# (Verovatnoća i) Statistika - primeri

SIIT / IIS

školska 2023/24

**Primer 1** *Partitivni skup $\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ i $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega\}$ su $\sigma$-polja događaja nad $\Omega$.*

Rešenje: Partitivni skup $\mathcal{F}_1$ sadrži sve podskupove skupa $\Omega$, stoga su osobine (i), (ii), (iii) zadovoljene.

Familija $\mathcal{F}_2$ očigledno zadovoljava (i). Pošto je $\overline{\emptyset} = \Omega$ i $\overline{\Omega} = \emptyset$, zadovoljeno je (ii). Prebrojive unije elemenata mogu dati samo $\emptyset$ ili $\Omega$, oba su u $\mathcal{F}_2$, (iii) je zadovoljeno.

**Primer 2** *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$ je $\sigma$-polje događaja.*

Rešenje: Familija $\mathcal{F}$ očigledno zadovoljava (i). Pošto je $\overline{\emptyset} = \Omega$, $\overline{\Omega} = \emptyset$, $\overline{\{1,2\}} = \{3,4,5,6\}$, $\overline{\{3,4,5,6\}} = \{1,2\}$, zadovoljeno je (ii). Prebrojive unije elemenata mogu dati samo elemente $\mathcal{F}$, (iii) je zadovoljeno.

**Primer 3** *Za skup $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ i $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4,5,6\}\}$, funkcija*

$$P = \begin{pmatrix} \emptyset & \Omega & \{1,2\} & \{3,4,5,6\} \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

*je verovatnoća, odnosno, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je prostor verovatnoće.*

Rešenje: Osobine 1. i 3. su očigledne. Zbog definicije verovatnoće i $0 + 1 = 1$, $1/3 + 2/3 = 1$, važi i 2.

**Primer 4** *Neka je skup ishoda konačan: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$, i neka je $\sigma$-polje skup svih podskupova $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.*

*Neka je $p_k = P(\{\omega_k\}) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ i $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.*

*Verovatnoća je definisana*

$$P(A) = \sum_{k:\omega_k \in A} p_k.$$

*Ovaj prostor zovemo* ***diskretni prostor verovatnoće****.*

U ovom primeru bi samo trebalo pokazati osobinu 2. verovatnoće, jer su 1. i 3. očigledne. Osobina 2. sledi iz asocijativnosti i komutativnosti sabiranja.

**Primer 5** *Ako u primeru 4 važi i $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = 1/n$, dobijamo $P(A) = \#A/\#\Omega$, to je* ***klasična definicija*** verovatnoće*. U klasičnoj definiciji verovatnoće se kaže da je verovatnoća* broj povoljnih podeljen sa brojem mogućih ishoda*. Klasična definicija verovatnoće se koristi kada imamo konačno mnogo jednako verovatnih ishoda, odnosno, kada se vrši slučajan izbor.*

Ovaj primer je samo specijalni slučaj definicije diskretnog prostora verovatnoće. U tekstualnim zadacima se koristi kada se vrši **slučajan izbor**.

**Primer 6** *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ Euklidski prostor.*

*Neka je $\mathcal{F}$ skup podskupova od $\Omega$ koji su merljivi merom $m$ i neka je $m(\Omega) > 0$.*

***Geometrijsku verovatnoću*** *za $A \subseteq \Omega$ definišemo: $P(A) = m(A)/m(\Omega)$.*

*Onda je $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot))$ prostor verovatnoće.*

Zapravo je verovatnoća specijalni slučaj mere za koji važi osobina 3. Osobine 1. i 2. slede iz definicije mere, a osobina 3: $P(\Omega) = m(\Omega)/m(\Omega) = 1$.

**Primer 7** *Tri dečaka i tri devojčice sedaju na slučajan način u red sa 6 mesta. (Svi rasporedi sedenja su jednako verovatni.) Kolika je verovatnoća da nema dve osobe istog pola koje sede jedna do druge?*

Rešenje: povoljna sedenja su MŽMŽMŽ ili ŽMŽMŽM (M = dečak, Ž = devojčica). Dečake (M_M_M_) možemo rasporediti na $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina, isto devojčice (_Ž_Ž_Ž). Po principu **proizvoda** MŽMŽMŽ sedenja možemo napraviti na $3! \cdot 3!$ načina. Isto i ŽMŽMŽM sedenja.

Po principu **zbira** (imamo "ili", uniju) povoljnih sedenja ima $3!^2 + 3!^2 = 2 \cdot 3!^2$.

Mogućih sedenja ima 6!, tako da je tražena verovatnoća verovatnoća

$$P = \frac{2 \cdot 3!^2}{6!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{10}.$$

**PRIMER 8** *Iz špila od 52 karte na slučajan način se izvlači jedna karta. Kolika je verovatnoća da je izvučena karta dama ili herc?*

Rešenje: Označimo događaje: $A =$ izvučena karta je dama (Q), $B =$ izvučena karta je herc (♡). Onda je $AB$ događaj da je izvučena karta dama herc (Q♡).

Tražena verovatnoća je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Događaji $A$ i $B$ su nezavisni jer $P(A)\,P(B) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52} = \frac{1}{52} = P(AB)$.

**PRIMER 9** *Novčić se baca tri puta. Bacanja su nazavisna. Izračunati verovatnoće $p_k$ da će pasti $k$ grbova za $k = 0,1,2,3$.*

Rešenje: $\Omega = \{GGG, GGP, GPG, GPP, PGG, PGP, PPG, PPP\}$.

Zbog nezavisnosti bacanja i jednake verovatnoće pisma (P) i grba (G), sledi da je u svakom bacanju verovatnoća grba i pisma jednaka $\frac{1}{2}$.

Zato je verovatnoća $P(\{GGG\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Isto $P(\{GGP\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, isto tako $P(\{GPP\}) = P(\{PGG\}) = P(\{PGP\}) = P(\{PPG\}) = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$.

$p_0 = P(\{PPP\}) = \frac{1}{8}$

$p_1 = P(\{GPP, PGP, PPG\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_2 = P(\{GGP, GPG, PGG\}) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_3 = P(\{GGG\}) = \frac{1}{8}$

**Primer 10** *Novčić se baca dok se ne dobije grb. Izračunati ver. da bude paran broj bacanja.*

Rešenje: Skup svih ishoda je beskonačan i šifrovaćemo ga sa G (grb) i P (pismo):

$\Omega = \{G, PG, PPG, PPPG, \ldots\}$.

Događaj da je bio paran broj bacanja je $A = \{PG, PPPG, PPPPPG, \ldots\}$.

$P(A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$, formula za sumu beskonačnog geometrijskog reda.

**Primer 11** *(Bernulijeva shema) Pozitivna realizacija eksperimenta u svim pokušajima ima istu verovatnoću $p \in (0,1)$. Eksperiment se vrši $n$ puta. Kolika je verovatnoća da će biti $k$, za $0 \leq k \leq n$ pozitivnih realizacija?*

Verovatnoća elementarnog događaja sa $k$ pozitivnih realizacija od $n$ eksperimenata je

$$P(\{\overbrace{+ - - \cdots +}^{k \text{ plusova}}\}) = p^k (1-p)^{n-k}.$$

$k$ od $n$ eksperimenata može se odabrati na $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \cdots \cdot 1}$ načina.

Onda je $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Primer (9) je specijalni slučaj Bernulijeve sheme sa $p = \frac{1}{2}$, $n = 3$.

**Primer 12** *U odeljenju od 30 đaka ima 12 dečaka. Na slučajan način se bira petočlana komisija. Kolika je verovatnoća da u komisiji ima (barem) 2 dečaka?*

Označimo događaje $A =$ izabrano je dva dečaka, $B =$ izabrano je barem dva dečaka.

2 od 12 dečaka se bira na $\binom{12}{2}$ načina. 3 od preostalih 18 đaka se bira na $\binom{18}{3}$ načina.

Po principu proizvoda broj komisija sa 2 dečaka je $\#A = \binom{12}{2}\binom{18}{3}$, a ukupan broj petočlanih komisija ja $\#\Omega = \binom{30}{5}$.

$P(A) = \frac{\binom{12}{2}\binom{18}{3}}{\binom{30}{5}}$, a preko suprotnog događaja $P(B) = 1 - \frac{\binom{12}{1}\binom{18}{4}}{\binom{30}{5}} - \frac{\binom{12}{0}\binom{18}{5}}{\binom{30}{5}}$.

**PRIMER 13** *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka u lopti. Kolika je verovatnoća da je izabrana tačka u kocki?*

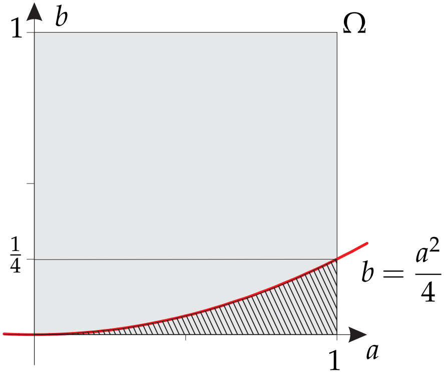
Ovde je pretpostavka da su sve tačke lopte jednako dostupne pa je u pitanju geometrijska verovatnoća.

Poluprečnik opisane lopte je pola telesne dijagonale kocke $r = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, gde je $a$ ivica kocke.

$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, gde je $m(\cdot)$ mera zapremine, $A$ je kocka, $\Omega$ je lopta.

$P(A) = \frac{a^3}{\frac{4}{3}(\frac{1}{2}a\sqrt{3})^3\pi} = \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} = 0.368.$

**PRIMER 14** *Na slučajan način se biraju brojevi $a$ i $b$ u intervalu $[0,1]$. Kolika je verovatnoća da će jednačina $x^2 + ax + b = 0$ imati realna rešenja?*




U ovom zadatku zbog slučajnog izbora vrednosti $a$ i $b$ možemo smatrati da se radi o geometrijskoj verovatnoći, tako što će $a$-osa biti apscisa, $b$-osa ordinata i skup mogućih vrednosti jedinični kvadrat $\Omega = [0,1] \times [0,1]$.

Povoljne vrednosti, $A$, su uređeni parovi čije koordinate zadovoljavaju da im je diskriminanta $d = a^2 - 4b \geq 0$, što je ekvivalentno sa $b \leq a^2/4$.

Na slici levo događaj $A$ je šrafiran. Mera je površina i $m(\Omega) = 1$.

$$P(A) = \int_0^1 \frac{a^2}{4}\, da = \frac{a^3}{12}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

**Primer 15** *Dve osobe dolaze na sastanak na dogovoreno mesto u slučajno odabranom momentu između 12 i 13 časova. Dogovor je da se čeka 20 minuta.*

*Kolika je verovatnoća da će se sresti?*

Rešenje: $\frac{5}{9}$

**Primer 16** *(Bertranov paradoks) Izračunati verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakostraničnog trougla upisanog u kružnicu.*

(a) Ako se jedan kraj tetive fiksira, a drugi se bira slučajno.

(b) Ako se fiksira pravac tetive.

(c) Ako se slučajno bira središte tetive (unutar kružnice).

Rešenje:

(a) $1/3$

(b) $1/2$

(c) $1/4$

**PRIMER 17** *Simptom X se pojavljuje usled bolesti A, B i C. Poznato je da se bolest A, B i C pojavljuju kod redom 10%, 5%, 20% populacije. Bolesti A, B i C isključuju jedna drugu. Simptom X se u slučaju bolesti A razvija u 90% slučajeva, u slučaju bolesti B razvija se u 95% slučajeva, i u slučaju bolesti C razvija u 75% slučajeva.*

*Kolika je verovatnoća da će se kod slučajno odabranog čoveka pojaviti simptom X?*

*Ako se pojavio simptom X, kolika je verovatnoća da ima bolest A, B, odnosno C?*

Rešenje: Označimo događaje:
$A =$ izabrana osoba ima simptom X.
$H_1 =$ izabrana osoba ima bolest A,
$H_2 =$ izabrana osoba ima bolest B,
$H_3 =$ izabrana osoba ima bolest C,
$H_4 =$ izabrana osoba nema bolesti.

Iz tabele:
$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(H_i)\, P(A|H_i) = 0.2875$

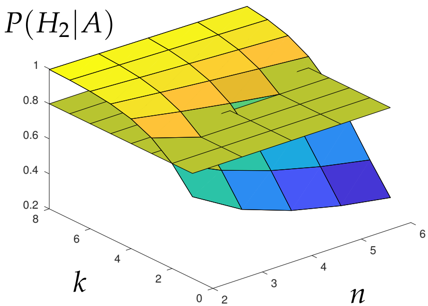
Date podatke smo uneli u tabelu i dopunili tabelu za Bejzove verovatnoće $P(H_i|A)$.

| $i$ | $P(H_i)$ | $P(A\|H_i)$ | $P(A\,H_i)$ | $P(H_i\|A)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.10 | 0.90 | 0.0900 | 0.3130 |
| 2 | 0.05 | 0.95 | 0.0475 | 0.1652 |
| 3 | 0.20 | 0.75 | 0.1500 | 0.5217 |
| 4 | 0.65 | 0.00 | 0.0000 | 0.0000 |
| | $\sum = 1$ | | $\sum = 0.2875$ | |

**PRIMER 18** *Od $n$ novčića jedan je neispravan: ima grb sa obe strane. Na slučajan način se bira novčić i baca $k$ puta. Kolika je verovatnoća da svih $k$ puta padne grb?*

*Ako je svih $k$ puta pao grb, kolika je verovatnoća da je u pitanju neispravan novčić?*

*Da li je poslednja verovatnoća veća za $n = 2, k = 2$ ili $n = 4, k = 4$?*




Označimo: $A =$ palo $k$ grbova,
$H_1 =$ izabran ispravan novčić, $H_2 =$ neispravan.

| $i$ | $P(H_i)$ | $P(A\|H_i)$ |
|---|---|---|
| 1 | $(n-1)/n$ | $1/2^k$ |
| 2 | $1/n$ | $1$ |

$$P(A) = (n-1)/n \cdot 1/2^k + 1/n$$

$$P(H_2|A) = \frac{1/n}{(n-1)/n \cdot 1/2^k + 1/n} = \frac{2^k}{n-1+2^k}$$

$$P(H_2|A)\Big|_{n=2,k=2} = 4/5 = 0.8 <$$
$$< P(H_2|A)\Big|_{n=4,k=4} = 16/19 = 0.84$$

**Primer 19** *Osobe A, B, C i D prenose informaciju koju dobiju u obliku iskaza DA ili NE u jednom od tri slučaja. Osoba A dobija informaciju, prenosi je osobi B, zatim ona osobi C, zatim ona osobi D i na kraju osoba D saopštava informaciju.*

*Kolika je verovatnoća da je prva osoba prenela početnu informaciju ako se zna da je poslednja osoba prenela početnu informaciju?*

Označimo $A, B, C, D =$ osoba $A, B, C, D$ je prenela početnu informaciju. $\quad \ldots$

$P(A|D) = 13/41.$

Uopštena formula preseka:

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1})$$

**Primer 19a** *U kutiji su 4 crvene i 5 zelenih kuglica. Na slučajan način se izvlače tri kuglice bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da su izvučene redom crvena, zelena i crvena kuglica?*

Rešenje: Neka je $\Omega$ skup svih mogućih izvlačenja tri kuglice bez vraćanja.

Označimo: $A_1 =$ u prvom izvlačenju izvučena crvena,

Označimo: $A_2 =$ u drugom izvlačenju izvučena zelena,

Označimo: $A_3 =$ u trećem izvlačenju izvučena crvena.

Traži se verovatnoća $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 A_2) = \frac{4}{9} \frac{5}{8} \frac{3}{7} = \frac{5}{42} = 0.119.$

**PRIMER 20** *Koliko treba da ima osoba u nekoj grupi pa da verovatnoća da barem dve osobe iz grupe imaju rođendan istog dana bude veća od $\frac{1}{2}$?*

Za grupu od $n$ osoba označimo događaje:

$A =$ u grupi barem dve osobe imaju rođendan istog dana. Onda je

$\overline{A} =$ u grupi ne postoje dve osobe rođene istog dana.

Posmatrajmo osobe u grupi poređane u konačan niz $1, 2, \dots, n$. Neka je

$A_i =$ osoba broj $i$ nema rođendan istog dana kao osobe pre nje, $i = 1, 2, \dots, n$.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 1\,\frac{364}{365}\,\frac{363}{365}\,\cdot \cdots \cdot\,\frac{366-n}{365} > \frac{1}{2}.$$

Ovu nejednačinu možemo rešiti pomoću spreadsheet tabele:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | $\cdots$ | 0.41 | 0.44 | 0.48 | 0.51 | 0.54 |

Vidimo da je odgovor $n \geq 23$.

**PRIMER 21** *Koliko osoba treba da pitam za rođendan da bih sreo osobu koja ima rođendan istog dana kad i ja sa verovatnoćom većom od $\frac{1}{2}$?*

Označimo događaj $A =$ od $n$ osoba u grupi barem jedna osoba ima rođendan kad i ja.

Onda je $\overline{A} =$ ni jedna osoba iz grupe nema rođendan kad i ja.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\tfrac{364}{365}\right)^n > \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\tfrac{364}{365}\right)^n < \tfrac{1}{2} \Leftrightarrow n > \ln\tfrac{1}{2} / \ln\tfrac{364}{365} = 252.7.$$

Uopštena formula unije:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{1 \le i_1 \le n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2}) + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_3}) -$$

$$\cdots + (-1)^{(n-1)} P(A_1 A_2 \cdots A_n)$$

**Primer 22** *Nestalo je struje u pozorištu i svih $n$ lica su u mraku (na slučajan način) uzeli kaput u garderobi. Kolika je verovatnoća da je barem jedno lice uzelo svoj kaput?*

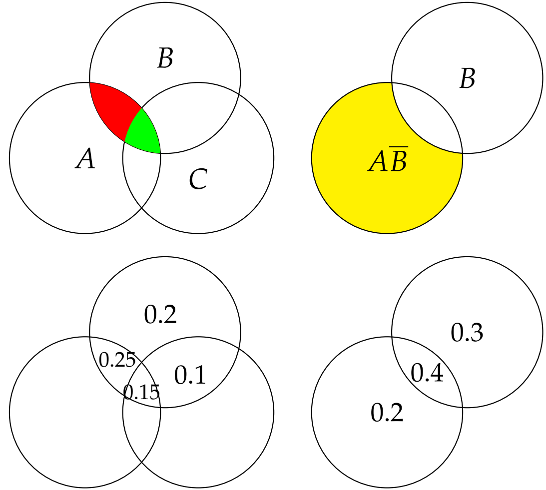
*Kojem broju teži dobijena verovatnoća kad $n \to \infty$?*

Sva moguća uzimanja kaputa, $\Omega$, smatramo jednakoverovatnim. Označimo događaje $A_i =$ osoba $i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, je uzela svoj kaput. Onda je $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
Za indekse $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ za koje je $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ važi
$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$. Pošto u $k$-tom sabirku desne strane uopštene formule unije imamo $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$ jednakih sabiraka, onda je po uopštenoj formuli unije $P(A) =$
$= \frac{n!}{(n-1!)\,1!} \frac{(n-1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-2!)\,2!} \frac{(n-2)!}{n!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n!}{n!} \frac{1}{n!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.
Kad $n \to \infty$ dobijena verovatnoća teži ka $1 - 1/e$.

**Primer 23** *Neka je:* $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(AB) = 0.4$, $P(BC) = 0.25$, $P(ABC) = 0.15$.

- *Izračunati* $P(A\overline{B})$, $P(AB\overline{C})$ *i* $P(\overline{A}BC)$.
- *Izračunati* $P(A|B)$, $P(B|A)$.

- $P(A\overline{B}) = 0.2$,
  $P(AB\overline{C}) = 0.25$ i
  $P(\overline{A}BC) = 0.1$.
- $P(A|B) = 4/7$, $P(B|A) = 2/3$.




**Primer 24** *U kutiji se nalazi 10 kuglica sa brojem 0, 11 kuglica sa brojem 1 i 12 kuglica sa brojem 2. Na slučajan način se izvlači kuglica i posmatra izvučeni broj. Opisati skup ishoda i prostor verovatnoće.*

Možemo uzeti da su ishodi broj koji piše na izvučenoj kockici, $\Omega = \{0,1,2\}$.

Onda su verovatnoće $P(\{0\}) = 10/33$, $P(\{1\}) = 1/3$, $P(\{2\}) = 12/33$.

**PRIMER 25** *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice bez vraćanja, kolika je verovatnoća da su izvučeni redom 0, 1 i 2?*

Ovde uzimamo da su ishodi brojevi koji se redom izvuku na kuglicama
$\Omega = \{000, 001, 002, 010, \ldots, 222\}$.
Označimo događaje:
$A_1$ = Prvo je izvučena 0,
$A_2$ = Drugo je izvučena 1,
$A_3$ = Treće je izvučena 2.
Traži se verovatnoća $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)\, P(A_2|A_1)\, P(A_3|A_1 A_2) = \frac{10}{33} \cdot \frac{11}{32} \cdot \frac{12}{31}$

**PRIMER 26** *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice bez vraćanja, kolika je verovatnoća da su izvučena tri različita broja?*

$$P(A) = \frac{\binom{10}{1}\binom{11}{1}\binom{12}{1}}{\binom{33}{3}} = \frac{10 \cdot 11 \cdot 12}{\frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 6 \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{11}{32} \cdot \frac{12}{31}$$

**PRIMER 27** *Ako se u primeru 24 na slučajan način izvlače 3 kuglice sa vraćanjem, kolika je verovatnoća da su izvučena tri različita broja?*

Kao u primeru 25 i 26, $P(A) = 6 \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{11}{33} \cdot \frac{12}{33}$

**PRIMER 28** *Na deonici pravog puta su postavljena dva semafora. Vozila stižu u slučajnim momentima. Prvi semafor propušta 80% vozila. Drugi semafor propušta 75% vozila koja nisu stala na prvom semaforu i 60% vozila koja su stala na prvom semaforu.*

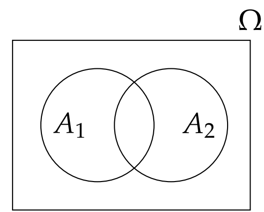
*Kolika je verovatnoća da će vozilo proći deonicu sa tačno jednim zaustavljanjem?*

Označimo događaje:
$A_1 =$ vozilo je zaustavljeno na 1. semaforu, $A_2 =$ vozilo je zaustavljeno na 2. semaforu.
$\overline{A_1} =$ vozilo je propušteno na 1. semaforu, $\overline{A_2} =$ vozilo je propušteno na 2. semaforu.

Događaj da će vozilo proći deonicu sa jednim zaustavljanjem je $A = \overline{A_1}\,A_2 \cup A_1\,\overline{A_2}$.

U tekstu je dato: $P(\overline{A_1}) = 0{,}80$; $P(\overline{A_2}|\overline{A_1}) = 0{,}75$; $P(\overline{A_2}|A_1) = 0{,}60$.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\overline{A_1}\,A_2) + P(A_1\,\overline{A_2}) = \\ &= P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2|\overline{A_1}) + P(A_1) \cdot P(\overline{A_2}|A_1) = \\ &= 0{,}80 \cdot 0{,}25 + 0{,}20 \cdot 0{,}60 = 0{,}32. \end{aligned}$$




Za vežbu popuniti verovatnoćama polja na Venovom dijagramu.

**PRIMER 29** *Za prostor verovatnoće iz primera 3, možemo definisati slučajnu promenljivu* ***indikator događaja*** *koja registruje sa 1 da li je pao broj veći od 2 (inače je nula):*

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Vidimo da je* $X^{-1}((-\infty, x]) = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \{1,2\}, & 0 \leq x < 1 \\ \{1,2,3,4,5,6\}, & x \geq 1 \end{cases}$

**Primer 38** *Neka $X : \mathcal{U}(0,1)$ i neka je $Y = -\ln X$. Naći raspodelu za $Y$.*

Rešenje: $X : \mathcal{U}(0,1) \;\Rightarrow\; \varphi_X(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$ Traži se raspodela za $Y$.

$Y = f(X) = -\ln X : (0,1) \to (0,\infty) = Y(\Omega) \;\Rightarrow\; X = f^{-1}(Y) = e^{-Y} : (0,\infty) \to (0,1)$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} x \notin (0,\infty) : & 0 \\ x \in (0,\infty) : & \varphi_X(f^{-1}(y))\,|(f^{-1}(y))'| = 1 \cdot |-e^{-y}| = e^{-y} \end{cases} \;\Rightarrow\; Y : \mathcal{E}(1)$$

**Primer 39** *Neka $X : \mathcal{N}(0,1)$ i neka je $Y = aX + b$, $a \neq 0$. Naći raspodelu za $Y$.*

Rešenje: $X : \mathcal{N}(0,1) \;\Rightarrow\; \varphi_X(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Traži se raspodela za $Y$.

$Y = f(X) = aX + b : (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty) = Y(\Omega) \;\Rightarrow$

$X = f^{-1}(Y) = \dfrac{Y - b}{a} : (-\infty,\infty) \to (-\infty,\infty)$.

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X(f^{-1}(y)) \cdot |(f^{-1}(y))'| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{a}\right)^2} \cdot \left|\frac{1}{a}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,|a|} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-b}{|a|}\right)^2} \;\Rightarrow\; Y : \mathcal{N}(b, |a|)$$

**PRIMER 40** *Neka* $X : \mathcal{N}(0,1)$ *i neka je* $Y = X^2$. *Naći raspodelu za* $Y$.

Rešenje: $F_Y(y) = P(Y < y) = P(X^2 < y) = \begin{cases} y < 0: & 0 \\ y \geq 0: & P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = 2 \cdot \Phi(\sqrt{y}) - 1 \end{cases}$

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} y < 0: & 0 \\ y \geq 0: & (2 \cdot \Phi(\sqrt{y}) - 1)' = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \end{cases} \Rightarrow Y : \chi_1^2$$

**PRIMER 41** *Neka* $X : \mathcal{N}(0.5,2)$. *Izračunati verovatnoće* $P(X \leq 0.55), P(X > 1), P(|X| < 2)$.

$$P(X \leq 0.55) = P((X - 0.5)/2 \leq (0.55 - 0.5)/2) = P(X^* \leq 0.025) = 0.510,$$

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) = 1 - P((X - 0.5)/2 \leq (1 - 0.5)/2) = 1 - P(X^* \leq 0.25) = \\ &= 1 - \Phi(0.25) = 1 - 0.5987 = 0.4013, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(|X| < 2) &= P(-2 < X < 2) = P((-2 - 0.5)/2 < (X - 0.5)/2 < (2 - 0.5)/2) = \\ &= P(-1.25 < X^* < 0.75) = \Phi(0.75) - \Phi(-1.5) = 0.7734 - (1 - 0.8944) = 0.6678. \end{aligned}$$

**PRIMER 42** *Tri puta se baca novčić. Neka $X$ predstavlja broj grbova, a $Y$ broj promena. Naći zakon raspodele slučajnog vektora $(X,Y)$ i marginalne zakone raspodele.*

**PRIMER 43** *Za diskretnu slučajnu promenljivu iz primera 42 naći uslovne zakone raspodele $Y|X=2$ i $X|Y=1$.*

**PRIMER 44** *$X$ se na slučajan način bira iz intervala $(0,1)$. Potom se $Y$ bira na slučajan način iz intervala $(X,1)$. Naći gustinu raspodele za $(X,Y)$ i marginalnu raspodelu za $Y$.*

**PRIMER 45** *Nezavisne slučajne promenljive $X$ i $Y$ imaju istu Poasonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Z=X+Y$.*

**PRIMER 46** *Neka su slučajne promenljive $X_1,X_2,\ldots,X_n$ nezavisne sa istom Bernulijevom raspodelom $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$.*

**PRIMER 47** *Naći regresiju $X$ po $Y$ za primer 42.*

**PRIMER 48** *Naći očekivanje i varijansu za normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m,\sigma)$.*

$X:\mathcal{N}(m,\sigma) \Leftrightarrow \frac{X-m}{\sigma}:\mathcal{N}(0,1)$

**PRIMER 49** *U jednoj školi težina dečaka [kg] ima raspodelu:* $X : \mathcal{N}(50, 2.5)$, *a devojčice:* $Y : \mathcal{N}(45, 3)$. *Na slučajan način je odabran dečak i, nezavisno, devojčica. Kolika je verovatnoća da će dečak imati barem 3 kg više od devojčice?*

**PRIMER 50** *Kolika je verovatnoća da je broj grbova u 100 bacanja novčića između 40 i 60?*

**PRIMER 51** *Neka* $T : t_{10}$ *i* $Y : \chi^2_4$. *Naći vrednost za koju je:* $P(Y < y_1) = 0.9$, $P(Y > y_2) = 0.95$, $P(T < t_1) = 0.95$, $P(T > t_2) = 0.25$, $P(|T| < t_3) = 0.975$.

**PRIMER 52** *Neka* $F : F_{9,15}$. *Naći vrednost za koju je* $P(F > f_1) = 0.05$ *i* $P(F < f_2) = 0.99$.

**PRIMER 53** *Ispitati postojanost ocenjivača* $\bar{X}_n$ *za* $m$, *obeležja* $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Aritmetička sredina uzorka $\bar{X}_n$ je centriran i postojan ocenjivač parametra jednakog matematičkom očekivanju obeležja.

**PRIMER 54** *Naći centrirani ocenjivač parametra jednakog disperziji obeležja.*

**PRIMER 55** *Naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametara* $m$ *i* $\sigma^2$ *za* $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

**PRIMER 56** *Naći ocenu maksimalne verodostojnosti parametra* $\lambda$ *obeležja* $X : \mathcal{P}(\lambda)$, *ispitati njenu centriranost i postojanost.*

**Primer 57** *Testirati hipotezu* $H_0(m = 13)$ *za uzorak iz zadatka* **??**.

**Primer 58** *Testirati hipotezu* $H_0(p = 1/3)$ *za uzorak iz zadatka* **??**.

**PRIMER 59** *U Mendelovim eksperimentima ukršteni pasulji su dali 315 okruglih žutih, 108 okruglih zelenih, 101 naboranih žutih i 32 naborana zelena zrna. Po njegovoj teoriji, njihov odnos bi trebao biti 9:3:3:1. Da li je njegova teorija ispravna? Kolika je p-vrednost?*

$9 + 3 + 3 + 1 = 16, \quad n = 315 + 108 + 101 + 32 = 556$

| oblik | ož | oz | nž | nz | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | $\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | |
| p | $\frac{9}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | |
| o | 315 | 108 | 101 | 32 | |
| $\frac{(o-e)^2}{e}$ | 0.0161 | 0.1302 | 0.1046 | 0.2363 | $\sum = 0.472$ |

$0.472 <$ `qchisq(.95,3)` $= 7.815$, ne odbacujemo $H_0$.

**Primer 60** *U tabeli su dati brojevi studenata koji su položili i pali kolokvijum kod tri asistenta. Testirati hipotezu da su procenti položenih nezavisni od asistenta.*

| | $X$ | $Y$ | $Z$ | |
|---|---|---|---|---|
| pali | 50 | 47 | 56 | 153 |
| položili | 5 | 14 | 8 | 27 |
| ukupno | 55 | 61 | 64 | |

**Primer 101** *Od* $N = 1000$ *proizvoda* $12\%$ *je škart. Na slučajan način se izvlači uzorak od 20 proizvoda. Kolika je verovatnoća da je u uzorku barem 3 škarta,*

(a) *ako se uzorak izvlači bez vraćanja?*

(b) *ako se uzorak izvlači sa vraćanjem?*

(c) *Aproksimirati poslednju verovatnoću koristeći Poasonovu raspodelu.*

(d) *Aproksimirati poslednju verovatnoću koristeći Normalnu raspodelu.*