \leq X \leq b \Rightarrow a \leq E(X) \leq b$

Disperzija (Varijansa)

$$D(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

(Ako postoji.)

Osobine disperzije

1. $X = c,\ c = const \ \Leftrightarrow\ D(X) = 0$
2. $D(X) \geq 0$
3. $c = const \ \Rightarrow\ D(cX) = c^2 D(X),\ D(X + c) = D(X)$
4. X i Y nezavisne $\ \Rightarrow\ D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

Standardna devijacija

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Standardizacija slučajne promenljive

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \ \Rightarrow\ E(X^*) = 0,\ D(X^*) = 1$$

PRIMER 47 *Posmatra se X, broj koji padne u slučajnom bacanju kocke za igru. Naći zakon raspodele, očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.*

$$X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

$$E(X) = 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + 3 \cdot \tfrac{1}{6} + 4 \cdot \tfrac{1}{6} + 5 \cdot \tfrac{1}{6} + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 3.5$$
$$D(X) = (1 - 3.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} + \cdots + (6 - 3.5)^2 \cdot \tfrac{1}{6} = 2.916667$$

$X : Ber(p)$	$E(X) = p$	$D(X) = p(1-p)$	$p \in (0,1)$
$X : \mathcal{B}(n,p)$	$E(X) = np$	$D(X) = np(1-p)$	$n \in \mathbb{N},\ p \in (0,1)$
$X : \mathcal{P}(\lambda)$	$E(X) = \lambda$	$D(X) = \lambda$	$\lambda > 0$
$X : \mathcal{G}(p)$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$D(X) = \frac{1}{p^2}$	$p \in (0,1)$
$X : \mathcal{U}(a,b)$	$E(X) = \frac{a+b}{2}$	$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$	$a < b$
$X : \mathcal{E}(\lambda)$	$E(X) = \frac{1}{\lambda}$	$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda > 0$
$X : \mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$E(X) = m$	$D(X) = \sigma^2$	$\sigma > 0$

Medijana

$$P(X < Me) = P(X > Me)$$

Modus

X diskretna $\Rightarrow$ Mo je vrednost sa najvećom verovatnoćom.
X neprekidna $\Rightarrow$ Mo je vrednost za koju gustina dostiže maksimum.

Momenti

Obični: $m_k(X) = E(X^k) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^k p_i, & X \text{ diskretna} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \varphi(x)\, dx, & X \text{ neprekidna} \end{cases}$

Centralni: $\mu_k(X) = m_k(X - E(X)) = E\left((X - E(X))^k\right)$.
(Ako postoji.)

Numeričke karakteristike dvodimenzionalne slučajne promenljive

Očekivanje i disperzija: $E(X,Y) = (E(X), E(Y))$, $D(X,Y) = (D(X), D(Y))$

Mešoviti momenti:

$$m_{k,n}(X,Y) = E(X^k Y^n) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i^k y_j^n \, p_{i,j}, & (X,Y) \text{ diskretna} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^n \varphi(x,y)\, dy \right) dx, & (X,Y) \text{ neprekidna} \end{cases}$$

Kovarijansa: $\operatorname{cov}(X,Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right) = E(XY) - E(X)E(Y)$

Koeficijent korelacije:

$$\rho_{X,Y} = \operatorname{cov}(X^*, Y^*) = \operatorname{cov}\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right) = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Osobine:

1. X i Y nezavisne $\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$
2. $|\rho_{X,Y}| \leq 1$
3. $|\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Regresija

Za diskretnu dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X,Y) definišemo **uslovno matematičko očekivanje** za X ako je $Y=y_j$: $E(X|Y=y_j)=\sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i|y_j)=\frac{1}{p_{\cdot j}}\sum_{i=1}^{n} x_i\, p_{i,j}$

Funkciju $y_j \mapsto E(X|Y=y_j)$ nazivamo **regresija** X po Y, obeležavamo $r_1(y)$. Regresija definiše novu slučajnu promenljivu koju obeležavamo $E(X|Y)=r_1(Y)$, čija je raspodela:

$E(X|Y):\begin{pmatrix} E(X|Y=y_1) & E(X|Y=y_2) & \cdots \\ p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \cdots \end{pmatrix}$. Važi $E(E(X|Y))=E(X)$.

Za neprekidnu dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu (X,Y) definišemo **uslovno matematičko očekivanje** za X ako je $Y=y$: $E(X|Y=y)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x|y)\,dx=\frac{1}{\varphi_Y(y)}\int_{-\infty}^{\infty} x\,\varphi(x,y)\,dx$

Funkciju $y \mapsto E(X|Y=y)$ nazivamo **regresija** X po Y, obeležavamo $r_1(y)$.
Regresija definiše novu slučajnu promenljivu koju obeležavamo $E(X|Y)=r_1(Y)$.
Važi $E(E(X|Y))=E(X)$.

PRIMER 48 *Naći regresiju X po Y za primer 42.*

Granične teoreme

Nejednakost Čebiševa

Neka za slučajnu promenljivu X postoji $E(X^2)$ i neka je $\varepsilon > 0$. Onda $P(|X| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{E(X^2)}{\varepsilon^2}$.

Ako za slučajnu promenljivu X postoji $D(X)$, onda za $\varepsilon > 0$, $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{D(X)}{\varepsilon^2}$.

Primena: Ako $X : \mathcal{B}(n, p)$, $\varepsilon > 0$, onda $P(|X - np| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{np(1-p)}{\varepsilon^2}$.

Zakoni velikih brojeva

Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom Bernulijevom raspodelom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ i $\varepsilon > 0$, onda

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0. \qquad \text{(Bernulijev slabi zakon velikih brojeva)}$$

Za niz slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ kažemo da važi

- **slabi zakon velikih brojeva** ako $\forall \varepsilon > 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k))\right| > \varepsilon\right) = 0,$

- **jaki zakon velikih brojeva** ako $P\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) = 0\right) = 1.$

Za niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom i konačnim očekivanjem važi slabi zakon velikih brojeva. (**Hinčin**)

Ako postoji konstanta $C > 0$ tako da za niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ važi $D(X_k) < C, k = 1, 2, \dots$, onda za taj niz važi slabi zakon velikih brojeva. (**Čebišev**)

Za niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \dots$ sa Bernulijevom raspodelom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ važi jaki zakon velikih brojeva: $P\left(\left\{\omega : \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k(\omega) = p\right\}\right) = 1.$ (**Bernuli, Borel**)

Za niz nezavisnih, jednako raspoređenih, slučajnih promenljivih sa konačnim očekivanjem važi jaki zakon velikih brojeva. (**Kolmogorov**)

Normalna raspodela

Primer 49 *Naći očekivanje i varijansu za normalnu raspodelu* $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.

$X:\mathcal{N}(\mu,\sigma) \Leftrightarrow \frac{X-\mu}{\sigma}:\mathcal{N}(0,1)$

X i Y nezavisne i $X:\mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $Y:\mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2) \Rightarrow X\pm Y:\mathcal{N}\left(\mu_1\pm\mu_2,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$

Primer 50 *U jednoj školi težina dečaka [kg] ima raspodelu:* $X:\mathcal{N}(50,2.5)$, *a devojčice:* $Y:\mathcal{N}(45,3)$. *Na slučajan način je odabran dečak i, nezavisno, devojčica. Kolika je verovatnoća da će dečak imati barem 3 kg više od devojčice?*

Ako nezavisne slučajne promenljive imaju raspodelu $X_k:\mathcal{N}(m_k,\sigma_k), k=1,2,\ldots,n$, onda slučajna promenljive $Y=a_1X_1+a_2X_2+\cdots+a_nX_n$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, gde je $\mu=a_1\mu_1+a_2\mu_2+\cdots+a_n\mu_n$ i $\sigma^2=a_1^2\sigma_1^2+a_2^2\sigma_2^2+\cdots+a_n^2\sigma_n^2$.

Ako je $X_1,X_2,\ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom Normalnom raspodelom čije su očekivanje i disprezija redom $E(X_k)=\mu$ i $D(X_k)=\sigma^2$, onda za svako x

$$P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-E\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n}X_k\right)}}\le x\right)=P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\le x\right)=P\left(\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le x\right)=\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

Centralne granične teoreme

Ako je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih promenljivih sa istom raspodelom čije su očekivanje i disprezija redom $E(X_k) = a$ i $D(X_k) = s^2, 0 < s < \infty$, onda za svako x

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - E\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}{\sqrt{D\left(\sum\limits_{k=1}^{n} X_k\right)}} \le x\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k - n\,a}{s\sqrt{n}} \le x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x),$$

kažemo da za $X_1, X_2, \ldots$ važi **centralna granična teorema**.

Ako su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, $E(X_k) = a_k$ i $D(x_k) = s_k^2$, i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\max_k s_k^2}{\sum_{k=1}^{n} s_k^2} = 0$, onda važi CGT.

Posledica: $S_n : \mathcal{B}(n,p) \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\,p}{\sqrt{n\,p\,(1-p)}} \le x\right) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. (**Moavr-Laplas**)

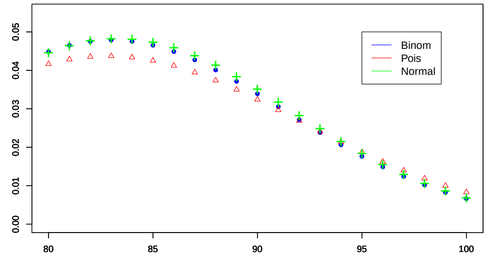
Za konačno k, ako je $\lim\limits_{n\to\infty} n\,p_n = \lambda = const$, važi $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

PRIMER 51 *Kolika je verovatnoća da je broj šestica u 500 bacanja kocke između 80 i 100?*

Označimo X broj šestica u 500 bacanja. Onda $X : \mathcal{B}(500, \frac{1}{6})$.

$$P = \sum_{k=80}^{100} \binom{500}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{500-k} = \underline{0.6518}.$$

(R: sum(dbinom((80:100),500,1/6)))



Moavr-Laplasova aproksimacija

$$P(80 < X \leq 100) = P\left(\frac{80-500\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}} < \frac{X-500\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}} \leq \frac{100-500\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) \approx \Phi\left(\frac{100-500\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) - \Phi\left(\frac{80-500\frac{1}{6}}{\sqrt{500\frac{1}{6}\frac{5}{6}}}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-0.4) = \Phi(2) - 1 + \Phi(0.4) =$$
$$= 0.9772 - 1 + 0.6554 = 0.6326$$

Poasonova aproksimacija, $\lambda = n \cdot p = 500 \cdot \frac{1}{6} = 83.33333$

$$P = \sum_{k=80}^{100} \binom{500}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{500-k} \approx \sum_{k=80}^{100} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \sum_{k=80}^{100} \frac{83.33333^k}{k!} \exp(-83.33333) = 0.6242$$

Statistika

Normalna raspodela $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ (Gausova)

Slučajna promenljiva ima **Normalnu raspodelu**, $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, $\mu,\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ ako

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt, \qquad E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2.$$

Centriranje normalne raspodele: $X : \mathcal{N}(\mu,\sigma) \Leftrightarrow X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1)$, $F_{X^*}(x) = \Phi(x)$.

Linearna kombinacija normalnih raspodela

Teorema: X i Y nezavisne i $X : \mathcal{N}(\mu_1,\sigma_1)$, $Y : \mathcal{N}(\mu_2,\sigma_2) \Rightarrow X \pm Y : \mathcal{N}\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$

Posledica: Ako nezavisne slučajne promenljive imaju raspodelu $X_k : \mathcal{N}(\mu_k,\sigma_k)$, $k = 1,2,\ldots,n$, onda slučajna promenljiva $Y = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_n X_n$ ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, gde je $\mu = a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + \cdots + a_n \mu_n$ i $\sigma^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \cdots + a_n^2 \sigma_n^2$.

χ^2 raspodela (Pirsonova)

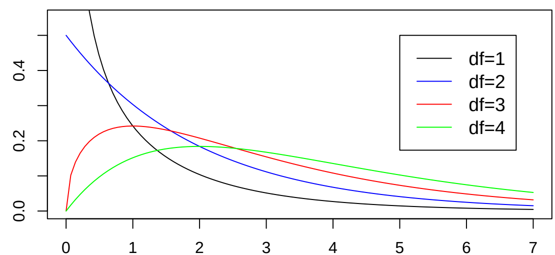
Slučajna promenljiva sa **hi-kvadrat raspodelom** sa n stepeni slobode, $Y : \chi^2_n$, ima gustinu:

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{y^{n/2-1}e^{-y/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, & y > 0, \end{cases} \qquad E(X) = n, \quad D(X) = 2n.$$

Ako X ima Normalnu raspodelu, $X : \mathcal{N}(0,1)$ onda $Y = X^2$ ima hi-kvadrat raspodelu sa jednim stepenom slobode, $Y : \chi^2_1$, primer 40,

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-y/2}, & y > 0. \end{cases}$$

Na slici desno imamo grafike gustine hi-kvadrat raspodele za $n = 1,2,3,4$ stepeni slobode (n = df = degree of freedom).



Teorema: Ako su $Y_1 : \chi_n^2$ i $Y_2 : \chi_m^2$ nezavisne slučajne promenljive, onda $Y = Y_1 + Y_2 : \chi_{n+m}^2$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z-y,y)\,dy = \int_{-\infty}^{0} + \int_{0}^{z} + \int_{z}^{\infty} = \int_0^z \frac{(z-y)^{n/2-1}\,e^{-(z-y)/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \frac{y^{m/2-1}\,e^{-y/2}}{2^{m/2}\Gamma(m/2)}\,dy =$$

$$= \frac{z^{(n+m)/2-1}\,e^{-z/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma(n/2)\Gamma(m/2)} \int_0^z (1-\frac{y}{z})^{n/2-1} \left(\frac{y}{z}\right)^{m/2-1} \frac{1}{z}\,dy = \frac{z^{(n+m)/2-1}\,e^{-z/2}}{2^{(n+m)/2}\Gamma((n+m)/2)},\ z>0$$

jer je za $x>0$, $y>0$, $B(x,y) = \int_0^1 (1-t)^{x-1}\,t^{y-1}\,dt = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

Napomena: Za $n=1$ smo radili kao transformaciju, za $n=2$ imamo $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.

Posledica 1: Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom, onda $Y = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$ ima χ_n^2 raspodelu.

Posledica 2: Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ raspodelom, onda $Y = \frac{1}{\sigma^2}\left((X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + \cdots + (X_n-\mu)^2\right)$ ima χ_n^2 raspodelu.

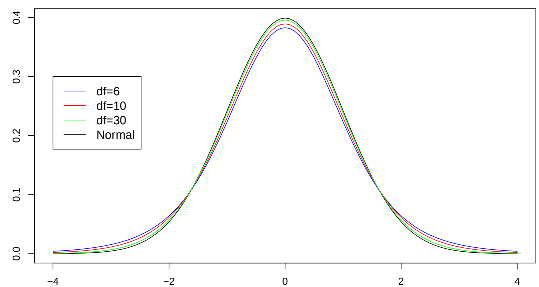
t raspodela (Studentova)

Slučajna promenljiva $T : t_n$ ima **Studentovu raspodelu** sa n stepeni slobode ako ima gustinu

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma(n/2)\ (1+t^2/n)^{(n+1)/2}}.$$

Drugi zapis: $\varphi(t) = \left(\sqrt{n}\, B\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right) \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{(n+1)/2}\right)^{-1}$. $E(T) = 0$, $D(T) = \frac{n}{n-2}$, $n > 2$.

Teorema:
Ako su $X : \mathcal{N}(0,1)$ i $Y : \chi^2_n$ nezavisne sl. prom, onda $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}}$ ima t_n raspodelu.



$F_{m,n}$ raspodela (Fišerova sa m,n stepeni slobode)

$X : F_{m,n}$ ima gustinu $\varphi(x) = \dfrac{\Gamma((m+n)/2)\, m^{m/2}\, n^{n/2}}{\Gamma(m/2)\,\Gamma(n/2)} \cdot \dfrac{x^{m/2-1}}{(mx+n)^{(m+n)/2}}$, za $x > 0$.

$$X : F_{m,n} \;\Rightarrow\; E(X) = \frac{m}{n-2}, n > 2, \quad D(X) = \frac{2n^2\,(m+n-2)}{m\,(n-2)^2\,(n-4)}, n > 4$$

Primer 52 *Neka $T : t_{10}$ i $Y : \chi^2_4$. Naći vrednost za koju je: $P(Y < y_1) = 0.9$, $P(Y > y_2) = 0.95$, $P(T < t_1) = 0.95$, $P(T > t_2) = 0.25$, $P(|T| < t_3) = 0.975$.*

Teorema:

Za X i Y nezavisne slučajne promenljive sa raspodelom $X : \chi^2_m$, $Y : \chi^2_n$ slučajna promenljiva $F = \dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}}$ ima Fišerovu $F_{m,n}$ raspodelu

Primer 53 *Neka $F : F_{9,15}$. Naći vrednost za koju je $P(F > f_1) = 0.05$ i $P(F < f_2) = 0.99$.*

Statistika, osnovni pojmovi

Populacija je skup svih elemenata koje ispitujemo.

Obeležje je numerička karakteristika elementa. Modeliramo ga slučajnom promenljivom.

Uzorak je odabrani deo populacije na kojem ispitujemo realizovanu vrednost obeležja X.

Prost slučajni uzorak je n-dimenzionalna slučajna promenljiva čije komponente su nezavisne i imaju raspodelu posmatranog obeležja $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Uzoračka funkcija raspodele $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)\, F(x_2) \cdots F(x_n)$

Realizovane vrednosti slučajnih promenljivih obeležavamo malim slovima $X_i \to x_i$.

Realizovana vrednost prostog slučajnog uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n) \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Statistika je funkcija uzorka. $Y = h(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

Realizovana vrednost statistike je $y = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Kao transformacija slučajnih promenljivih, **statistika je slučajna promenljiva**.

Raspodela statistike obeležja koje modeliramo se koristi za statističko zaključivanje.

Važne statistike uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ obeležja X

Aritmetička sredina uzorka

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} E(\bar{X}_n) = E(X), \quad D(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} D(X) \\ X : \mathcal{N}(\mu,\sigma) \;\Rightarrow\; \bar{X}_n : \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow\; Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} : \mathcal{N}(0,1) \end{cases}$$

Uzoračka disperzija (varijansa)

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^2 - \bar{X}_n^2,\; E(\bar{S}_n^2) = \frac{n-1}{n} D(X),\; \bar{S}_n = \sqrt{\bar{S}_n^2}.$$

$$X : \mathcal{N}(\mu,\sigma) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Y = \frac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\bar{S}_n^{2\prime}}{\sigma^2} : \chi^2_{n-1}, \\ T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}_n{}'}\sqrt{n} : t_{n-1} \end{cases}$$

Korigovana varijansa $\bar{S}_n^{2\prime} = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^2,\; E(\bar{S}_n^{2\prime}) = D(X),\; \bar{S}_n{}' = \sqrt{\bar{S}_n^{2\prime}}$

Uzorački momenti

Za uzorak $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ definišemo **momenat reda** r kao $M_r = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k^r$,

centralni momenat reda r: $\mu_r = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \bar{X}_n)^r$

Očigledno: $\bar{X}_n = M_1, \quad \bar{S}_n^2 = \mu_2 = M_2 - M_1^2.$

Takođe definišemo **koeficijent spljoštenosti** (kurtosis) kao $\dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$ i

koeficijent asimetrije (skewness) kao $\dfrac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}$.

Intervalni uzorak

Intervalni uzorak nastaje grupisanjem elemenata početnog uzorka u intervale I_i.

Ako imamo granice intervala I_i, odnosno deobene tačke m_i, $i = 0,1,\dots k$ i broj elemenata uzorka u intervalu i: **frekvencije** f_i, $i = 1,2,\dots k$, kažemo da je to **intervalni** uzorak.

Delimična rekonstrukcija početnog uzorka sredinama intervala: smatramo da imamo f_i komada elemenata jednakih $x_i = (m_i + m_{i-1})/2$, sredini i-tog intervala.

Ponekad se anketiranjem podaci prikupljaju u intervalni uzorak.

Formule za računanje aritmetičke sredine i varijanse intervalnog uzorka sa sredinama x_i, $i = 1,2,\dots,k$ i frekvencijama f_i, $i = 1,2,\dots,k$ su:

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i\,, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\,, \quad \bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_n)^2 f_i\,, \quad \bar{s}_n = \sqrt{\bar{s}_n^2}\,, \quad \bar{s}_n^{2\,\prime} = \frac{n}{n-1}\bar{s}_n^2\,.$$

Primer 54 *Anketirani su kupci o vremenu u godinama do prvog kvara na bojleru*

I_i	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,5]$	$(5,10]$	$(10,20]$
f_i	15	11	7	7	6	4

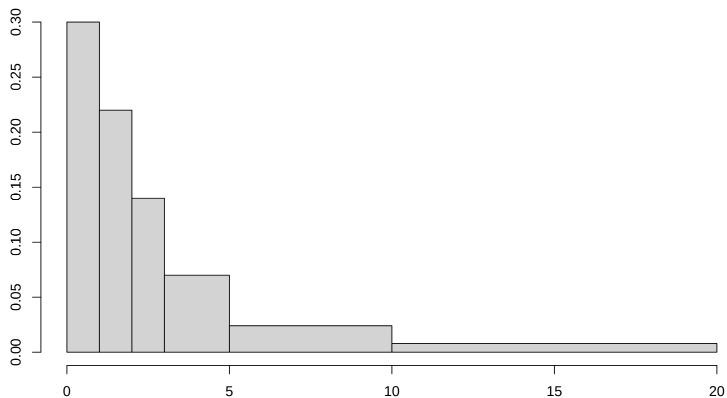
$n = 15 + 11 + 7 + 7 + 6 + 4 = 50$, $\quad \bar{x}_n = (0.5 \cdot 15 + 1.5 \cdot 11 + \cdots + 15 \cdot 4)/50 = 3.49$,

$\bar{s}_n^2 = ((0.5 - 3.49)^2 \cdot 15 + \cdots + (15 - 3.49)^2 \cdot 4)/50 = 16.2549$, $\quad \bar{s}_n = \sqrt{16.2549} = 4.0317$.

Za crtanje histograma i poligona dopunili smo tabelu sa četiri nove vrste ($\bar{f}_i = f_i/h_i$, $p_i = \bar{f}_i/n$):

I_i	[0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,5]	(5,10]	(10,20]
f_i	15	11	7	7	6	4
x_i	0.5	1.5	2.5	4	7.5	15
h_i	1	1	1	2	5	10
$\bar{f}_i$	15	11	7	3.5	1.2	0.4
p_i	0.30	0.22	0.14	0.07	0.024	0.008

Histogram i poligon



Neka interval $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ sadrži sve vrednosti obeležja X. Taj interval delimo tačkama $a := m_0 < m_1 < \cdots < m_k =: b$ na k podintervala: $I_1 = [m_0, m_1]$, $I_2 = (m_1, m_2], \ldots, I_k = (m_{k-1}, m_k]$. **Širina** intervala I_i je $h_i := m_i - m_{i-1}$, a **frekvencija** f_i je broj elemenata u intervalu I_i

Nad svakim od podintervala I_i, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ nacrtamo pravougaonik visine $\bar{f}_i = \frac{f_i}{h_i}$, gde je f_i frekvencija, a h_i širina i-tog intervala. Dobili smo **histogram** realizovanog uzorka.

Neka je x_i sredina intervala I_i, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$. Neka je x_0 tačka na x-osi koja je od a manja za onoliko koliko je x_1 veća od a i neka je x_{k+1} tačka na x-osi koja je od b veća za onoliko koliko je x_k manja od b. Izlomljenu linija koja polazi od x_0, prolazi kroz tačke $(x_i, \frac{f_i}{h_i})$ i završava u tački x_{k+1} nazivamo **poligonom** realizovanog uzorka.

Tabelarni uzorak

Za diskretno obeležje uzorak se može zadati tabelom u kojoj se navode vrednosti obležja i **frekvencije** pojavljivanja u uzorku.

Formule za računanje aritmetičke sredine i standardne devijacije tabelarnog uzorka sa vrednostima x_i, $i = 1,2,\ldots,k$ i frekvencijama f_i, $i = 1,2,\ldots,k$ su:

$$n = \sum_{i=1}^{k} f_i\,, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i\,, \quad \bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x}_n)^2 f_i\,, \quad \bar{s}_n^{2\prime} = \frac{n}{n-1}\bar{s}_n^2\,.$$

PRIMER 55 *Kockica je bačena 100 puta. Rezultati bacanja:*

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	15	17	18	21	15	14

Izračunati uzoračku srednju vrednost i varijansu.

$n = 15 + 17 + 18 + 21 + 15 + 14 = 100,$

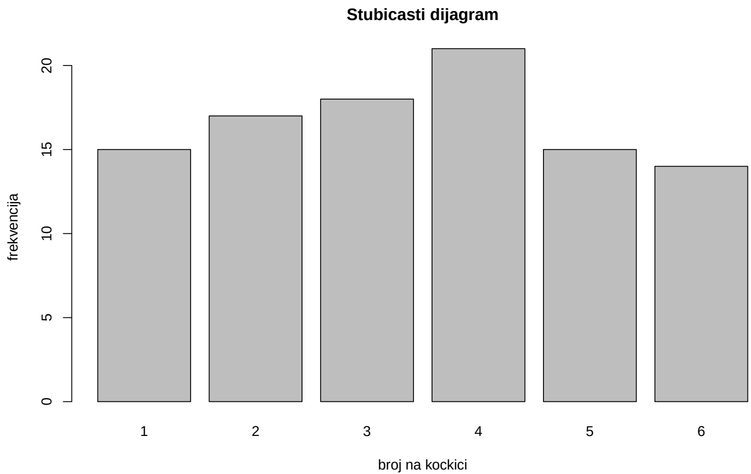
$\bar{x}_n = (1 \cdot 15 + 2 \cdot 17 + \cdots + 6 \cdot 14)\,/100 = 3.46,$

$\bar{s}_n^2 = \left((1 - 3.46)^2 \cdot 15 + (2 - 3.46)^2 \cdot 17 + \cdots + (6 - 3.46)^2 \cdot 14\right)/100 = 2.6284$

Stubičasti dijagram i pita

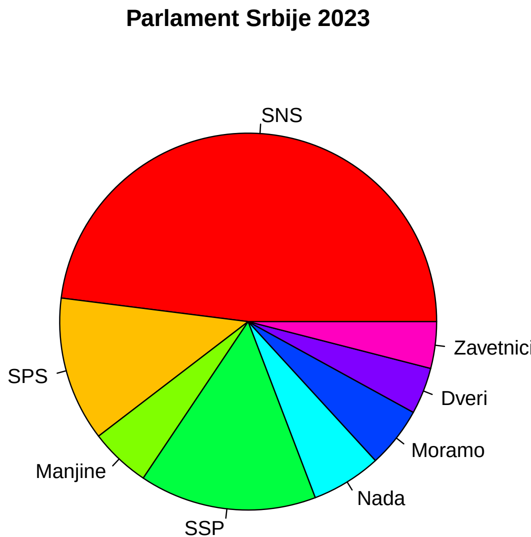
PRIMER 56 *Nacrtati stubičasti dijagram za uzorak iz prethodnog zadatka:*

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	15	17	18	21	15	14



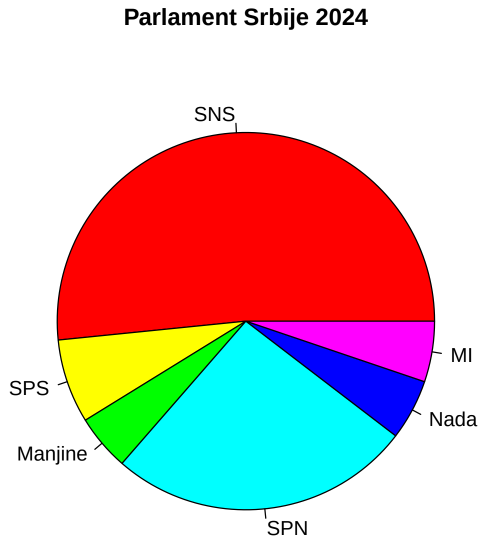
Primer: Sadržaj Parlamenta Srbije pre raspuštanja 2023.

SNS	SPS	Manjine	SSP	Nada	Moramo	Dveri	Zavetnici
120	31	13	38	15	13	10	10



Primer: Sadržaj Parlamenta Srbije posle izbora 2023.

SNS	SPS	Manjine	SPN	Nada	Mi
129	18	12	65	13	13



Modus uzorka

Modus je ona vrednost obeležja X kojoj odgovara najveća frekvencija. Ako je uzorak intervalni sa intervalima iste veličine, onda se modus nalazi na sledeći način $Mo = m_{s-1} + d\frac{r_1}{r_1+r_2}$ gde je $I_s = (m_{s-1}, m_s)$ interval sa najvećom frekvencijom (modalni interval), d je dužina intervala, $r_1 = f_s - f_{s-1}$ je razlika najveće frekvenije i frekvencije iz intervala koji prethodi modalnom, $r_2 = f_s - f_{s+1}$ je razlika najveće frekvencije i frekvencije iz intervala posle modalnog.

Medijana uzorka

Medijana Me je sredina uzorka, odnosno to je ona vrednost realizovanog uzorka za koju važi $\mathsf{P}(X < Me) = \mathsf{P}(X > Me)$. Ako je uzorak neopadajući medijana se izračunava: $Me = x_{\frac{n+1}{2}}$, za n neparno, odnosno $\frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{(\frac{n}{2}+1)})$ za n parno.

Ako je uzorak intervalni veličine n onda se medijana računa $Me = m_{l-1} + h_l \frac{\frac{n}{2} - k_{l-1}}{f_l}$, gde je $I_l = (m_{l-1}, m_l)$ medijalni interval, $h_l = m_l - m_{l-1}$ širina medijalnog intervala, $k_{l-1} = \sum_{i=1}^{l-1} f_i$ kumulativna frekvencija intervala I_{l-1} koji prethodi medijalnom intervalu I_l, f_l frekvencija medijalnog intervala. Medijalni interval I_l je interval sa najmanjom kumulativnom frekvencijom većom od $\frac{n}{2}$.

Uzoračka funkcija raspodele

Uzoračka (empirijska) funkcija raspodele F_n^* obeležja X je funkcija definisana za svako x na sledeći način:

$$F_n^*(x) = \frac{N_x}{n}$$

gde je N_x broj elemenata uzorka koji su manji ili jednaki od x, a n je obim realizovanog uzorka. **Realizovana empirijska funkcija raspodele** f_n^* je data sa

$$f_n^*(x) = \frac{n_x}{n}$$

gde je n_x realizovana vrednost promenljive N_x na uzorku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Kvantili (percentili)

Za slučajnu pormenljivu X

p-ti **kvantil** je vrednost x za koju je $F(x) = p$. (za percentil $p/100$)

Vrednost x za koju je $F(x) = P(X \leq x) = k/4$ zovemo k-ti **kvartil**, Q_k, $k = 1,2,3$.

Za $X : \mathcal{N}(0,1)$ u R-u `qnorm(.25)` daje prvi kvartil. `pnorm(x)` daje funkciju $F(x) = \Phi(x)$.

Za uzorak obeležja X

Ako je $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sortiran uzorak, $q = (n-1)\,p + 1$ i $m = \lfloor q \rfloor$, p-ti **kvantil** je: $x_{(p)} = x_m + (q-m)\,(x_{m+1} - x_m)$. $x_{(k/4)}$ je k-ti **kvartil**, $k = 1,2,3$. $Me = x_{(1/2)}$.

Inter-kvartilni razmak (IQR)

Mera rasutosti uzorka $IQR = Q_3 - Q_1$, gde su Q_3 i Q_1 redom treći i prvi kvartil.

Q-Q plot

Crtaju se tačke u ravni. Apscise se uzimaju iz realizovane vrednosti uzorka, ordinate su kvantili iz pretpostavljene raspodele. Dobijeni skup tačaka treba da daje pravu liniju ako se raspodele slažu.

Pri crtanju se može povući linija kvantila raspodele. U R-u: `qqnorm i qqline`.

Box plot

Box plot je kutija (pravougaonik) sa telom od prvog do trećeg kvartila, linijom preko medijane i brkovima na $Q_1 - 1.5\,IQR$ i $Q_3 + 1.5\,IQR$ ili minimumu i maksimumu uzorka.

Tačkaste ocene parametara

Raspodela obeležja zavisi od (nepoznatog) parametra θ, kojeg ocenjujemo pomoću (realizovane vrednosti) uzorka.

Ocenjivač neke funkcije parametra $\tau(\theta)$ je statistika $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ čija realizovana vrednost (**ocena**) $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je bliska $\tau(\theta)$.

Ocenjivač U je **postojan** za $\tau(\theta)$ ako $\lim\limits_{n\to\infty} P(|\tau(\theta) - u(X_1, X_2, \ldots, X_n)| > \varepsilon) = 0$ za sve $\varepsilon > 0$.

Ocenjivač U je **centriran** za $\tau(\theta)$ ako $E(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \tau(\theta)$, a **asimptotski centriran** ako $\lim\limits_{n\to\infty} E(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \tau(\theta)$.

PRIMER 57 *Ispitati postojanost ocenjivača $\bar{X}_n$ za μ, obeležja $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$.*

Aritmetička sredina uzorka $\bar{X}_n$ je centriran i postojan ocenjivač parametra jednakog matematičkom očekivanju obeležja.

PRIMER 58 *Naći centrirani ocenjivač parametra jednakog disperziji obeležja.*

Srednja kvadratna greška ocenjivača U za $\tau(\theta)$ je $E((U - \tau(\theta))^2) = D(U) + ((E(U) - \tau(\theta))^2$

Ako su U_1 i U_2 centrirani ocenjivači za $\tau(\theta)$ i $D(U_1) < D(U_2)$, kažemo da je ocenjivač U_1 **efikasniji** od U_2. Za obeležje i parametar postoji **najbolja** disperzija σ_0^2 koja se može postići.

Metod momenata

Ocene parametara dobijamo iz jednačina u kojima izjednačavamo uzoračke momenta sa momentima obeležja.

PRIMER 59 *Metodom momenata naći ocene parametara μ i σ obeležja $X:\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.*

Metod maksimalne verodostojnosti

Za ocenu parametra θ od koga zavisi gustina raspodele $\varphi(x,\theta)$ ili zakon raspodele $p_i = p(x_i,\theta)$ uzima se vrednost $\theta = \theta(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ za koju se ostvaruje maksimum (ako postoji) funkcije verodostojnosti koja se za realizovanu vrednost uzorka $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ računa:

$$L = L(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta) = \begin{cases} \varphi(x_1,\theta)\,\varphi(x_2,\theta)\,\ldots\,\varphi(x_n,\theta), & \text{neprekidno} \\ p(x_1,\theta)\,p(x_2,\theta)\,\ldots\,p(x_n,\theta), & \text{diskretno obeležje} \end{cases}$$

PRIMER 60 *Naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametara μ i σ^2 za $X:\mathcal{N}(\mu,\sigma)$.*

PRIMER 61 *Naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametra λ obeležja $X:\mathcal{P}(\lambda)$, ispitati njenu centriranost i postojanost.*

Intervali poverenja

Za obeležje X raspodele $F(x,\theta)$, sa uzorkom $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ako su $U_1 = u_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ statistike za koje važi $P(U_1 < \theta < U_2) = \beta$, gde je β unapred zadat **nivo poverenja**, onda je (U_1, U_2) **interval poverenja** širine β.

Za očekivanje μ obeležja $X : \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, σ poznato

Ako $X : \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ onda $\bar{X}_n : \mathcal{N}(\mu, \sigma/\sqrt{n})$, odnosno, onda $Z = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} : \mathcal{N}(0,1)$.

Označimo sa z_β vrednost za koju je $P\left(|Z| < z_\beta\right) = \beta$. $\left(z_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right) \text{ je } \frac{1+\beta}{2} \text{ kvantil}\right)$.

Onda je $U_1 = \bar{X}_n - z_\beta \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $U_2 = \bar{X}_n + z_\beta \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Izraz $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ nazivamo **standardna greška**.

Za očekivanje μ obeležja $X : \mathcal{N}(\mu,\sigma)$, σ nepoznato

Ako $X : \mathcal{N}(\mu,\sigma)$ onda $T = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1} = \dfrac{\bar{X}_n - \mu}{\bar{S}'_n}\sqrt{n} : t_{n-1}$.

Označimo sa t_β vrednost za koju je $P\left(|T| < t_\beta\right)$. ($t_\beta$ je $(1+\beta)/2$ kvantil raspodele t_{n-1}.)
Onda je $U_1 = \bar{X}_n - t_\beta \dfrac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}$, $U_2 = \bar{X}_n + t_\beta \dfrac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}$. **Standardna greška** je $\dfrac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}} = \dfrac{\bar{S}'_n}{\sqrt{n}}$.

Primer 62 *Naći 90% interval poverenja za srednju vrednost m obeležja sa normalnom $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ raspodelom*

(a) Ako je poznato $\sigma = 3$, *(b) ako je σ nepoznato,*

za uzorak $(17.3, 12.9, 10.4, 11.9, 9.9, 8.9, 9.9, 6.3, 12.9, 9.4)$.

($n = 10$, $\bar{x}_n = 10.98$, $\bar{s}'_n = 2.973139$, $z_{0.9} = 1.645$, $t_{0.9} = 1.833$)

```
> x<-c(17.3, 12.9, 10.4, 11.9, 9.9, 8.9, 9.9, 6.3, 12.9, 9.4)
> n<-10; xn<-mean(x); sn<-sd(x); z<-qnorm(.95); t<-qt(.95,9);
> xn-z*3/sqrt(10)
[1] 9.419555
> xn+z*3/sqrt(10)
[1] 12.54045
> xn-t*sn/sqrt(10)
[1] 9.256527
> xn+t*sn/sqrt(10)
[1] 12.70347
```

Za disperziju σ^2 obeležja $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Ako $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ onda $Y = \dfrac{n\bar{S}_n^2}{\sigma^2} : \chi^2_{n-1}$.

Neka su $y_{(1-\beta)/2}$ i $y_{(1+\beta)/2}$ redom $(1-\beta)/2$ i $(1+\beta)/2$ kvantili χ^2_{n-1} raspodele, odnosno, $P(y_{(1-\beta)/2} < Y < y_{(1+\beta)/2}) = \beta$.

Onda $P\left(\dfrac{n\bar{S}_n^2}{y_{(1+\beta)/2}} < \sigma^2 < \dfrac{n\bar{S}_n^2}{y_{(1-\beta)/2}}\right) = \beta$, odnosno, $P\left(\sqrt{\dfrac{n\bar{S}_n^2}{y_{(1+\beta)/2}}} < \sigma < \sqrt{\dfrac{n\bar{S}_n^2}{y_{(1-\beta)/2}}}\right) = \beta$.

PRIMER 63 *Naći 90% interval poverenja za nepoznatu varijansu obeležja iz primera 62.*

```
> y0<-qchisq(.05,9); y1<-qchisq(.95,9); # nastavak iz primera 48
> 9*sn^2/y1
[1] 4.702175
> 9*sn^2/y0
[1] 23.9258
```

Za nepoznatu verovatnoću p

Ako obeležje ima Bernulijevu raspodelu: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, naći interval poverenja za p.

Moavr-Laplasova teorema: za $K = \sum X_i$, $\dfrac{K - np}{\sqrt{np(1-p)}} \to Z : \mathcal{N}(0,1)$. Za $z_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ važi

$$\beta \approx P\left(\left|\frac{K - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right| < z_\beta\right) = P\left(\left(\frac{K - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2 < z_\beta^2\right) =$$

$$= P\left((n^2 + z_\beta^2 n)p^2 + (-2Kn - z_\beta^2 n)p + K^2 < 0\right) = P(U_1 < p < U_2),$$

gde su $U_{1,2}$ rešenja kvadratne jednačine.

PRIMER 64 *U filmu I-origin radi se test: 25 puta se postavlja pitanje sa istom verovatnoćom tačnog odgovora. Kandidat 11 puta odgovara tačno. Naći 90% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću tačnog odgovora.*

```
> n<-25; K<-11; z<-qnorm(.95);
> a<-n^2+z^2*n; b<--2*K*n-z^2*n; c<-K^2; d<-b^2-4*a*c;
> x1<-(-b-sqrt(d))/2/a; x2<-(-b+sqrt(d))/2/a;
> x1
[1] 0.2906299
> x2
[1] 0.6010886
```

Testiranje hipoteza

Statistički testovi

Hipoteza H_0 protiv H_1

	Usvojena H_0	Usvojena H_1
Tačna H_0	OK	Greška I vrste
Tačna H_1	Greška II vrste	OK

Parametarske hipoteze

- Zadaje se prag značajnosti α (recimo $\alpha = 5\% = 0.05$)
- Bira se parametar raspodele obeležja (θ).
- Nalazi se statistika koja je ocenjivač parametra $\hat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n)$.
- Nalazi se kritična oblast C (koja daje nedozvoljene vrednosti) parametra, takva da je $P_{H_0}(\hat{\theta} = h(X_1, \ldots, X_n) \in C) = \alpha$.
- Računa se realizovana vrednost statistike uzorka $\theta = h(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i ako $\theta \in C$, odbacujemo H_0 (i usvajamo H_1).

$H_0(\mu=\mu_0)$ **protiv** $H_1(\mu\neq\mu_0)$ **za** $X:\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, σ **poznato**

Koristimo interval poverenja za nepoznato očekivanje m obeležja sa normalnom raspodelom, σ poznato, širine $\beta=1-\alpha$. ($X^*:\mathcal{N}(0,1)$)

$$\mu_0\in\mathbb{R}\backslash\left(\bar{x}_n\mp z_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow z:=\frac{|\bar{x}_n-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}>z_\beta\Leftrightarrow\alpha^*:=P_{H_0}\left(|X^*|>\frac{|\bar{x}_n-\mu_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right)<\alpha$$

$H_0(\mu=\mu_0)$ **protiv** $H_1(\mu\neq\mu_0)$ **za** $X:\mathcal{N}(\mu,\sigma)$, σ **nepoznato**

Koristimo interval poverenja za nepoznato očekivanje m obeležja sa normalnom raspodelom, σ nepoznato, širine $\beta=1-\alpha$. ($T:t_{n-1}$)

$$\mu_0\in\mathbb{R}\backslash\left(\bar{x}_n\mp t_\beta\frac{\bar{s}'_n}{\sqrt{n}}\right)\Leftrightarrow t:=\frac{|\bar{x}_n-\mu_0|}{\bar{s}'_n}\sqrt{n}>t_\beta\Leftrightarrow\alpha^*:=P_{H_0}\left(|T|>\frac{|\bar{x}_n-\mu_0|}{\bar{s}'_n}\sqrt{n}\right)<\alpha$$

PRIMER 65 *Testirati hipotezu $H_0(\mu=13)$ za uzorak iz zadatka 62.*

PRIMER 66 *Testirati hipotezu $H_0(p=1/3)$ za uzorak iz zadatka 64.*

$H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ **protiv** $H_1(\sigma^2 \neq \sigma_0^2)$ **za** $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Koristimo $\beta = 1 - \alpha$ interval poverenja za nepoznatu varijansu σ^2 obeležja sa normalnom raspodelom.

$$\frac{n\,\bar{s}_n^2}{y_{(1+\beta)/2}} < \sigma_0^2 < \frac{n\,\bar{s}_n^2}{y_{(1-\beta)/2}} \Leftrightarrow H_0 \text{ ne odbacujemo}$$

Jednostrani testovi

Alternativna hipoteza je $H_1(\mu < \mu_0)$ ili $H_1(\mu > \mu_0)$

Koristimo jednostrane intervale poverenja sa $z_1 = \Phi^{-1}(\beta)$ umesto $z_\beta = \Phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$

Za varijansu $H_1(\sigma^2 > \sigma_0^2)$ koristimo jednostrani interval poverenja $\left(0, \dfrac{n\bar{s}_n^2}{y_{1-\beta}}\right)$, gde je $y_{1-\beta}$ kvantil koji odgovara $\alpha = 1 - \beta$ za χ^2_{n-1}.

Primer 67 *Za uzorak iz zadatka 62 testirati hipotezu* $H_0(\sigma^2 = 25)$ *protiv* $H_1(\sigma^2 > 25)$.

```
> 9*sn^2/y0; # nastavak iz primera 59 i 60
[1] 23.9258     # odbacujemo hipotezu
```

Testiranje jednakosti srednjih vrednosti dva uzorka

$H_0(\mu_1 = \mu_2)$ **protiv** $H_1(\mu_1 \neq \mu_2)$**,** σ_1**,** σ_2 **poznato, obeležja sa** $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ **i** $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ **raspodelama**

Koristimo statistiku $Z := \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$ koja ima $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu

$H_0(\mu_1 = \mu_2)$ **protiv** $H_1(\mu_1 \neq \mu_2)$ **(T-test)**

Koristimo statistiku $T := \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\bar{S}_1^{2\prime}}{n_1} + \frac{\bar{S}_2^{2\prime}}{n_2}}}$, koja približno ima t_ν raspodelu,

gde se za ν uzima procena Welcha: $\nu = \dfrac{\left(\frac{\bar{s}_1^{2\prime}}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^{2\prime}}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1 - 1}\left(\frac{\bar{s}_1^{2\prime}}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2 - 1}\left(\frac{\bar{s}_2^{2\prime}}{n_2}\right)^2}$.

PRIMER 68 *Testirati jednakost srednjih vrednosti obeležja 9.81, 9.83, 10.43, 11.13, 9.70, 9.59, 10.88, 10.97, 9.35, 9.34, 9.41, 9.95 i obeležja 9.85, 9.30, 9.08, 8.07, 9.22, 9.55, 7.88, 7.84, 8.50, 11.95, 10.92, 9.78 sa Normalnim raspordelama.*

```
> t.test(c(9.81, 9.83, 10.43, 11.13, 9.70, 9.59, 10.88, 10.97, 9.35, 9.34, 9.41, 9.95),
         c( 9.85, 9.30, 9.08, 8.07, 9.22, 9.55, 7.88, 7.84, 8.50, 11.95, 10.92, 9.78))
  Welch Two Sample t-test
t  = 1.7536, df = 16.766, p-value = 0.09776
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.1439427 1.5522760
sample estimates:
mean of x mean of y
10.032500 9.328333
```

Razlika srednjih vrednosti je $10.032500 - 9.328333 = 0.704167$.

Vrednost 0 pripada intervalu poverenja širine 95% oko razlike $(-0.1439427, 1.5522760)$.

Welchova ocena je $\nu = 16.76$, p-vrednost je $\alpha^* = 0.09776 > 0.05$.

Realizovana vrednost statistike je $t = 1.7536 < t_{0.975;16} = 2.120$.

Zaključak: Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ ne odbacujemo Nultu hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti.

T-test parova

Koristi se kad imamo dva obeležja sa uparenim vrednostima ("pre" i "posle"): $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
Nalazimo $t_1 = x_1 - y_1, t_2 = x_2 - y_2, \ldots, t_n = x_n - y_n$ i testiramo $H_0(\mu = 0)$ protiv $H_1(\mu \neq 0)$ ili $H_1(\mu < 0)$ ili $H_1(\mu > 0)$, sa σ nepoznato za uzorak $t_1, t_2, \ldots, t_n$

PRIMER 69 *Testirati hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti obeležja sa normalnom raspodelom pre i posle tretmana.*

pre	9.81	9.83	10.43	11.13	9.70	9.59	10.88	10.97	9.35	9.34	9.41	9.95
posle	9.85	9.30	9.08	8.07	9.22	9.55	7.88	7.84	8.50	11.95	10.92	9.78

```
> t.test(c(9.81, 9.83, 10.43, 11.13, 9.70, 9.59, 10.88, 10.97, 9.35, 9.34, 9.41, 9.95),
         c( 9.85, 9.30, 9.08, 8.07, 9.22, 9.55, 7.88, 7.84, 8.50, 11.95, 10.92, 9.78),
         paired = T)
  Paired t-test
t = 1.3796, df = 11, p-value = 0.1951
alternative hypothesis: true mean difference is not equal to 0
95 percent confidence interval:  -0.4192785 1.8276118
```

Ne odbacujemo hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Testiranje jednakosti proporcija dva uzorka

Primer 70 *Da li veruju u zagrobni život? Pitali su 684 žena, 550 odgovorilo sa DA i 563 muškarca, 425 odgovorilo sa DA. Testirati hipotezu da su proporcije jednake.*

$H_0(p_1 = p_2)$ protiv $H_1(p_1 \neq p_2)$

Neka broj pozitivnih odgovora žena ima $X_1 : \mathcal{B}(n_1, p_1)$ a muškaraca $X_2 : \mathcal{B}(n_2, p_2)$.

Neka $\hat{p} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2}$, $\hat{p_1} = \frac{X_1}{n_1}$, $\hat{p_2} = \frac{X_2}{n_2}$, onda statistika $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\,(1-\hat{p})\,(1/n_1 + 1/n_2)}}$,
ako je tačna Nulta hipoteza, ima približno Normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu $\Leftrightarrow$ $Z^2 : \chi_1^2$.

```
> prop.test(c(550, 425), c(684, 563), correct=F)
  2-sample test for equality of proportions without continuity correction
data:  c(550, 425) out of c(684, 563)
X-squared = 4.3848, df = 1, p-value = 0.03626
alternative hypothesis: two.sided
95 percent confidence interval:
 0.002870906 0.095547134
sample estimates:
   prop 1    prop 2
0.8040936 0.7548845
```

Odbacujemo Nultu hipotezu o jednakosti proporcija sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Neparametarski testovi $H_0(F(x) = F_0(x))$ protiv $H_1(F(x) \neq F_0(x))$

χ^2 test

Uzorak se grupiše u intervale I_i, sa deobenim tačkama m_i, $i = 0,1,\ldots k$ i brojem elemenata uzorka u intervalu i jednak f_i, $i = 1,2,\ldots k$. (Treba $f_i \geq 5$.)

Može se pokazati da se za dovoljno veliki obim uzorka n, raspodela statistike

$$Y = \sum_{i=1}^{k} \frac{(F_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}, \text{ gde je } p_i = P(m_{i-1} < X \leq m_i),\ f_i \text{ realizovana vrednost } F_i,$$

može aproksimirati χ^2_{k-1} raspodelom. Ako se ocenjuje s parametara, onda χ^2_{k-1-s}.

Ako realizovana vrednost statistike $y > y_{1-\alpha}$, gde je $y_{1-\alpha}$ kvantil χ^2 raspodele sa $k-1-s$ stepeni slobode, $s =$ broj ocenjivanih parametara, odbacujemo nultu hoipotezu H_0.

Primer 71 *U Mendelovim eksperimentima ukršteni pasulji su dali 315 okruglih žutih, 108 okruglih zelenih, 101 naboranih žutih i 32 naborana zelena zrna. Po njegovoj teoriji, njihov odnos bi trebao biti 9:3:3:1. Da li je njegova teorija ispravna? Kolika je p-vrednost?*

```
> chisq.test(c(315,108,101,32),p=c(9,3,3,1)/16)
  Chi-squared test for given  probabilities
X-squared = 0.47002, df = 3, p-value = 0.9254
```

Ne odbacujemo nultu hipotezu. P-vrednost je velika!

Tabela kontigencije

χ^2-test nezavisnosti obeležja. Obeležje X uzima m mogućih vrednosti, Y uzima n vrednosti. Formira se tabela $m \times n$ verovatnoća $p_{i,j}$ izračunatih preko marginalnih verovatnoća $p_{i,j} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}$, koje se dobijaju koristeći marginalne frekvencije.

Statistika $Y = \sum_{i,j} \frac{(F_{i,j} - N\, p_{i\cdot}\, p_{\cdot j})^2}{N\, p_{i\cdot}\, p_{\cdot j}}$ ima približno χ^2 raspodelu sa $(m-1)\,(n-1)$ st. sl.

Primer 72 *U tabeli su dati brojevi studenata koji su položili i pali kolokvijum kod tri asistenta. Testirati hipotezu da su procenti položenih nezavisni od asistenta.*

	X	*Y*	*Z*	
pali	*50*	*47*	*56*	*153*
položili	*5*	*14*	*8*	*27*
ukupno	*55*	*61*	*64*	

```
> chisq.test(matrix(c(50,5,47,14,56,8), ncol = 3)))
  Pearson Chi-squared test
X-squared = 4.8444, df = 2, p-value = 0.08873
```

Ne odbacujemo nultu hipotezu o nezavisnosti obeležja sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Test Kolmogorov-Smirnov

Primenjujemo ga za poznatu neprekidnu raspodelu

Statistika koju koristimo je

$$D_n = \sup_x |F_n^*(x) - F(x)|, \text{ važi } P(\sqrt{n}D_n \leq \lambda) \to D(\lambda), \text{ za } n \to \infty, \text{ gde je}$$

$D(\lambda)$ funkcija raspodele Kolmogorov-Smirnov čiji kvantili su $\lambda_{0.95} = 1.36$ i $\lambda_{0.99} = 1.63$.

PRIMER 73 *Za 100 brojeva generisanih pseudo-slučajnim generatorom u intervalu* $(0,1)$ *testirati da li su uniformno raspoređeni testom Kolmogorov-Smirnov sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$. *Ponoviti testiranje 5000 puta. Proveriti u kojem procentu slučajeva hipoteza biva odbačena.*

```
set.seed(12345); n<-5000; s<-numeric(n);
for(k in 1:n){s[k]<-ks.test(runif(100),'punif')$p.value};
sum(s<.05)/n
```

```
0.0436
```

Regresija

Za slučajne promenljive X i Y definišemo **kovarijansu**:

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E((X-E(X))(Y-E(Y))) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

i **koeficijent korelacije**:

$$\rho_{X,Y} = \operatorname{cov}(X^*,Y^*) = \operatorname{cov}\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right) = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

Osobine:

1. $\operatorname{cov}(X,X) =: D(X) = \operatorname{var}(X)$
2. X i Y nezavisne $\Rightarrow \rho_{X,Y} = \operatorname{cov}(X,Y) = 0$
3. $|\rho_{X,Y}| \leq 1, \quad |\rho_{X,Y}| = 1 \Leftrightarrow Y = a\mathrm{X} + b,\ a,b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$
4. $\operatorname{cov}(\sum_{i=1}^{m} X_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i,Y_j)$
5. $\operatorname{var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(X_i,X_j) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{var}(X_i) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} \operatorname{cov}(X_i,X_j)$

6. $\rho_{X,Y} = \rho_{X_1,Y_1}$, gde su $X_1 = a + bX$ i $Y_1 = c + dY$, za pozitivne konstante a,b,c,d.

Ako posmatramo dvodimenzionalni uzorak $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),\ldots,(X_n,Y_n)$, odnosno, za realizovanu vrednost $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, definišemo **uzorački koeficijent korelacije**:

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2}} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i y_i - \bar{x}_n\bar{y}_n}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}_n^2}\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^2 - \bar{y}_n^2}}$$

U R-u cov $(x,y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n)$, cor $(x,y) =$ cov (x,y) / sd (x) / sd (y)

Linearna regresija najmanjih kvadrata

Za n parova tačaka $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, tražimo vezu između x i y u obliku prave linije $y = a + bx$.

Tražimo vrednosti a i b za koje funkcija $g(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))^2$ ostvaruje minimum.

Funkcija g je konveksna i minimum je stacionarna tačka:

$$\frac{\partial g}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))\,(-1) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (y_i - (a + bx_i))\,(-x_i) = 0.$$

Rešavanje ovog sistema po a i b daje: $b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)\,(y_i - \bar{y}_n)}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2} = r\dfrac{s_y}{s_x} = r\dfrac{s'_y}{s'_x}$, $a = \bar{y}_n - b\bar{x}_n$,

gde su s_x i s_y standardne devijacije uzorka x i y, a s'_x i s'_y korigovane standardne devijacije.

Za tako izračunate a i b funkciju $\hat{y} = a + bx$ zovemo **prava najmanjih kvadrata**. Vrednosti $\hat{y}_i = a + bx_i$ su **predikcije**. Važi $\bar{\hat{y}}_n = \bar{y}_n$. Prava najmanjih kvadrata prolazi kroz $(\bar{x}_n, \bar{y}_n)$.

$$ss_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2,\ ss_y = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_n)^2,\ s_{xy} = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)\,(y_i - \bar{y}_n),\ \Rightarrow\ r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{ss_x\, ss_y}},\ b = \frac{s_{xy}}{ss_x}.$$

Sa tim oznakama imamo: $s_{xy} = r\sqrt{ss_x}\sqrt{ss_y}$, takođe: $b = r\,\frac{\sqrt{ss_x}\sqrt{ss_y}}{ss_x} = r\,\frac{\sqrt{ss_y}}{\sqrt{ss_x}}$.

Može se pokazati: $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}((y_i - \hat{y}_i) + (\hat{y}_i - \bar{y}_n))^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2$.

Takođe: $\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a + bx_i - (a + b\bar{x}_n))^2 = b^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2 = b^2 ss_x = r^2 ss_y$.

Odatle: $r^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_n)^2}{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2} = \frac{\text{varijansa predikcija } y}{\text{varijansa realizovanih } y}$, odnosno, $r^2 \cdot 100\%$ je procenat varijanse objašnjene pravom linijom najmanjih kvadrata.

Vrednosti $\epsilon_i = y_i - \hat{y}_i$ zovemo **reziduali**. **Rezidual plot** je skup tačaka (x_i, ϵ_i).

PRIMER 74 *Napraviti scatter plot, linearni model, naći koeficijent korelacije, napraviti rezidual plot i naći procenat varijacije koji se objašnjava linearnim modelom za uzorak:*

s	15	13	20	23	11	21.5	12	23	23	19	19	19	21.8	17	20	17	20	16	11	12
f	8	8	16	14	7	15.5	8	21	15.5	16	4.5	13	13.5	12	16	8	15	8	7	6

Analiza varijanse ANOVA (jednofaktorska)

$H_0(m_1 = m_2 = \cdots = m_G)$, $H_1(\exists i, j, m_i \neq m_j)$

Poljoprivredni proizvođač želi da testira kvalitet četiri vrste semena soje: A, B, C, D i u tom cilju je odabrao 30 parcela iste površine koje imaju sličan kvalitet zemljišta, drenažu i izloženost suncu. Dobijeni su sledeći prinosi:

Seme	Prinos
A	46,43,43,46,44,42
B	51,58,62,49,53,51,50,59
C	37,39,41,38,39,37,42,36,40
D	42,43,42,45,47,50,48

Primer 75 *Metodom analize varijanse ispitati da li postoje razlike u prosečnim prinosima soje kod semena A, B, C, D sa nivoom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

```
> read.csv("prinosi.csv")->prinosi
> boxplot(prinos ~ seme, data = prinosi)
> summary(prinosi)
     prinos      seme
 Min.   :36.00   A:6
 1st Qu.:41.25   B:8
 Median :43.50   C:9
 Mean   :45.43   D:7
 3rd Qu.:49.75
 Max.   :62.00
> prinostab<-lm(prinos~seme,data=prinosi)
```

Analiza varijanse Fišerovom statistikom

Grupa	Merenje					Grupna sredina
1	Y_{11}	Y_{12}	$\cdots$	Y_{1n_1}		$\bar{Y}_{1\cdot}$
2	Y_{21}	Y_{22}	$\cdots$		Y_{2n_2}	$\bar{Y}_{2\cdot}$
$\vdots$			$\ddots$			
G	Y_{G1}	Y_{G2}	$\cdots$	Y_{Gn_G}		$\bar{Y}_{G\cdot}$

$$\left(\bar{Y}_{g\cdot} = \frac{1}{n_g}\sum_{k=1}^{n_g} Y_{gk}\right)$$

$$Y_{gk} = m_g + \epsilon_{gk}, \text{ gde je } m_g = E(Y_{gk}), \quad \bar{Y}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{n_g} Y_{gk} = \frac{1}{n}\sum_{g=1}^{G} n_g \bar{Y}_{g\cdot}, \quad n = \sum_{k=1}^{G} n_g$$

$$\text{Treatment: } SSTR = \sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{n_g}(\bar{Y}_{g\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2 = \sum_{g=1}^{G} n_g(\bar{Y}_{g\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$$

$$\text{Error: } SSE = \sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{n_g}(Y_{gk} - \bar{Y}_{g\cdot})^2, \qquad \text{Total: } SST = \sum_{g=1}^{G}\sum_{k=1}^{n_g}(Y_{gk} - \bar{Y}_{\cdot\cdot})^2$$

$$SST = SSTR + SSE, \quad \bar{S}_g^{2'} = \frac{1}{n_g-1}\sum_{k=1}^{n_g}(Y_{gk} - \bar{Y}_{g\cdot})^2, \quad SSE = \sum_{g=1}^{G}(n_g - 1)\bar{S}_g^{2'}$$

$$\frac{(n_1-1)\,\bar{S}_1^{2'} + (n_2-1)\,\bar{S}_2^{2'} + \cdots + (n_G-1)\,\bar{S}_G^{2'}}{(n_1-1) + (n_2-1) + \cdots + (n_G-1)} = \frac{\sum_{g=1}^{G}(n_g-1)\,\bar{S}_g^{2'}}{n-G} = \frac{SSE}{n-G}$$

Neka su Y_{gk}, $k = 1,2,\dots,n_g$, $g = 1,2,\dots,G$ nezavisne slučajne promenljive sa istim očekivanjem u grupi: $E(Y_{gk}) = m_g$ i istom varijansom $D(Y_{gk}) = \sigma^2$ i neka $m = \sum_{g=1}^{G} n_g m_g \,/\, n$.

Može se dokazati da je $E\left(\frac{SSTR}{G-1}\right) = \sigma^2 + \frac{1}{G-1}\sum_{g=1}^{G} n_g\,(m_g - m)^2$ i $E\left(\frac{SSE}{n-G}\right) = \sigma^2$.

Takođe važi: Ako su Y_{gk}, $k = 1,2,\dots,n_g$, $g = 1,2,\dots,G$ nezavisne slučajne promenljive sa normalnom raspodelom $Y_{gk} : \mathcal{N}(m_g,\sigma)$, $k = 1,2,\dots,n_g$, $g = 1,2,\dots,G$, onda

1. SSE i $SSTR$ su nezavisne
2. SSE/σ^2 ima χ^2_{n-G} raspodelu
3. Ako $m_1 = m_2 = \cdots = m_G$, onda $SSTR/\sigma^2$ ima χ^2_{G-1} raspodelu

Odatle sledi: ako $MSTR = \frac{SSTR}{G-1}$ i $MSE = \frac{SSE}{n-G}$, statistika $F = \frac{MSTR}{MSE}$ ima $F_{G-1,n-G}$ raspodelu

```
> anova(prinostab)
Analysis of Variance Table
Response: prinos
          Df  Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
seme       3 1015.51  338.50  32.614 5.781e-09 ***
Residuals 26  269.86   10.38
```

Jednostavni linearni model

Za uzorak $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ linearna regresija najmanjih kvadrata je $y = a + bx$.
Neka su vrednosti y_i realizovane vrednosti Y_i, posmatramo parove $(x_1,Y_1),\dots,(x_n,Y_n)$.
Jednostavni linearni model (JLM) pretpostavlja:

- Za neke α i β važi $E(Y_i|x_i) = \alpha + \beta x_i =: \mu_i$, $i = 1,\dots,n$.
- Reziduali $\epsilon_i := Y_i - \mu_i$ su nezavisne slučajne promenljive sa raspodelom $\mathcal{N}(0,\sigma)$.

Posledica je da su $Y_i : \mathcal{N}(\mu_i,\sigma)$, $i = 1,\dots,n$ nezavisne slučajne promenljive.
Ocena metodom maksimalne verodostojnosti za β, α, σ^2 daje redom ocenjivače:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2, \text{ gde je } \hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_i,\ \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum Y_i.$$

Vidimo da realizovane vrednosti ocena $\hat{\beta}$ i $\hat{\alpha}$ odgovaraju formulama najmanjih kvadrata.
Ako $(x_1,Y_1),\dots,(x_n,Y_n)$ zadovoljavaju pretpostavke JLM, onda

- $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$, $\bar{Y}$ su nezavisne,
- $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2$ ima χ^2 raspodelu sa $n-2$ stepeni slobode,

Koristimo centriranu ocenu $S^2 = \frac{n}{n-2}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-2}\sum(Y_i - \hat{Y}_i)^2$, tzv. **varijansa reziduala**.

- $\hat{\beta}$ i $\hat{\alpha}$ imaju normalnu raspodelu,
- $E(\hat{\beta}) = \beta$, $E(\hat{\alpha}) = \alpha$,
- $\mathrm{Var}\,(\hat{\beta}) = \sigma^2/ss_x$,
- $\mathrm{Var}\,(\hat{\alpha}) = \sigma^2\left(1/n + \bar{x}^2/ss_x\right)$.

Posledice: $Z = \dfrac{\hat{\beta}-\beta}{\sigma/\sqrt{ss_x}} : \mathcal{N}(0,1), \quad T = \dfrac{\hat{\beta}-\beta}{S/\sqrt{ss_x}} : t_{n-2}, \quad$ gde je $S = \sqrt{S^2}$.

Uvodimo i oznaku $\hat{SE}(\hat{\beta}) = S/\sqrt{ss_x}$, tzv. **standardna greška** ocenjivača $\hat{\beta}$.

Uobičajeno je testiranje hipoteze $H_0(\beta = 0) - H_1(\beta \neq 0)$ koristeći $T = \dfrac{\hat{\beta}}{\hat{SE}(\hat{\beta})} : t_{n-2}$.

Interval poverenja za β širine $(1-\alpha)\cdot 100\%$ je $\left(\hat{\beta} \pm q\,\hat{SE}(\hat{\beta})\right), \quad P(|T| > q) = \alpha$.

Primer 76 *Na takmičenju u klizanju izvodi se dvominutni obavezni program i četvorominutni slobodni program. U fajlu* `Skating2010.csv` *su bodovi za 24 klizača sa Olimpijade 2010.*

Da li postoji i kako glasi zavisnost između dobijenih ocena?

```
read.csv("Skating2010.csv") -> Skating2010
skate.lm <- lm(Free ~ Short, data=Skating2010)
summary(skate.lm)
```

```
Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-23.314  -6.780   0.710   6.407  21.205 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)   7.9691    18.1175   0.440    0.664    
Short         1.7347     0.2424   7.157 3.56e-07 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 11.36 on 22 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6995,Adjusted R-squared:  0.6859 
F-statistic: 51.22 on 1 and 22 DF,  p-value: 3.562e-07
```

Postoji linearna veza između Free i Short programa ($\rho^2 = 0.6995$, $\rho = 0.8364$). Odbačena je $H_0(\beta = 0)$, p-value $= \alpha^* =$`3.562e-07`. Formula: `Free = 7.9691 + 1.7347 Short`.

Statističko zaključivanje za predikcije

Očekivanje predikcije

Neka $(x_1, Y_1), \ldots, (x_n, Y_n)$ zadovoljavaju pretpostavke Jednostavnog linearnog modela. Slučajnu promenljivu $Y_s = \alpha + \beta x_s$ nazivamo predikcija za x_s. Ocenjivač očekivane vrednosti predikcije $E(Y_s)$ za dato x_s je $\hat{Y}_s = \hat{\alpha} + \hat{\beta} x_s$. Onda

1. $\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum Y_i$ je slučajna promenljiva sa Normalnom raspodelom.
2. $E(\bar{Y}) = \alpha + \beta \bar{x}$.
3. Var $(\bar{Y}) = \sigma^2 / n$.
4. Y_s ima normalnu raspodelu.
5. $\hat{Y}_s$ je centrirani ocenjivač za očekivanu vrednost predikcije: $E(\hat{Y}_s) = E(Y_s)$.
6. Var $(\hat{Y}_s) = \sigma^2 \left[1/n + (x_s - \bar{x})^2 / ss_x)\right]$.

Posledica: $T = \dfrac{\hat{Y}_s - E(\hat{Y}_s)}{S \sqrt{1/n + (x_s - \bar{x})^2 / ss_x)}}$, gde je S standardna greška reziduala, ima Studentovu raspodelu sa $n-2$ stepeni slobode.

Za dato x_s, interval poverenja širine $1-\gamma$ za $E(Y_s)$ je

$$\left(\hat{Y}_s \pm t_{1-\gamma/2;n-2}\,\hat{SE}(\hat{Y}_s)\right),$$

gde je $t_{1-\gamma/2;n-2}$ kvantil $1-\gamma/2$ Stundetove raspodele sa $n-2$ stepeni slobode i gde je $\hat{SE}(\hat{Y}_s) = S\sqrt{1/n + (x_s-\bar{x})^2/ss_x}$ standardna greška ocenjivača $\hat{Y}_s$.

Pojedinačna predikcija

Varijansa greške pojedinačne predikcije $Y = \alpha + \beta x$ je

$$\text{Var}\,(Y-\hat{Y}) = \text{Var}\,(Y) + \text{Var}\,(\hat{Y}) = \sigma^2 + \sigma^2\left[\frac{1}{n} + \frac{(x_s-\bar{x})^2}{ss_x}\right].$$

Za dato $x = x_s$ interval poverenja širine $1-\gamma$ predikcije $Y_s = \alpha + \beta x_s$ je

$$\left(\hat{Y}_s \pm t_{1-\gamma/2;n-2}\,\hat{SE}(Y_s)\right),$$

gde je $t_{1-\gamma/2;n-2}$ kvantil $1-\gamma/2$ Studentove raspodele sa $n-2$ stepeni slobode i gde je $\hat{SE}(Y_s) = S\sqrt{1 + 1/n + (x_s-\bar{x})^2/ss_x}$ standardna greška predikcije Y_s.

Multipla regresija

U linearnoj regresiji najmanjih kvadrata smo za parove tačaka $(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n$ tražili a i b koje za linearnu zavisnost $y = a + bx$ daju minimalnu sumu kvadrata reziduala.

Moguće je pronaći i koeficijente zavisnosti y od parametara $x_1, \ldots, x_p$ u formuli

$$y = a + b_1 x_1 + \cdots + b_p x_p.$$

Može i za više zavisnih promenljivih $y_i = a_i + b_{i,1} x_1 + \cdots + b_{i,p} x_p$, $i = 1, \ldots, n$. Koeficijenti se najlakše nalaze matričnim računom. Mi koristimo funkcije ugrađene u R.

Primer 77 *Naći model multiple regresije Di.change preko Ht.change, Competition i Fertilizer za studiju Spruce.*

Posmatramo Case study `Spruce.csv`, 72 zasađena stabla praćena 5 godina.

Variable	Description
Tree	Tree number
Competition	C (competition), CR (competition removed)
Fertilizer	F (fertilized), NF (not fertilized)
...	...
Ht.change	Change (cm) in height
Di.change	Change (cm) in diameter

Kodiraćemo Competition i Fertilizer brojevima:
$C \rightarrow 1 =$ ima konkurenciju, $CR \rightarrow 0 =$ nema konkurenciju i
$F \rightarrow 1 =$ jeste đubreno, $NF \rightarrow 0 =$ nije đubreno.

Tree	Competition	Fertilizer		Ht.change	Di.change
1	0	1	$\cdots$	45	5.415625
2	0	1		36.2	4.009375
			$\ddots$		
72	1	0		19	2.11875

```
read.csv("Spruce.csv") -> Spruce
lm(Di.change ~ Ht.change + Fertilizer + Competition, data = Spruce)
```

```
Coefficients:
(Intercept)     Ht.change    Fertilizer  Competition
     0.5116        0.1040        1.0266      -0.4895
```

Formula za zavisnost porasta prečnika stabla u zavisnosti od promene visine, đubrenja i uništavanja konkurencije :

```
Di.change = 0.5116 + 0.1040 Ht.change + 1.0266 Fertilizer -
    0.4895 Competition
```

Permutacioni testovi

PRIMER 78 *Mereno je u sekundama vreme potrebno mišu da izađe iz lavirinta. Pod uticajem leka: 30, 25, 20 i bez uticaja leka: 18, 21, 22 (kontrolna grupa). Ostvarena je razlika srednjih vrednosti:*

$$\bar{x}_d - \bar{x}_c = (30+25+20)/3 - (18+21+22)/3 = 4.667s. \qquad \binom{6}{3} = 20$$

Ako se posmatraju kao jednako verovatni svih 20 ishoda izbora 3 od 6 merenja, kolika je verovatnoća da je razlika srednjih vrednosti veća ili jednaka od ostvarene?

Testiramo H_0: "lek nema uticaja" protiv H_1: "lek usporava", $H_0(\mu_d = \mu_c) - H_1(\mu_d > \mu_c)$.

```
x<-c(30, 25, 20, 18, 21, 22)
ind<-t(matrix(c(1,2,3,1,2,4,1,2,5,1,2,6,1,3,4,1,3,5,...),nrow=3))
index<-ind[1,]; observed<-mean(x[index])-mean(x[-index])
result<-numeric(20)
for(i in 1:20)
{ index<-ind[i,]
  result[i]<-mean(x[index])-mean(x[-index])}
sum(result >= observed)/20
```

Dobijena verovatnoća $3/20 = 0.15$ ne protivreči H_0 sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Primer 79 *Osoba A tvrdi da uvek ispadne grb kada baci novčić. Da bi dokazala, bacila je novčić 3 puta i sva tri puta je ispao grb.*

Kolika je verovatnoća da ispadne grb u 3 bacanja novčića?

Testiramo H_0: "bacanje novčića osobe A ima uobičajenu verovatnoću" protiv H_1: "osoba A može da baci grb svaki put".

Ne odbacujemo nultu hipotezu jer $1/8 = 0.125 = 12.5\%$ nije manja od $\alpha = 0.05 = 5\%$.

Primer 80 *Studija Beerwings u kojoj je evidentirano kod 15 muških i 15 ženskih osoba koliko ljutih krila su pojeli i koliko piva su popili.*

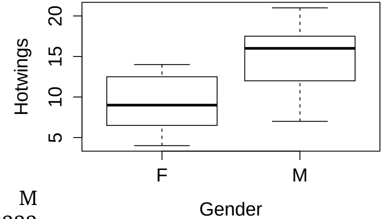
Varijable Case study Beerwings.

Variable	Description
Gender	Male or female
Beer	Ounces of beer consumed
Hotwings	Number of hot wings eaten

ID	Hotwings	Beer	Gender
1	4	24	F
2	5	0	F
	...		
30	21	42	M

Posmatramo Hotwings u odnosu na faktor Gender. Testiramo hipotezu H_1 da M pojede više Hotwingsa od F. H_0 je da nema razlike u Hotwings u zavisnosti od Gender.

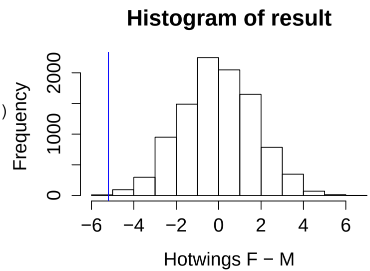
```
      ID              Hotwings            Beer         Gender
 Min.   : 1.00    Min.   : 4.00    Min.   : 0.0    F:15
 1st Qu.: 8.25    1st Qu.: 8.00    1st Qu.:24.0    M:15
 Median :15.50    Median :12.50    Median :30.0
 Mean   :15.50    Mean   :11.93    Mean   :26.2
 3rd Qu.:22.75    3rd Qu.:15.50    3rd Qu.:36.0
 Max.   :30.00    Max.   :21.00    Max.   :48.0
```



F	M
9.333333	14.533333

Ostvarena vrednost razlike srednjih vrednosti je $9.333333 - 14.533333 = -5.2$. Imamo $\binom{30}{15} = 155117520$ mogućih izbora $\rightarrow$ preobimno. Vršimo reuzorkovanje (resampling).

```
read.csv("Beerwings.csv")->krilca; summary(krilca)
plot(Hotwings~Gender,data=krilca)
tapply(krilca$Hotwings,krilca$Gender,mean)
observed <- -5.2
Hotwings <- krilca$Hotwings; N <- 9999; result <- numeric(N)
for (i in 1:N)
{ index<-sample(30,size=15,replace=FALSE)
  result[i]<-mean(Hotwings[index])-mean(Hotwings[-index])}
hist(result,xlab="Hotwings F - M")
abline(v=observed,col="blue")
(sum(result <= observed) + 1)/(N + 1)
```



p-value = 4e-4 $\Leftrightarrow \alpha^* = 4 \cdot 10^{-4}$

Vidimo da je verovatnoća ovako velike razlike daleko manja od $\alpha = 0.05$, odbacujemo H_0.

procedure TWO-SAMPLE PERMUTATION TEST(x, m, n, dx)
  repeat
    Izaberi poduzorak m od $m + n$ vrednosti x (bez vraćanja)
    Uporedi izabranu statistiku za izabranih m i preostalih n vrednosti
  until ima dovoljno uzoraka
  Izračunaj p-value kao procenat slučajeva u kojima je poređenje statistika $\geq dx$
  Pomnoži p-value sa 2 ako je u pitanju dvostrani test
  Nacrtaj histogram i označi p-vrednost (Opciono)
end procedure

Najčešće se za statistiku koristi aritmetička sredina, ali mogu i druge statistike.

Ekvivalentni rezultati se dobijaju primenom rastuće funkcije na statistiku.

Dodajemo 1 na brojilac i imenilac da bismo izbegli p-value $= 0$.

Ovaj test ne zahteva da uzorak ima normalnu raspodelu.

Ovaj test je manje osetljiv na poduzorke nejednakih obima od t-testa ($m \gg n$). Pažnja!!!

Uzastopne primene ovog testa ne daju istu p-value.

Jednostrani test se primenjuje ako je suprotna alternativa očigledno nemoguća. Odlučivanje za primenu jednostranog testa se ne sme vršiti posle testiranja.

Za veliko N, uzimanje n uzoraka sa vraćanjem i bez vraćanja daje približno iste verovatnoće.

Tabela kontigencije

PRIMER 81 *Da li postoji zavisnost između najvišeg stepena obrazovanja i stava prema postojanju smrtne kazne u zakonu? Koristiti podatke iz GSS2002.*

Tabela odgovora za i protiv smrtne kazne u odnosu na najviši nivo obrazovanja iz `GSS2002.csv`

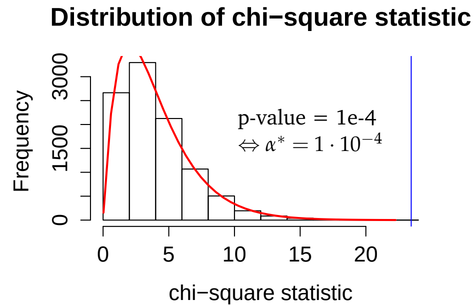
$$\chi^2 = \sum_{\textit{sve ćelije}} \frac{(\textit{ostvareno}-\textit{očekivano})^2}{\textit{očekivano}}$$

Education	Favor	Oppose	rowsum	%
Bachelors	135	71	206	15.8
Graduate	64	50	114	8.7
HS	511	200	711	54.4
JrColl	71	16	87	6.7
Left HS	117	72	189	14.5
colsum	898	409	1307	
%	68.7	31.3		

procedure PERMUTATION TEST FOR INDEPENDENCE OF TWO VARIABLES($t_{n\times 2}$)
    Izračunaj ostvarenu $\chi^2(t)$
    repeat
        Permutuj na slučajan način vrste jedne kolone
        Izračunaj $\chi^2(t)$ i upamti rezultat
    until ima dovoljno uzoraka
    Izračunaj p-value kao procenat slučajeva u kojima je upamćena χ^2 veća od ostvarene
    Nacrtaj histogram i označi p-vrednost (Opciono)
end procedure

Testira se H_0: parametri su nezavisni.

```
read.csv("GSS2002.csv")->GSS2002
Education <- GSS2002$Education
DeathPenalty <- GSS2002$DeathPenalty
observed <- chisq.test(table(Education,
    DeathPenalty))$statistic
N <- 10^4-1; result <- numeric(N)
for (i in 1:N)
{ DP.permuted <- sample(DeathPenalty)
GSS.table <- table(Education, DP.permuted)
result[i] <- chisq.test(GSS.table)$statistic}
hist(result, xlab = "chi-square statistic",
    main = "Distribution");
abline(v = observed, col = "blue")
(sum(result >= observed) + 1)/(N+1) # p-value
```



Kako je p-value = 1e-4 daleko manje od $\alpha = 0.05$, odbacujemo H_0.

Ako je H_0 tačna, verovatnoće pojedinačne ćelije (i, j) su $p_{i,j} = p_{i\cdot}\, p_{\cdot j} = \frac{\text{rowsum}}{n} \frac{\text{colsum}}{n}$, a očekivane vrednosti su $n\, p_{i,j} = n \frac{\text{rowsum}}{n} \frac{\text{colsum}}{n} = \frac{\text{rowsum} \cdot \text{colsum}}{n}$.

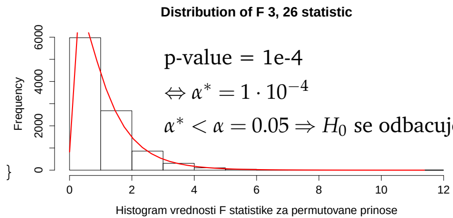
Ostvarena vrednost χ^2 statistike je bila `observed = 23.45`, p-value za χ^2 test nezavisnosti je `1-pchisq(observed,4) = 1.029e-4`, što daje isti rezultat kao permutacioni test.

Permutacioni test za jednakost srednjih vrednosti u više grupa (ANOVA)

PRIMER 82 *Permutacionim testom proveriti nezavisnost iz primera 75.*

Slično kao u prethodnom primeru, možemo uraditi resampling od (recimo) $N = 10^4$ permutacija vrednosti prinosa sa istim brojem po grupama. Onda umesto p-vrednosti za ostvareni kvantil u Fišerovoj raspodeli, možemo koristiti proporciju broja vrednosti Fišerove statistike koje prelaze preko ostvarene vrednosti zadate raspodelom po grupama.

```
observed <- anova(prinostab)$F[1]
prinos <- prinosi$prinos
n <- length(prinos)
N <- 10^4 - 1
results <- numeric(N)
for (i in 1:N)
{ index <- sample(n)
  prinosi$prinos <- prinos[index]
  results[i] <- anova(lm(prinos~seme,data=prinosi))$F[1]}
(sum(results> observed) + 1) / (N + 1) # p-value
```



p-value = 1e-4

$\Leftrightarrow \alpha^* = 1 \cdot 10^{-4}$

$\alpha^* < \alpha = 0.05 \Rightarrow H_0$ se odbacuje

Setimo se da je `observed = 32.61` i `1-pf(observed,3,26) = 5.781e-9`, dobili smo isto kao sa kvantilom Fišerove statistike, H_0 se odbacuje.