Silvia Gilezan
Ljubo Nedović
Zorana Lužanin
Zoran Ovcin
Tatjana Grbić
Jelena Ivetić
Biljana Mihailović
Ksenija Doroslovački

Zbirka rešenih zadataka iz
Verovatnoće i statistike

Novi Sad, 2009. godine

Naslov:

Zbirka rešenih zadataka iz Verovatnoće i statistike

Autori:

dr Silvia Gilezan, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

dr Zorana Lužanin, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu,

dr Tatjana Grbić, docent Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

mr Biljana Mihailović, asistent Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

mr Ljubo Nedović, asistent Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

mr Zoran Ovcin, asistent Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

mr Jelena Ivetić, asistent Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

Ksenija Doroslovački, asistent pripravnik Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

Recenzenti:

dr Mila Stojaković, redovni profesor Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu,

dr Zagorka Lozanov-Crvenković, redovni profesor Prirodno matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu,

dr Dragan Đorić, docent Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu.

Predgovor

U ovoj Zbirci rešenih zadataka iz verovatnoće i statistike odabrano je i rešeno 205 zadataka. Pri izboru i rešavanju zadataka imali smo na umu studente master i doktorskih studija Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, posebno odseke Industrijsko inženjerstvo i menadžment, Inženjerstvo zaštite životne sredine, Mašinstvo i Saobraćaj. Svakako, ova zbirka može pomoći i drugima koji su zainteresovani za rešavanje problema iz verovatnoće i statistike.

Na početku svakog poglavlja dat je kratak teoretski uvod koji omogućava lakše praćenje daljeg sadržaja. Zadaci su rešavani postupno i detaljno. U rešenjima su često korišćeni grafički prikazi. Poslednjih deset strana zbirke sadrže ispitne zadatke u obliku u kome se daju na ispitu iz predmeta „Statističke metode" na pomenutim odsecima. Na kraju zbirke su date potrebne tablice funkcija koje se najčešće koriste u statistici.

Čitaocima želimo uspešan rad u savladavanju gradiva i polaganju ispita.

Autori se zahvaljuju recenzentima Prof. dr Mili Stojaković, redovnom profesoru Fakulteta tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu, Prof. dr Zagorki Lozanov-Crvenković, redovnom profesoru Prirodno matematičkog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu i Doc. dr Draganu Đoriću, docentu Fakulteta organizacionih nauka Univerziteta u Beogradu, na korisnim primedbama i sugestijama.

Štampanje knjige je finansirano od strane Tempus projekta *Doctoral School towards European Knowledge Society – DEUKS,* JEP–2006–41099.

Autori

Novi Sad
15. mart 2009.

Sadržaj

1 Kombinatorika, prostor verovatnoće i verovatnoća slučajnih događaja

1.1 Skupovi i operacije sa skupovima

U teoriji verovatnoće, događaji su skupovi. Iz tog razloga se će često biti korišćene neke poznate osobine operacija sa skupovima.

Neka je X univerzalni skup. Za skup A kažemo da je **podskup** skupa X, u oznaci $A \subseteq X$, ako važi $x \in A \Rightarrow x \in X$. Neka su A, B i C podskupovi skupa X. Skupovne operacije su definisane sa:

unija skupova A **i** B je $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$,

presek skupova A **i** B je $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$,

razlika skupova A **i** B je $A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$,

komplement skupa A je $\overline{A} = \{x : x \in X \wedge x \notin A\} = X \setminus A$,

Dekartov proizvod skupova A **i** B je $A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$.

Neke od osobina skupovnih operacija su:

- $\overline{\overline{A}} = A$, $\overline{\emptyset} = X$, $\emptyset \cup A = A$, $\emptyset \cap A = \emptyset$, $X \cap A = A$, $X \cup A = X$,
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

---

[1] *Za* $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ *i* $C = \{3,4,5,6\}$ *napisati elemente skupova* $A \cap C$, $A \cup B$ *i* $B \setminus C$.

Rešenje: $A \cap C = \{3,4\}$, $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$, $B \setminus C = \{2,8\}$.

---

[2] *Za* $A = \{a,b,1\}$, $B = \{b,1,c\}$ *i* $C = \{a,1\}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cap B$, $A \times C$ *i* $(A \cup B) \cap C$.

Rešenje: $A \cup B = \{a,b,1,c\}$, $B \cap C = \{1\}$, $A \setminus B = \{a\}$, $B \setminus A = \{c\}$, $A \cap B = \{b,1\}$, $A \times C = \{(a,a),(a,1),(b,a),(b,1),(1,a),(1,1)\}$,
$(A \cup B) \cap C = \{a,b,1,c\} \cap \{a,1\} = \{a,1\}$.

---

[3] *Za date podskupove*

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x \text{ je deljivo sa } 3 \text{ i } x < 10\}$ *i*

$C = \{x \mid x \in \mathbb{N}, x < 12 \text{ i } x \text{ je prost broj}\} \cup \{1\}$

univerzalnog skupa $\mathbb{N}$ *napisati elemente skupova* $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $A \cap B \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\mathcal{P}(B)$, B^2, $\overline{(A \cup B)} \cap C$ *i* $(A \setminus C) \cup B$.

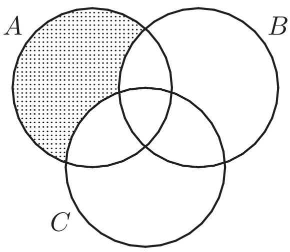
Rešenje: Dakle, za skupove $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{3, 6, 9\}$ i $C = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ je
$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$, $\quad B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11\}$, $\quad A \cap B = \{3, 6\}$,
$A \cap \overline{B} = A \cap \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} = \{1, 2, 4, 5\}$, $\quad A \cap B \cap C = \{3, 6\} \cap C = \{3\}$,
$A \setminus B = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \setminus A = \{9\}$, $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{3, 6\}, \{3, 9\}, \{6, 9\}, B\}$,
$B^2 = B \times B = \{(3, 3), (3, 6), (3, 9), (6, 3), (6, 6), (6, 9), (9, 3), (9, 6), (9, 9)\}$,
$\overline{(A \cup B)} \cap C = \{7, 8, 10, 11, 12, \ldots\} \cap C = \{7, 11\}$,
$(A \setminus C) \cup B = \{4, 6\} \cup B = \{3, 4, 6, 9\}$.

---

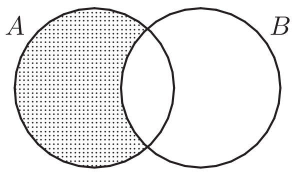
[4] *Grafički ispitati koje su od sledećih jednakosti tačne:*

(a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ (b) $A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$
(c) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ (d) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
(e) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$ (f) $\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

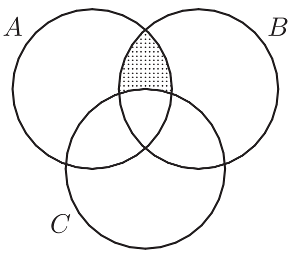
Rešenje:

(a)


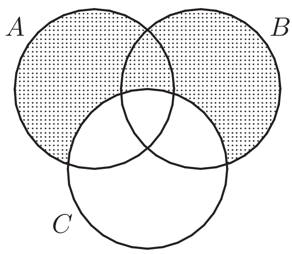
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

(b)


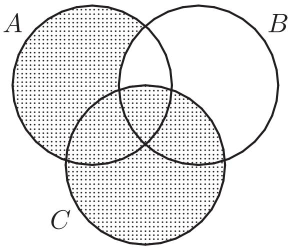
$A \setminus B = (A \cup B) \setminus B$

(c)


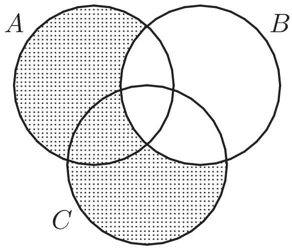
$(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

(d)


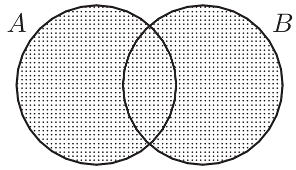
$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

(e)


$\neq$



$(A \setminus B) \cup C$ $\qquad$ $(A \cup C) \setminus B$

(f) 

$\overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} = A \cup B$

1.2 Kombinatorika

- **Binomni koeficijent**: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. $(0! = 1)$

- **Pravilo proizvoda**: ako skup A_1 ima n_1 elemenata, skup A_2 ima n_2 elemenata, $\ldots$, skup A_k ima n_k elemenata, i ako se bira po jedan element iz svakog od skupova A_i pri čemu su svi posmatrani elementi različiti, ovakvih izbora ima $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

- **Permutacije**:

  - **Permutacije bez ponavljanja**: svi elementi skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se raspoređuju u uređenu n-torku; broj ovakvih rasporeda je $\mathrm{P_n} = n!$.
  - **Permutacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ se bira n_1 puta element a_1, n_2 puta element a_2, $\ldots$, n_k puta element a_k, i izabrani elementi se svrstavaju u uređenu n-torku onim redom kojim su birani; ovakvih izbora ima $\mathrm{P^n_{n_1,n_2,\ldots,n_k}} = \dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$, gde je $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

- **Varijacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se $k \leq n$ puta bira neki element tako da svi izabrani elementi budu različiti (prethodno izabrani elementi se ne biraju ponovo), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\mathrm{V^n_k} = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} k!$.

- **Varijacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se k puta bira neki element tako da se svaki put element bira iz celog skupa A (prethodno izabrani elementi se mogu ponovo izabrati), i izabrani elementi se raspoređuju u uređenu n-torku ; ovakvih izbora raspoređivanja ima $\mathrm{\overline{V}^n_k} = n^k$.

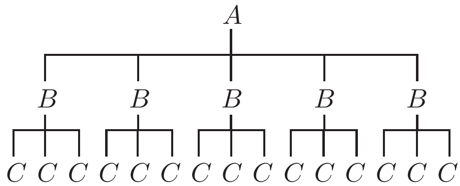
- **Kombinacije bez ponavljanja**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup od $k \leq n$ elemenata; ovakvih podskupova ima $\mathrm{C^n_k} = \binom{n}{k}$.

- **Kombinacije sa ponavljanjem**: iz skupa $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ se bira podskup u kome se elementi mogu ponavljati, ali tako da ukupno elemenata sa ponavljanjima bude k; ovakvih izbora ima $\mathrm{\overline{C}^n_k} = \binom{n+k-1}{k}$.

---

[5] *Od mesta A do mesta B vodi* 5 *puteva, a od mesta B do mesta C vode* 3 *puta. Koliko puteva vodi od mesta A do mesta C preko mesta B?*

Rešenje:



Broj puteva je $5 \cdot 3 = 15$
(vidi pravilo proizvoda, strana 3)

---

[6] *Koliko se različitih vrsta značaka može napraviti ako se značke prave u obliku kruga, trougla, kvadrata ili šestougla, i u svaku značku se upisuje jedno veliko slovo azbuke (*А,Б,В,. . . ,Ш*) i jedna cifra (*$0, 1, 2, \ldots, 9$*)?*

Rešenje: Mogućih oblika ima 4, velikih slova ima 30, a cifara ima 10, te po pravilu proizvoda različitih vrsta značaka ima $4 \cdot 30 \cdot 10 = 1200$.

---

[7] *Na koliko načina se može izabrati* 5 *knjiga iz kolekcije od* 20 *različitih knjiga?*

Rešenje: Iz skupa od 20 knjiga biramo podskup od 5 knjiga (nije bitan redosled izabranih knjiga i nema ponavljanja pri izboru), te sledi da je broj mogućih izbora $\mathrm{C}_5^{20} = \frac{20!}{5!15!} = \frac{16\cdot17\cdot18\cdot19\cdot20}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = 15504$.

---

[8] *Na koliko različitih načina učesnik u igri* „loto 7/39” *može popuniti tiket?*

Rešenje: Jedno popunjavanje krstićima 7 od 39 polja na tiketu je ekvivalentno izboru podskupa od 7 brojeva iz skupa od 39 brojeva, te sledi da načina popunjavanja ima $\mathrm{C}_7^{39} = \frac{39!}{7!32!} = 15380937$.

---

[9] *Na koliko različitih načina možemo izabrati* 5 *karata iz špila od* 52 *karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) *tačno* 2 *keca,*

(b) *bar* 2 *keca,*

(c) *najviše* 2 *keca?*

Rešenje: U špilu od 52 karte se nalaze 4 keca, tako da se pri izboru 5 karata vrši izbor iz skupa od 4 keca i 48 karate koje nisu kečevi.

(a) Primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj opisanih izbora $k_2 = m \cdot n$ gde je m broj načina da se od 4 keca odaberu 2, a n je broj načina da se od 48 karata koje nisu kečevi odaberu 3. U oba slučaja se radi o izboru podskupa gde nema ponavljanja izbora (ne može se dva puta birati jedna ista karta), te je $m = \mathrm{C}_2^4$ i $n = \mathrm{C}_3^{48}$, odnosno rešenje glasi $k_2 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^{48} = \frac{3\cdot4}{2} \cdot \frac{46\cdot47\cdot48}{3\cdot2} = 103776$.

(b) Bar 2 keca se mogu izabrati na $k_2 + k_3 + k_4$ načina gde je k_i, $i \in \{2, 3, 4\}$ broj načina izbora tačno i kečeva. Brojeve k_i, $i \in \{3, 4\}$ možemo dobiti na istovetan način kao broj k_2 pod (a), te je $k_2 = 103776$, $k_3 = \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_2^{48} = \frac{4}{1} \cdot \frac{47\cdot48}{2} = 4512$, $k_4 = \mathrm{C}_4^4 \cdot \mathrm{C}_1^{48} = 1 \cdot \frac{48}{1} = 48$, tj. rešenje zadatka je $103776 + 4512 + 48 = 108336$.

(c) Najviše 2 keca se mogu izabrati na $k_0+k_1+k_2$ načina gde je k_i, $i \in \{0,1,2\}$ broj načina izbora tačno i kečeva. Brojeve k_0, k_1, k_2 dobijamo na isti način kao k_2, k_3, k_4 pod (a) i (b), te je $k_2 = 103776$, $k_1 = \mathrm{C}_1^4 \cdot \mathrm{C}_4^{48} = \frac{4}{1} \cdot \frac{45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 778320$, $k_0 = \mathrm{C}_0^4 \cdot \mathrm{C}_5^{48} = 1 \cdot \frac{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 1712304$, odnosno rešenje zadatka glasi $1712304 + 778320 + 103776 = 2594400$.

---

[10] *Na koliko različitih načina se može izabrati* 8 *karata iz špila od* 52 *karte tako da među izabranim kartama bude*

(a) *tačno* 2 *sedmice i* 3 *keca,*

(b) *tačno* 2 *sedmice i bar* 3 *keca?*

Rešenje: Označimo sa s_i broj načina izbora i sedmica, sa k_j broj načina izbora j kečeva, a sa o_k broj načina izbora k karata među kojima nema ni sedmica ni kečeva (takvih karata u špilu ima $52-4-4=44$). Analogno postupku iz zadatka [9], koristeći pravilo proizvoda izračunavamo

(a) $s_2 k_3 o_3 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} = 317856$.

(b) $s_2 k_3 o_3 + s_2 k_4 o_2 = \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_3^4 \cdot \mathrm{C}_3^{44} + \mathrm{C}_2^4 \cdot \mathrm{C}_4^4 \cdot \mathrm{C}_2^{44} = 317856 + 5676 = 323532$.

---

[11] *Hor se sastoji od* 10 *članova. Na koliko načina se može birati po* 6 *članova za nastup, za svaki od* 3 *dana turneje hora, ali tako da*

(a) *sastavi za nastup različitih dana mogu biti isti,*

(b) *sastavi za nastup različitih dana ne mogu biti isti?*

Rešenje:

(a) Svakog dana se bira podskup od 6 članova iz skupa od 10 članova hora (kombinacije bez ponavljanja od 10 elemenata klase 6). Dakle, primenom pravila proizvoda dobijamo da je broj izbora $\mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} \cdot \mathrm{C}_6^{10} = 210^3 = 9261000$.

(b) Prvog dana se, naravno, sastav može birati na $\mathrm{C}_6^{10} = 210$ načina, drugog dana je broj izbora za jedan manji, a trećeg dana je broj izbora još za jedan manji. Sledi da primenom pravila proizvoda dobijamo za ukupan broj načina biranja $210 \cdot 209 \cdot 208 = 9129120$.

---

[12] *Betoven je napisao ukupno* 9 *simfonija, Mocart* 27 *koncerata za klavir, a Šubertovih gudačkih kvarteta ima* 15.

(a) *Radio stanica u večernjoj muzičkoj emisiji svakog dana pušta po jednu Betovenovu simfoniju i jedan Mocartov klavirski koncert. Koliko najviše dana zaredom stanica može da pravi različite emisije (emisije koje se razlikuju u bar jednoj od dve kompozicije koje emituje, pri čemu ne smatramo različitim emisije u kojima su iste kompozicije emitovane obrnutim redosledom)?*

(b) *Ako urednik pomenute emisije svake večeri pušta prvo jednu Betovenovu simfoniju, zatim jedan Mocartov klavirski koncert, i na kraju jedan Šubertov gudački kvartet, koliko dugo urednik može na ovaj način da pravi emisije?*

Rešenje:

(a) Koristeći pravilo proizvoda dobijamo da je broj različitih emisija (broj mogućih izbora) $9 \cdot 27 = 243$.

(b) Na isti način kao pod (a) se dobija da je broj mogućih načina izbora emisija $9 \cdot 27 \cdot 15 = 3645$, što je $(3645 = 9 \cdot 365 + 360)$ približno 10 godina.

---

[13] *Napisati sve dvocifrene prirodne brojeve koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4$ *tako da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre.*

Rešenje:

(a) Ovakvih brojeva ima $\mathrm{V}_2^4 = 12$, i to su brojevi 12, 13, 14, 21, 23, 24, 31, 32, 34, 41, 42, 43.

(b) Ovakvih brojeva ima $\overline{\mathrm{V}}_2^4 = 16$, i to su brojevi 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

---

[14] *Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ *takvih da se u jednom broju*

(a) *ne mogu nalaziti iste cifre,*

(b) *mogu nalaziti iste cifre?*

Rešenje:

(a) $\mathrm{V}_4^8 = 1680$.

(b) $\overline{\mathrm{V}}_4^8 = 4096$.

---

[15] *Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?*

Rešenje: Prvu cifru a biramo iz skupa $\{1, 2, \ldots, 9\}$, dakle postoji 9 mogućih izbora. Nakon što smo izbrali prvu cifru, ostale cifre biramo tako što od elemenata skupa $\{0, 1, 2, \ldots, 9\} \setminus \{a\}$ (ima ih 9) sastavljamo uređenu 4-orku kod koje su sve komponente različite. Broj ovakvih izbora je (varijacije bez ponavljanja) $\mathrm{V}_4^9 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$. Primenom pravila proizvoda dobijamo da brojeva opisanog tipa ima $9 \cdot 3024 = 27216$.

Drugi način: Prva cifra broja ne može biti nula, te ćemo traženi broj dobiti kao $a - b$ gde je a ukupan broj nizova od 5 različitih cifara (gde i prva cifra može biti 0), a b je broj nizova od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0. Nizove od 5 različitih cifara pravimo tako što iz skupa od 10 cifara 5 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $a = \mathrm{V}_5^{10} = 30240$ načina. Nizove od 5 različitih cifara kod kojih je prva cifra 0 pravimo tako što iz skupa od 9 cifara (cifra 0 je „potrošena") 4 puta vadimo jednu po jednu cifru bez vraćanja (ponavljanja), što se može uraditi na $b = \mathrm{V}_4^9 = 3024$ načina. Prema tome, petocifrenih brojeva opisanog tipa ima $30240 - 3024 = 27216$.

---

[16] *Na šahovskom turniru učestvuje* 12 *šahista. Ako svaki šahista treba da odigra po jednu partiju sa svim ostalim šahistima, koliko će ukupno partija biti odigrano na turniru?*

Rešenje: Biće odigrano onoliko partija koliko ima parova šahista, tj. koliko ima dvočlanih podskupova skupa od 12 šahista, a taj broj je $\mathrm{C}_2^{12} = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$.

---

[17] *Do vrha planine vodi* 5 *puteva. Na koliko načina planinar može da se popne i spusti sa vrha ako*

(a) *može da se spušta istim putem kojim se popeo,*

(b) *ne može da se spušta istim putem kojim se popeo?*

Rešenje: U oba slučaja se put za penjanje bira na 5 načina, a put za spuštanje se u prvom slučaju bira na 5, a u drugom na 4 načina, tako da rešenje glasi

(a) $\overline{\mathrm{V}}_2^5 = 5 \cdot 5 = 25$,

(b) $\mathrm{V}_2^5 = 5 \cdot 4 = 20$.

---

[18] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1, 1, 1, 2, 2, 2$*?*

Rešenje: Od zadanih cifara šestocifreni broj pravimo tako što cifre raspoređujemo u niz (bitan je redosled i koristimo sve cifre), ali među ciframa ima i jednakih, što znači da se radi o permutacijama sa ponavljanjem, te odgovor glasi $\mathrm{P}_{3,3}^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$.

---

[19] *Koliko različitih šestocifrenih brojeva može da se napiše od cifara* $1, 2, 2, 3, 3, 3$*?*

Rešenje: Na isti način kao u zadatku [18] dobijamo rešenje $\mathrm{P}_{1,2,3}^6 = \frac{6!}{1!2!3!} = 60$.

---

[20] *Iz grupe od* 10 *muškaraca i* 8 *žena treba odabrati* 6 *osoba među kojima najmanje* 3 *treba da budu žene. Na koliko načina se može izvršiti ovakav izbor?*

Rešenje: Neka je $\check{z}_i$, $i \in \{3, 4, 5, 6\}$ broj načina na koji se mogu odabrati i žena i $6 - i$ muškaraca (ukupno 6 osoba). Traženi broj načina izbora je $\check{z}_3 + \check{z}_4 + \check{z}_5 + \check{z}_6$. Kada pri izboru 6 osoba biramo i žena i $6 - i$ muškaraca, tada iz skupa od 10 muškaraca biramo na $\mathrm{C}^{10}_{6-\mathrm{i}}$ načina podskup od $6-i$ elemenata, i iz skupa od 8 žena biramo na $\mathrm{C}^{8}_{\mathrm{i}}$ načina podskup od i elemenata, te na osnovu pravila proizvoda dobijamo da je $\check{z}_i = \mathrm{C}^{10}_{6-\mathrm{i}} \cdot \mathrm{C}^{8}_{\mathrm{i}} = \binom{10}{6-i} \cdot \binom{8}{i}$. Prema tome,

$$\check{z}_3 = \binom{10}{3} \cdot \binom{8}{3} = 120 \cdot 56 = 6720, \qquad \check{z}_4 = \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} = 45 \cdot 70 = 3150,$$
$$\check{z}_5 = \binom{10}{1} \cdot \binom{8}{5} = 10 \cdot 56 = 560, \qquad \check{z}_6 = \binom{10}{0} \cdot \binom{8}{6} = 1 \cdot 28 = 28,$$

te rešenje zadatka glasi $6720 + 3150 + 560 + 28 = 10458$.

---

[21] *Koliko se reči (računajući i besmislene) može napisati koristeći slova a, b, c, d, e tako da se svako slovo u reči javlja najviše jednom i tako da reč*

(a) *obavezno sadrži slovo a,*

(b) *počinje slovom a?*

Rešenje: Neka je k_i broj reči dužine i, $i \in \{1,2,3,4,5\}$. Broj reči koje se mogu napisati u skladu sa zadatim uslovima je $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5$.

(a) Očigledno je $k_1 = 1$, a reč dužine i, $i \in \{2,3,4,5\}$ pravimo tako što osim slova a odaberemo još $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$, a zatim ova slova ređamo u niz. Izbor $i-1$ slova iz skupa $\{b,c,d,e\}$ se može uraditi na $\mathrm{C}^{4}_{\mathrm{i}-1}$ načina, a izabrana slova i slovo a se zatim mogu poređati u niz na P_{i} načina (na primer, pri pisanju reči od 3 slova pored slova a možemo izabrati još parove slova $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{b,e\}$, $\{c,d\}$, $\{c,e\}$ i $\{d,e\}$, pa ako smo odabrali npr. slova $\{b,d\}$, tada možemo napisati reči *abd*, *adb*, *bad*, *bda*, *dab* i *dba*); prema tome, koristeći pravilo proizvoda, za $i \in \{2,3,4,5\}$ dobijamo $k_i = \mathrm{C}^{4}_{\mathrm{i}-1} \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{i}}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}^4_1 \cdot \mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{1!3!} \cdot 2! = 8, \qquad k_3 = \mathrm{C}^4_2 \cdot \mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{2!2!} \cdot 3! = 36,$$
$$k_4 = \mathrm{C}^4_3 \cdot \mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{3!1!} \cdot 4! = 96, \qquad k_5 = \mathrm{C}^4_4 \cdot \mathrm{P}_5 = \tfrac{4!}{4!0!} \cdot 5! = 120.$$

Dakle, može se napisati $1 + 8 + 36 + 96 + 120 = 161$ reč.

(b) Prvi način: analogno kao pod (a), osim što nakon izbora slova od tih slova ne pravimo proizvoljan niz, već slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a ostala raspoređujemo u niz na proizvoljan način, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{C}^{4}_{\mathrm{i}-1} \cdot \mathrm{P}_{\mathrm{i}-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{C}^4_1 \cdot \mathrm{P}_1 = \tfrac{4!}{1!3!} \cdot 1! = 4, \qquad k_3 = \mathrm{C}^4_2 \cdot \mathrm{P}_2 = \tfrac{4!}{2!2!} \cdot 2! = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{C}^4_3 \cdot \mathrm{P}_3 = \tfrac{4!}{3!1!} \cdot 3! = 24, \qquad k_5 = \mathrm{C}^4_4 \cdot \mathrm{P}_4 = \tfrac{4!}{4!0!} \cdot 4! = 24.$$

Dakle, može se napisati $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ reči.

Drugi način: pri pravljenju reči od i slova, slovo a obavezno stavljamo na prvo mesto a zatim pravimo niz od $i-1$ slova od elemenata skupa $\{b,c,d,e\}$, tako da je $k_1 = 1$ i $k_i = \mathrm{V}^{4}_{\mathrm{i}-1}$, $i \in \{2,3,4,5\}$, odnosno

$$k_2 = \mathrm{V}^4_1 = 4, \qquad k_3 = \mathrm{V}^4_2 = 4 \cdot 3 = 12,$$
$$k_4 = \mathrm{V}^4_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24, \qquad k_5 = \mathrm{V}^4_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

Dakle, može se napisati $1 + 4 + 12 + 24 + 24 = 65$ reči.

1.3 Prostor događaja

Neka je Ω skup, i neka je $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω je **σ-polje** nad Ω, odnosno, uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ je **prostor događaja** ukoliko važi:

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(2) ako je $A \in \mathcal{F}$, tada je i $\overline{A} \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

U tom slučaju, elementi familije $\mathcal{F}$ su **događaji**, skupove $\emptyset$ i Ω interpretiramo redom kao **nemoguć događaj** i **siguran događaj**, a za događaj $A \in \mathcal{F}$, njemu odgovarajući komplement $\overline{A} \in \mathcal{F}$ interpretiramo kao **suprotan događaj događaja** A. Elemente ω skupa Ω nazivamo **elementarnim događajima**.

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja, i neka su $A \in \mathcal{F}$ i $B \in \mathcal{F}$ neki događaji. U teoriji verovatnoće je uobičajeno da se umesto oznake $A \cap B$ koristi oznaka $A \cdot B$ ili jednostavno AB, a za disjunktne događaje A i B ($A \cap B = \emptyset$) se umesto $A \cup B$ koristi oznaka $A + B$ čime se u samom zapisu naglašava da se radi o disjunktnim događajima. Pri tome operacije sa skupovima (događajima) interpretiramo na sledeći način:

AB	-	„**realizovala su se oba događaja A i B**”,
$A \cup B$	-	„**realizovao se bar jedan od događaja A i B**”,
$A + B$	-	„**realizovao se bar jedan od disjunktnih događaja A i B**” (radi o disjunktnim događajima, zato $A + B$ tačnije interpretiramo sa „**realizovao se tačno jedan od disjunktnih događaja A i B**”),
$\overline{A}$	-	„**realizovao se suprotan događaj događaja A**”.

Prostor događaja $(\Omega, \mathcal{F})$ ima još i sledeće važne osobine:

(1) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

(2) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(3) ako je $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$,

(4) ako je $\forall i \in \mathbb{N}$, $A_i \in \mathcal{F}$, tada je i $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

---

[22] *Eksperiment se sastoji od jednog bacanja kockice za igru. Posmatrajmo događaje:*

A	-	*„pri bacanju je dobijen paran broj”,*
B	-	*„pri bacanju je dobijen neparan broj”,*
C	-	*„pri bacanju je dobijen broj manji od 3”.*

(a) *Napisati skup elementarnih događaja (ishoda eksperimenta) Ω.*

(b) *Napisati događaje A, B i C kao skupove elementarnih događaja.*

(c) *Koji su parovi događaja A, B, C disjunktni (nesaglasni, isključivi)?*

Rešenje:

(a) Označimo sa $\{\omega_i\}$, $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$ događaj „*pri bacanju je dobijen broj* i”. Tada je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

(b) $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $\quad B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\quad C = \{\omega_1, \omega_2\}$.

(c) Disjunktni su samo događaji A i B ($A \cap B = \emptyset$).

---

[23] *Navesti skup elementarnih ishoda za sledeće eksperimente:*

(a) *bacanje jednog novčića,*

(b) *bacanje jednog zlatnog i jednog srebrnog novčića,*

(c) *bacanje jednog zlatnog, jednog srebrnog i jednog bronzanog novčića,*

(d) *bacanje kockice za igru i jednog novčića,*

(e) *bacanje dva puta kockice za igru,*

(f) *izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice,*

(g) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu je bitan redosled izvučenih kuglica,*

(h) *izvlačenje dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze* 3 *bele,* 4 *crvene i* 2 *plave kuglice, pri čemu* nije *bitan redosled izvučenih kuglica,*

(i) *registrovanje ispravnosti jedne sijalice,*

(j) *registrovanje ispravnosti tri sijalice.*

Rešenje:

(a) $\Omega = \{\omega_G, \omega_P\}$, gde je G događaj „*pri bacanju je pao grb*”, a P je događaj „*pri bacanju je palo pismo*”.

(b) $\Omega = \{\omega_{GG}, \omega_{GP}, \omega_{PG}, \omega_{PP}\}$, gde je ω_{XY} događaj „*pri bacanju zlatnog novčića je palo* $X \in \{G, P\}$, *a pri bacanju srebrnog* $Y \in \{G, P\}$”, gde je sa G skraćeno označen *grb* a sa P *pismo*; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^2 = 4$.

(c) $\Omega = \{\omega_{PPP}, \omega_{PPG}, \omega_{PGP}, \omega_{PGG}, \omega_{GPP}, \omega_{GPG}, \omega_{GGP}, \omega_{GGG}, \}$, uz analogne oznake kao pod (b); primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_3^2 = 8$.

(d) $\Omega = \{\omega_{1P}, \omega_{1G}, \omega_{2P}, \omega_{2G}, \omega_{3P}, \omega_{3G}, \omega_{4P}, \omega_{4G}, \omega_{5P}, \omega_{5G}, \omega_{6P}, \omega_{6G}\}$, gde brojevi u indeksu predstavljaju broj dobijen na kockici, a slova predstavljaju odgovarajuću stranu novčića.

(e) $\Omega = \{\omega_{ij} \mid i, j \in \{1, 2, \ldots, 6\}\}$, gde je ω_{ij} događaj „*pri prvom po redu bacanju je pao broj* i *a pri drugom po redu broj* j”; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 36$.

(f) $\Omega = \{\omega_b, \omega_c, \omega_p\}$, gde je ω_x događaj „*izvučena je kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje.

(g) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cb}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pb}, \omega_{pc}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*prvo je izvučena kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$ *a zatim kuglica boje* $y \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^3 = 9$.

(h) $\Omega = \{\omega_{bb}, \omega_{bc}, \omega_{bp}, \omega_{cc}, \omega_{cp}, \omega_{pp}\}$, gde je ω_{xy} događaj „*izvučena je jedna kuglica boje* $x \in \{b, c, p\}$ *i još jedna kuglica boje* $y \in \{b, c, p\}$" gde navedeno slovo predstavlja prvo slovo naziva odgovarajuće boje; primetimo da je $|\Omega| = \overline{\mathrm{C}}_2^3 = 6$.

(i) $\Omega = \{\omega_0, \omega_1\}$, gde je ω_0 događaj „*sijalica je neispravna*" a ω_1 događaj „*sijalica je ispravna*".

(j) $\Omega = \{\omega_{000}, \omega_{001}, \omega_{010}, \omega_{011}, \omega_{100}, \omega_{101}, \omega_{110}, \omega_{111}\}$, gde je ω_{ijk} događaj „*prva sijalica je u stanju* i*, druga u stanju* j*, a treća u stanju* k*,* $i, j, k \in \{0, 1\}$" pri čemu stanje 0 znači da je odgovarajuća sijalica *neispravna*, a stanje 1 da je *ispravna*.

---

[24] *Radnik je proizveo 3 artikla. Neka je* X_i*,* $i \in \{1, 2, 3\}$ *događaj „*i*-ti prozvedeni artikal je ispravan" (artikle razlikujemo po tome kojim redom su proizvedeni). Pomoću događaja* X_i *i* $\overline{X}_i$ *izraziti skup elementarnih ishoda kao i događaje*

A - „*svi artikli su ispravni*",
B - „*bar jedan artikal je neispravan*",
C - „*tačno jedan artikal je ispravan*",
D - „*najviše dva artikla su ispravna*",
E - „*bar dva artikla su ispravna*",
F - „*tačno dva artikla su neispravna*".

Rešenje:

$$\Omega = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3,$$
$$\overline{X}_1X_2X_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\},$$

$A = \{X_1X_2X_3\}$,

$B = \overline{A} = \{X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3, X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3\}$,

$C = \{X_1\overline{X}_2\overline{X}_3, \overline{X}_1X_2\overline{X}_3, \overline{X}_1\overline{X}_2X_3\}$,

$D = B$,

$E = \{X_1X_2X_3, X_1X_2\overline{X}_3, X_1\overline{X}_2X_3, \overline{X}_1X_2X_3\}$,

$F = C$.

---

[25] *Meta se gađa sa 3 metka. Neka je* S_i*,* $i \in \{1, 2, 3\}$ *događaj „*i*-tim metkom je meta pogođena". Preko događaja* S_i *izraziti događaje*

A - „*ostvarena su 3 pogotka*",
B - „*ostvarena su 3 promašaja*",
C - „*ostvaren je bar 1 pogodak*",
D - „*ostvaren je bar 1 promašaj*",
E - „*ostvarena su bar 2 pogotka*",
F - „*ostvaren je najviše 1 pogodak*".

Rešenje:
$A = S_1S_2S_3$,
$B = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3$,
$C = \overline{B} = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\}$,
$D = \overline{A} = \{S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2S_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\}$,
$E = \{S_1S_2S_3, S_1S_2\overline{S}_3, S_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1S_2S_3\}$,
$F = \overline{E} = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\}$,

---

[26] *Iz skupa* $X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ *se na slučajan način bira jedan broj, i neka je* $\Omega = X$ *skup elementarnih događaja tako da je* $i \in \Omega$ *događaj „iz skupa* X *je izabran broj* i*". Za događaje*

A - *„izabrani broj je manji od* 7*",*
B - *„izabrani broj je veći ili jednak sa* 6*",*
C - *„izabrani broj je paran",*
D - *„izabrani broj je neparan",*

navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje, i rečima opisati događaje AB, $A(B \cup D)$, $\overline{A}B$, $\overline{A}C$, $\overline{A \cup D}$, $\overline{A \cup B \cup C}$, ABC *i* $ABCD$.

Rešenje: Iz $A = \{2,3,4,5,6\}$, $B = \{6,7,8,9,10,11,12\}$, $C = \{2,4,6,8,10,12\}$, $D = \{3,5,7,9,11\}$ sledi

$AB = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6" (ili jednostavno „*izabrani broj je manji od* 7 *i veći ili jednak sa* 6"),

$A(B \cup D) = A \cap \{3,5,6,7,8,9,10,11,12\} = \{3,5,6\}$ je događaj „*izabran je jedan od brojeva* 3, 5, 6",

$\overline{A}B = \{7,8,9,10,11,12\} \cap B = \{7,8,9,10,11,12\}$ je događaj „*izabrani broj je veći od* 6",

$\overline{A}C = \{7,8,9,10,11,12\} \cap C = \{8,10,12\}$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6",

$\overline{A \cup D} = \overline{\{2,3,4,5,6,7,9,11\}} = \{8,10,12\} = \overline{A}C$ je događaj „*izabran je paran broj koji je veći od* 6",

$\overline{A \cup B \cup C} = \overline{\Omega} = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj nije manji od 7, i nije manji ili jednak sa 6, i nije paran, što je nemoguće),

$ABC = \{6\}$ je događaj „*izabrani broj je* 6",

$ABCD = \{6\} \cap D = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (izabrani broj je manji od 7, i veći je ili jednak sa 6, i pri tome je i paran i neparan, što je nemoguće).

---

[27] *Baca se kockica za igru i posmatraju se događaji*

A - *„na kockici je pao broj manji od* 4*",*
B - *„na kockici je pao paran broj",*
C - *„na kockici je pao broj koji nije manji od* 5*".*

Navesti od kojih se elementarnih događaja sastoje i rečima opisati događaje $A \cup B$, $B \cup C$, $B \cap C$, $A \cap C$, $A \cup B \cup C$, $\overline{C}$, $\overline{B}$ *i* $A \cup (B \cap \overline{C})$.

Rešenje: Označimo elementarne događaje, kao u zadatku [26], brojevima koji predstavljaju broj koji je pao na kockici. Dakle, skup svih elementarnih događaja je $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, a događaji A, B i C su zapravo skupovi $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4,6\}$ i $C = \{5,6\}$. Sledi

$A \cup B = \{1,2,3,4,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 5",

$B \cup C = \{2,4,5,6\}$ je događaj „*pao je broj različit od* 1 *i* 3",

$B \cap C = \{6\}$ je događaj „*pao je broj* 6",

$A \cap C = \emptyset$ je *nemoguć* događaj (pao je broj koji je manji od 4 i veći je ili jednak sa 5, što je nemoguće),

$A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6\} = \Omega$ je *siguran* događaj,

$\overline{C} = \{1,2,3,4\}$ je događaj „*pao je broj manji od* 5",

$\overline{B} = \{1,3,5\}$ je događaj „*pao je neparan broj*",

$A \cup (B \cap \overline{C}) = A \cup (\{2,4,6\} \cap \{1,2,3,4\}) = \{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$.

---

[28] *Na nekoj raskrsnici se posmatra kretanje automobila* a_1*,* a_2 *i* a_3 *koji mogu da skreću ili levo ili desno, i sa* A_i*,* $i \in \{1,2,3\}$ *je označen događaj „automobil* a_i *na raskrsnici skreće desno". Preko* A_i *izraziti događaje*

X - *„sva tri automobila skreću na istu stranu",*
Y - *„više automobila je skrenulo u levu stranu",*
Z - *„ni jedan automobil nije skrenuo na levu stranu",*
W - *„prvi i treći automobil su skrenuli na istu stranu".*

Rešenje:

$X = \{A_1A_2A_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$,

$Y = \{\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3, A_1\overline{A}_2\overline{A}_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2A_3\}$,

$Z = A_1A_2A_3$,

$W = \{A_1A_2A_3, A_1\overline{A}_2A_3, \overline{A}_1A_2\overline{A}_3, \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\}$.

---

[29] *Četiri studenta polažu ispit, i* S_i*,* $i \in \{1,2,3,4\}$ *označava događaj „i-ti student je položio ispit",* $i \in \{1,2,3,4\}$*. Napisati skup elementarnih događaja* Ω *i preko događaja* S_i *izraziti događaje*

A - *„nijedan student nije položio ispit",*
B - *„položio je samo prvi student",*
C - *„položio je samo jedan student",*
D - *„položio je bar jedan student",*
E - *„položila su tačno dva studenta",*
F - *„položila su najviše dva studenta",*
G - *„položila su najmanje tri studenta",*
H - *„položila su najviše tri studenta".*

Rešenje: Siguran događaj

$$\begin{aligned}\Omega = \{&S_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &S_1\overline{S}_2S_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\\ &\overline{S}_1S_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4,\end{aligned}$$

$\overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4\}$

se sastoji od $\mathrm{V}_4^2 = 16$ elementarnih događaja.

$A = \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$B = S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$C = \{S_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4\}$,

$D = \Omega \setminus \overline{S}_1\overline{S}_2\overline{S}_3\overline{S}_4$,

$E = \{S_1S_2\overline{S}_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2S_3\overline{S}_4, S_1\overline{S}_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3\overline{S}_4, \overline{S}_1S_2\overline{S}_3S_4, \overline{S}_1\overline{S}_2S_3S_4\}$,

$F = A \cup C \cup E$,

$G = \{S_1S_2S_3\overline{S}_4, S_1S_2\overline{S}_3S_4, S_1\overline{S}_2S_3S_4, \overline{S}_1S_2S_3S_4, S_1S_2S_3S_4\}$,

$H = \Omega \setminus \{S_1S_2S_3S_4\}$.

---

[30] *Brod ima jedno kormilo, tri kotla i dve turbine. Neka A događaj „kormilo je ispravno”, neka su B_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaji „i-ti kotao je ispravan”, i neka su C_i, $i \in \{1,2\}$ događaji „i-ta turbina je ispravna”. Brod može da se kreće ako je ispravno kormilo, bar jedan kotao i bar jedna turbina. Preko navedenih događaja, izraziti događaj X: „brod može da se kreće”.*

Rešenje: Označimo sa B događaj „*bar jedan kotao je ispravan*”, a sa C događaj „*bar jedna turbina je ispravna*”. Tada je

$$X = ABC$$

gde je $B = \overline{\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3} = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ i $C = \overline{\overline{C}_1\overline{C}_2} = C_1 \cup C_2$.

1.4 Verovatnoća događaja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ prostor događaja. **Verovatnoća** na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathsf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ za koju važi

(1) $\mathsf{P}(\Omega) = 1$,

(2) ako za niz događaja $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ važi da je $A_i \cap A_j = \emptyset$ za sve $i \neq j$, tada je $\mathsf{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$.

Ako za događaj B važi $\mathsf{P}(B) > 0$, tada se **uslovna verovatnoća** $\mathsf{P}(A|B)$ (događaja A pod uslovom da se ostvario događaj B) definiše sa

$$\mathsf{P}(A|B) = \frac{\mathsf{P}(AB)}{\mathsf{P}(B)}.$$

Pri rešavanju zadataka ćemo koristiti sledeće važne osobine verovatnoće

- $$\mathsf{P}(\emptyset) = 0 \tag{1.1}$$
- $$\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) \tag{1.2}$$
  $$\mathsf{P}(A|B) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}|B\right) \tag{1.3}$$
- $$B \subseteq A \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(B) \leq \mathsf{P}(A) \tag{1.4}$$
- $$B \subseteq A \ \Rightarrow\ \mathsf{P}(A \setminus B) = \mathsf{P}(A) - \mathsf{P}(B) \tag{1.5}$$

- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi

  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \\ = \sum_i \mathsf{P}(S_i) - \sum_{i<j} \mathsf{P}(S_i S_j) + \sum_{i<j<k} \mathsf{P}(S_i S_j S_k) + \ldots + (-1)^n \mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) \quad (1.6)$$

  Na primer, za $n = 2$ i $n = 3$ je

  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_2) \quad (1.7)$$

  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup S_3) = \\ = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_1 S_2) - \mathsf{P}(S_1 S_3) - \mathsf{P}(S_2 S_3) + \mathsf{P}(S_1 S_2 S_3) \quad (1.8)$$

  a kao jednu od posledica dobijamo i

  $$\mathsf{P}(S_1 S_2) = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) \quad (1.9)$$

- Za svaki konačan skup događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi

  $$\mathsf{P}(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = \\ = \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2 \overline{S_1}) + \mathsf{P}(S_3 \overline{S_2 S_1}) + \ldots + \mathsf{P}(S_n \overline{S_{n-1} S_{n-2} \ldots S_1}) \quad (1.10)$$

- Ako je $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq \ldots$, tada važi

  $$\mathsf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(S_i) \quad (1.11)$$

- Ako je $S_1 \supseteq S_2 \supseteq S_3 \supseteq \ldots$, tada važi

  $$\mathsf{P}(\bigcap_{i=1}^{\infty} S_i) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}(S_i) \quad (1.12)$$

- Za svaki konačan skup disjunktnih događaja $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi

  $$\mathsf{P}(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(S_i) \quad (1.13)$$

- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ koji su nezavisni (u ukupnosti) važi

  $$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\, \mathsf{P}(S_2) \ldots \mathsf{P}(S_n) \quad (1.14)$$

- Za događaje $S_1, S_2, \ldots, S_n$ važi

  $$\mathsf{P}(S_1 S_2 \ldots S_n) = \mathsf{P}(S_1)\, \mathsf{P}(S_2 | S_1)\, \mathsf{P}(S_3 | S_1 S_2) \ldots \mathsf{P}(S_n | S_1 S_2 \ldots S_{n-1}) \quad (1.15)$$

  ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

- Događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čine potpun sistem događaja ako važi:

  $$\forall i, j,\ i \neq j \quad H_i \cap H_j = \emptyset, \qquad \sum_{i=1}^{n} H_i = \Omega, \qquad \forall i \quad \mathsf{P}(H_i) > 0.$$

  Za potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi

  $$\sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i) = 1.$$

- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **formula totalne verovatnoće**

$$\mathsf{P}(S) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i) \tag{1.16}$$

ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

- Za događaj S i potpun sistem događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$ važi **Bajesova formula**

$$\mathsf{P}(H_k|S) = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\mathsf{P}(S)} = \frac{\mathsf{P}(H_k)\,\mathsf{P}(S|H_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(S|H_i)} \tag{1.17}$$

za svako $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ukoliko navedene uslovne verovatnoće postoje.

Pod određenim uslovima se verovatnoća događaja može izračunavati primenom tzv. Laplasove ili geometrijske definicije verovatnoće.

- **Laplasova definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno

  1°) skup svih mogućih elementarnih ishoda je konačan - na primer, neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$,

  2°) elementi se biraju na slučajan način, tj. svi elementarni ishodi ω_i su jednakoverovatni $\left(\mathsf{P}(\{\omega_1\}) = \mathsf{P}(\{\omega_2\}) = \cdots = \mathsf{P}(\{\omega_n\}) = \frac{1}{n}\right)$,

  tada je verovatnoća nekog događaja $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\} \subseteq \Omega$

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n} \tag{1.18}$$

  (količnik broja „povoljnih elementarnih ishoda” i „ukupnog broja elementarnih ishoda”).

- **Geometrijska definicija verovatnoće:** ako je zadovoljeno

  1°) skup Ω svih mogućih elementarnih ishoda, kao i događaj A čija se verovatnoća izračunava se mogu predstaviti kao merljive geometrijske oblasti - na primer kao duži čije dužine možemo odrediti, ili kao oblasti u ravni čije površine umemo odrediti (trouglovi, krugovi, njihovi delovi i sl.), ili kao trodimenzionalni objekti kojima umemo izračunati zapreminu (piramide, kocke, njihovi delovi i sl.),

  2°) elementi skupa Ω se biraju na slučajan način, tj. ravnopravan je izbor svake tačke,

  tada je verovatnoća nekog događaja A

$$\mathsf{P}(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} \tag{1.19}$$

  gde je sa $m(A)$ označena mera (dužina, površina ili zapremina) oblasti koja odgovara događaju A, a sa $m(\Omega)$ je označena mera oblasti koja odgovara skupu Ω svih elementarnih ishoda (verovatnoća se dobija kao količnik mere „povoljnih elementarnih ishoda” i mere „svih mogućih elementarnih ishoda”).

[31] *Bacaju se dve kockice za igru. Izračunati verovatnoće događaja*

Q - *„kvadratni koren zbira palih brojeva biće ceo broj”,*
S_2 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 2”,*
S_3 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 3”,*
S_4 - *„zbir palih brojeva biće deljiv sa 4”,*

kao i događaja $Q \cup S_4$, S_2S_3, $S_2 \cup S_3$, S_3S_4, $S_2 \cup S_3 \cup S_4$ *i* $\overline{S_2 \cup S_3}$.

Rešenje: Zadatak možemo rešiti primenom Laplasove definicije, tj. primenom (1.18), ukoliko budu zadovoljeni uslovi za njenu primenu. Skup svih elementarnih ishoda je $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ gde je (i,j) događaj „*na prvoj kockici će pasti broj i, a na drugoj kockici će pasti broj j*” (da bi elementarni ishodi bili jednakoverovatni, moramo razlikovati kockice kao prvu i drugu jer bi inače elementarni događaji (i,j) za $i \neq j$ bili dvostruko verovatniji od događaja (i,i); npr. ako je jedna kockica plava a jedna crvena tada brojeve 1 i 2 možemo dobiti tako što na plavoj padne 1 a na crvenoj 2 ili tako što na plavoj padne 2 a na crvenoj 1, dok dve jedinice možemo dobiti samo na jedan način, kada na obe kockice padne broj 1). Pri tome je $|\Omega| = 36$.

Direktnim proveravanjem dobijamo

$Q = \{(1,3),(3,1),(2,2),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$,

$S_2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5),$
$(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$

(zbir dva broja je paran ako su oba broja parna ili oba neparna),

$S_3 = \{(1,2),(1,5),(2,1),(2,4),(3,3),(3,6),(4,2),(4,5),(5,1),(5,4),(6,3),(6,6)\}$,

$S_4 = \{(1,3),(2,2),(2,6),(3,1),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2),(6,6)\}$,

te primenom (1.18) sledi (zadovoljeni su uslovi za primenu Laplasove definicije - skupovi su konačni, a elementarni ishodi su jednakoverovatni)

$$\mathsf{P}(Q) = \tfrac{7}{36}, \quad \mathsf{P}(S_2) = \tfrac{3\cdot3+3\cdot3}{36} = \tfrac{1}{2}, \quad \mathsf{P}(S_3) = \tfrac{6\cdot2}{36} = \tfrac{1}{3}, \quad \mathsf{P}(S_4) = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4}.$$

Koristeći dobijene rezultate kao i osobine verovatnoće dalje dobijamo

- $Q \cup S_4 = S_4 + \{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(Q \cup S_4) = \frac{9+4}{36} = \frac{13}{36}$,
- $S_2S_3 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1),(6,6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$,
- $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(S_2) + \mathsf{P}(S_3) - \mathsf{P}(S_2S_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$,
- $S_3S_4 = \{(6,6)\} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{P}(S_3S_4) = \frac{1}{36}$,
- s obzirom da je $S_4 \subseteq S_2$ tj. $S_4 \subseteq S_2 \cup S_3$, dobijamo
  $\mathsf{P}(S_2 \cup S_3 \cup S_4) = \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = \frac{2}{3}$,
- $\mathsf{P}(\overline{S_2 \cup S_3}) \overset{(1.2)}{=} = 1 - \mathsf{P}(S_2 \cup S_3) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

---

[32] *Svako od slova* `A`, `I`, `K`, `M`, `N`, `O` *je zapisano na po jedan listić papira, i listići se nasumice ređaju u niz. Izračunati verovatnoću da će se na ovaj način formirati reč* `KAMION`.

Rešenje: Pošto su sva slova različita, broj mogućih različitih rasporeda listića (elementarnih ishoda) je $\mathrm{P}_6 = 6! = 720$. Očigledno postoji samo jedan „povoljan raspored”, a zbog nasumičnog ređanja listića su svi elementarni ishodi jednakoverovatni, te je na osnovu (1.18) verovatnoća formiranja reči `KAMION`

$$p = \frac{1}{720} \approx 0.0014.$$

---

[33] *Računar je sa spiska reči formiranih pomoću slova* `a`, `a`, `a`, `e`, `i`, `k`, `m`, `m`, `t`, `t` *odabrao jednu. Izračunati verovatnoću da je odabrana reč* `matematika`.

Rešenje: Koristeći isti princip kao u zadataku [32], dobija se verovatnoća

$$p = \frac{1}{\mathrm{P}^{10}_{3,2,2}} = \frac{1}{\frac{10!}{3!2!2!}} = \frac{3!2!2!}{10!} = \frac{24}{3628800} = \frac{1}{151200}$$

(ovaj put pri prebrojavanju mogućih elementarnih ishoda koristimo permutacije s ponavljanjem jer se među slovima od kojih se sastavlja reč nalaze 3 primerka slova `a`, 2 primerka slova `m` i 2 primerka slova `t`).

---

[34] *Na osam listića papira se napisani brojevi* 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, *i na slučajan način se odabiraju dva listića. Izračunati verovatnoću da će zbir brojeva sa odabranih listića biti veći od* 15.

Rešenje: Svaki od jednakoverovatnih elementarnih ishoda (izbor je slučajan) predstavlja izbor 2 od 8 ispisanih brojeva pri čemu redosled 2 odabrana broja nije bitan, te sledi da je ukupan broj mogućih elementarnih ishoda $\mathrm{C}^8_2 = \binom{8}{2} = 28$. Dakle, $\Omega = \{\{i,j\} \mid i,j \in \{2,4,6,7,8,11,12,13\} \wedge i<j\}$, i $|\Omega| = 28$. Događaj „*zbir brojeva sa odabranih listića će biti veći od* 15” je skup elementarnih ishoda

$$A = \{\{4,12\},\{4,13\},\{6,11\},\{6,12\},\{6,13\},\{7,11\},\{7,12\},$$
$$\{7,13\},\{8,11\},\{8,12\},\{8,13\},\{11,12\},\{11,13\},\{12,13\}\},$$

te se koristeći (1.18) dobija

$$\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

---

[35] *Kockica za igru se baca* 3 *puta. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

- A - „*jedinica će pasti na bar jednoj kockici*”,
- B - „*u sva tri bacanja će pasti različiti brojevi*”,
- C - „*na bar dve kockice će pasti parni brojevi*”.

Rešenje: Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{(i,j,k) \mid i,j,k \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$ gde je (i,j,k) događaj „*pri prvom bacanju će pasti broj i, pri drugom j, a pri trećem k*”, te je $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}^6_3 = 6^3 = 216$. Verovatnoće događaja A, B, C izračunavamo koristeći (1.18) (vidi zadatak [31]), pri čemu ćemo broj „povoljnih” elementarnih ishoda izračunavati kombinatornim putem. Pri tome događaj C razlažemo na disjunktne događaje C_2 - „*parni brojevi će pasti na tačno dve kockice*” (na prvoj i drugoj, na prvoj i trećoj, ili na drugoj i trećoj) i C_3 - „*parni brojevi će pasti na sve tri kockice*”. Tako dobijamo

$\mathsf{P}(A) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{\overline{\mathrm{V}}^5_3}{216} = 1 - \frac{5^3}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.4213$ ($\overline{A}$ je događaj „*sva tri puta će pasti broj različit od* 1, *tj. broj iz skupa* $\{2,3,4,5,6\}$”),

$\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{V}^6_3}{216} = \frac{6\cdot5\cdot4}{216} = \frac{120}{216} \approx 0.5556$,

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(C_2 + C_3) = \mathsf{P}(C_2) + \mathsf{P}(C_3) = 3\frac{\overline{\mathrm{V}}_1^3\,\overline{\mathrm{V}}_2^3}{216} + \frac{\overline{\mathrm{V}}_3^3}{216} = \frac{81}{216} + \frac{27}{216} = \frac{108}{216} = 0.5$ (C_2 je događaj „*na jednoj od tri kockice će pasti broj iz skupa* $\{1, 3, 5\}$ *a na dve broj iz skupa* $\{2, 4, 6\}$", a C_3 je događaj „*sva tri puta će pasti broj iz skupa* $\{2, 4, 6\}$").

---

[36] *Bacaju se dve kockice za igru, a iz kutije koja sadrži* 3 *bele i* 4 *crne kuglice izvlače se odjednom dve kuglice. Koji je od događaja*

A - „*na kockicama će pasti jednaki brojevi, ili brojevi čiji je zbir* 5",
B - „*iz kutije će se izvući dve crne kuglice, ili kuglice različitih boja*"

verovatniji?

Rešenje: Skup elementarnih ishoda pri bacanju kockica je

$$\Omega_1 = \{(i, j) \mid i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\},$$

pri čemu su svi elementarni ishodi $(i, j) \in \Omega$ jednakoverovatni i njihov ukupan broj je $|\Omega_1| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Pošto je

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\},$$

sledi $\mathsf{P}(A) = \frac{|A|}{36} = \frac{10}{36} \approx 0.2778$.

S druge strane, skup elementarnih ishoda pri izvlačenju kuglica je

$$\Omega_2 = \{\{i, j\} \mid i, j \in K \,\wedge\, i \neq j\}$$

gde je K skup kuglica koje se nalaze u kutiji, te je $|\Omega_2| = \mathrm{C}_2^{3+4} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = 21$ pri čemu su svi elementarni ishodi jednakoverovatni. Događaj B možemo predstaviti kao $B = B_1 + B_2$ gde je B_1 događaj „*iz kutije će se izvući dve crne kuglice*" a B_2 je događaj „*iz kutije će se izvući kuglice različitih boja*", te je

$$|B| = |B_1| + |B_2| = \mathrm{C}_0^3 \cdot \mathrm{C}_2^4 + \mathrm{C}_1^3 \cdot \mathrm{C}_1^4 = \binom{3}{0} \cdot \binom{4}{2} + \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} = 1 \cdot 6 + 3 \cdot 4 = 18$$

(brojevi $|B_1|$ i $|B_2|$ su izračunati pomoću pravila proizvoda - biramo 0 tj. 1 element iz skupa belih, i 2 tj. 1 element iz skupa crnih kuglica). Primenom (1.18) sledi da je $\mathsf{P}(B) = \frac{18}{21} \approx 0.8571$.

Dakle, $\mathsf{P}(B) \approx 0.8571 > \mathsf{P}(A) \approx 0.2778$, tj. događaj B je verovatniji.

---

[37] *Neka osoba je zaboravila poslednje dve cifre nekog telefonskog broja, ali se pouzdano seća da su te dve cifre različite. Izračunati verovatnoću da će iz prvog pokušaja pogoditi te dve cifre.*

Rešenje: Pošto nema dodatnih informacija, podrazumeva se da se poslednje dve cifre pogađaju nasumice, što znači da su mogući elementarni ishodi jednakoverovatni. Elementarni ishodi su uređeni parovi cifara (kod telefonskog broja je bitan redosled cifara) i postoji samo jedan „povoljan" elementarni ishod za događaj A - „*osoba će iz prvog pokušaja pogoditi poslednje dve cifre*", te korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]) dobijamo $\mathsf{P}(A) = \frac{1}{\mathrm{V}_2^{10}} = \frac{1}{90} \approx 0.0111$ (broj „mogućih" ishoda je broj varijacija bez ponavljanja V_2^{10} jer je bitan poredak cifara, cifre treba da su različite i biraju se 2 cifre iz skupa od 10 cifara).

---

[38] *Iz špila od* 52 *karte se nasumice izvlače* 3 *karte. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A - *„izvući će se trojka, sedmica i kec”,*
B - *„izvući će se tačno jedan kec”,*
C - *„izvući će se bar jedan kec”,*
D - *„izvući će se najviše dva keca”,*
E - *„među izvučenim kartama biće tačno jedan kec i tačno dve tref karte”,*

Rešenje: Iz opisa događaja vidimo da nije bitan redosled izvučenih karata, te je skup elementarnih ishoda $\Omega = \{\{i,j,k\}\,|\,i,j,k \in K \wedge i \neq j \wedge i \neq k \wedge j \neq k\}$ gde je K skup karata, tako da je $|\Omega| = \mathrm{C}_3^{52} = \frac{52!}{3!49!} = \frac{50\cdot 51\cdot 52}{6} = 22100$. Takođe je očigledno da su elementarni ishodi jednakoverovatni, te verovatnoće navedenih događaja izračunavamo korišćenjem (1.18) (vidi zadatak [31]).

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj A se realizuju kada biramo po jednu kartu iz skupa od 4 trojke, 4 sedmice i 4 keca, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(A) = \frac{\mathrm{C}_1^4\cdot \mathrm{C}_1^4\cdot \mathrm{C}_1^4}{22100} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{22100} = \frac{4\cdot 4\cdot 4}{22100} \approx 0.0029.$

- Elementarni ishodi od kojih se sastoji događaj B se realizuju kada biramo jednu kartu iz skupa od 4 keca i dve karte iz skupa od ostalih $52 - 4 = 48$ karata, te primenom pravila proizvoda dobijamo

  $\mathsf{P}(B) = \frac{\mathrm{C}_1^4\cdot \mathrm{C}_2^{48}}{22100} = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{48}{2}}{22100} = \frac{4\cdot 1128}{22100} \approx 0.2042.$

- Prvi način: predstavimo C kao uniju disjunktnih događaja $C = C_1 + C_2 + C_3$ gde je C_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaj „*biće izvučeno tačno i kečeva*”. Koristeći isti princip prebrojavanja kao kod događaja A i B dobijamo

  $|C_1| = \mathrm{C}_1^4\cdot \mathrm{C}_2^{48} = \binom{4}{1}\cdot\binom{48}{2} = 4512,$

  $|C_2| = \mathrm{C}_2^4\cdot \mathrm{C}_1^{48} = \binom{4}{2}\cdot\binom{48}{1} = 288,$

  $|C_3| = \mathrm{C}_3^4\cdot \mathrm{C}_0^{48} = \binom{4}{3}\cdot\binom{48}{0} = 4$

  te je $|C| = |C_1| + |C_2| + |C_3| = 4804$, pa sledi

  $\mathsf{P}(C) = \frac{4804}{22100} \approx 0.2174.$

  Drugi način: $\mathsf{P}(C) = 1 - \mathsf{P}(\overline{C})$, gde je $|\overline{C}|$ broj načina da se iz skupa od 48 karata među kojima nema ni jednog keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{C}| = \mathrm{C}_3^{48} = 17296$, te je

  $\mathsf{P}(C) = 1 - \frac{17296}{22100} \approx 0.2174.$

- $\mathsf{P}(D) = 1 - \mathsf{P}(\overline{D})$, gde je D događaj „*biće izvučena tri keca*”, tj. $|\overline{D}|$ broj načina da se iz skupa od 4 keca izaberu 3 karte. Dakle, $|\overline{D}| = \mathrm{C}_3^4 = 4$, te je

  $\mathsf{P}(D) = 1 - \frac{4}{22100} \approx 0.9998.$

- Podelimo skup karata na sledeća 4 disjunktna skupa:

  S_1 - skup koji čini samo kec-tref,

  S_2 - skup koji čine tri preostala keca (pik, karo i tref),

  S_3 - skup koji čine sve tref karte bez keca-tref (ima ih $\frac{52}{4} - 1 = 12$),

  S_4 - skup koji čini sve preostale karte (ima ih $52 - 1 - 3 - 12 = 36$).

Događaj E se može predstaviti kao $E = E_1 + E_2$ gde je E_1 događaj „*biće izvučeni kec tref, jedna karta iz skupa S_3, i jedna karta iz S_4*" a E_2 je događaj „*biće izvučeni jedan kec iz skupa S_2, i dve karte iz skupa S_3*". Na osnovu pravila proizvoda je

$|E_1| = |S_1| \cdot |S_3| \cdot |S_4| = \binom{1}{1} \cdot \binom{12}{1} \cdot \binom{36}{1} = 1 \cdot 12 \cdot 36 = 432,$

$|E_2| = |S_2| \cdot \mathrm{C}_2^{|\mathrm{S}_3|} = \binom{3}{1} \cdot \binom{12}{2} = 3 \cdot 66 = 198.$

Skupovi E_1 i E_2 su disjunktni, te je

$\mathsf{P}(E) = \dfrac{|E_1| + |E_2|}{22100} = \dfrac{630}{22100} \approx 0.0285.$

---

[39] *U posudi se nalazi* 9 *belih,* 8 *crvenih i* 7 *žutih kuglica. Izvlači se* 8 *kuglica odjednom. Izračunati verovatnoću da će biti izvučene* 2 *bele,* 4 *crvene i* 2 *žute kuglice.*

Rešenje: Kuglice se izvlače odjednom, što znači da redosled izvučenih kuglica nije bitan. Stoga je skup mogućih elementarnih ishoda skup 8-elementnih podskupova skupa kuglica u posudi, tj.

$$\Omega = \{A \mid A \subseteq \Omega \ \wedge \ |A| = 8\}$$

pri čemu je $|\Omega| = \mathrm{C}_8^{9+8+7} = \mathrm{C}_8^{24} = 735471$ (dakle, koristimo takav način prebrojavanja mogućih i povoljnih elementarnih ishoda pri kojem razlikujemo između sebe i kuglice istih boja). „Povoljni" izbori su oni kod kojih biramo 2 iz skupa od 9 belih kuglica, 4 iz skupa od 8 crvenih kuglica, i 2 iz skupa od 7 žutih kuglica, te se koristeći pravilo proizvoda dobija da takvih izbora („povoljnih" elementarnih ishoda) ukupno ima $\mathrm{C}_2^9 \cdot \mathrm{C}_4^8 \cdot \mathrm{C}_2^7 = \binom{9}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{7}{2} = 36 \cdot 70 \cdot 21 = 52920$, te se na osnovu (1.18) (s obzirom na formirani model i slučajan izbor kuglica, elementarni ishodi su jednakoverovatni) sledi da tražena verovatnoća iznosi $p = \frac{52920}{735471} \approx 0.0720$.

---

[40] *Bacaju se bela i plava kockica za igru. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:*

A	-	*„zbir palih brojeva biće manji od* 9*",*
B	-	*„na obe kockice će pasti isti broj",*
C	-	*„na beloj kockici će pasti broj veći nego na plavoj",*
D	-	*„na plavoj kockici će pasti broj za dva veći od broja na beloj kockici",*
E	-	*„na obe kockice će pasti parni brojevi čiji je zbir bar* 8*",*
F	-	*„bar na jednoj kockici će pasti broj* 6*".*

Rešenje: S obzirom da se podrazumeva da su kockice pravilnog oblika, elementarni događaji su jednakoverovatni, i skup elementarnih događaja je

$$\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\}\},$$

gde je (i,j) događaj „*na beloj kockici će pasti broj i, a na plavoj kockici će pasti broj j*", pri čemu je njihov broj $|\Omega| = \overline{\mathrm{V}}_2^6 = 6^2 = 36$. Za svaki od navedenih događaja X ćemo odrediti broj elementarnih događaja od kojih se X sastoji, te se na osnovu (1.18) dobija $\mathsf{P}(X) = \dfrac{|X|}{|\Omega|} = \dfrac{|X|}{36}$.

- $|A| = |\Omega| - |\overline{A}| =$
  $= 36 - |\{(3,6),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}| =$

$= 36 - 10 = 26$

$\Rightarrow \quad \mathsf{P}(A) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 0.7222,$

- $|B| = |\{(i,i) \mid i \in \{1,2,3,4,5,6\}\}| = 6$

  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667,$

- $|C| = |\{(i,j) \mid i,j \in \{1,2,3,4,5,6\} \ \wedge \ i > j\}| = 5+4+3+2+1 = 15$

  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(C) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12} \approx 0.4167,$

- $|D| = |\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,6)\}| = 4$

  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(D) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 0.1111,$

- $|E| = |\{(2,6),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}| = 6$

  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.1667,$

- $|F| = |\{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,6),(6,5),(6,4),(6,3),(6,2),(6,1)\}| =$

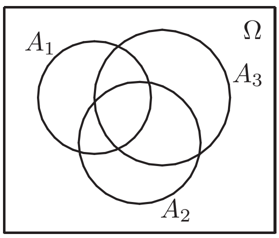
  $= 11$

  $\Rightarrow \quad \mathsf{P}(F) = \frac{11}{36} \approx 0.3056.$

---

[41] *Projektna firma je učestvovala na tri konkursa, na svakom sa po jednim projektom. Neka su A_i, $i \in \{1,2,3\}$ događaji „biće prihvaćen projekat na i-tom konkursu”, i poznato je da je $\mathsf{P}(A_1) = 0.22$, $\mathsf{P}(A_2) = 0.25$, $\mathsf{P}(A_3) = 0.28$, $\mathsf{P}(A_1A_2) = 0.11$, $\mathsf{P}(A_1A_3) = 0.05$, $\mathsf{P}(A_2A_3) = 0.07$ i $\mathsf{P}(A_1A_2A_3) = 0.01$. Opisati rečima i izračunati verovatnoće sledećih događaja $A_1 \cup A_2$, $\overline{A}_1\overline{A}_2$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ i $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.*

Rešenje:



- $A_1 \cup A_2$ je događaj „*biće prihvaćen projekat bar na jednom od prva dva konkursa*”, i važi

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) - \mathsf{P}(A_1A_2) = 0.22 + 0.25 - 0.11 = 0.36.$$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2$ je događaj „*neće biti prihvaćen projekat ni na jednom od prva dva konkursa*”, i važi

  $$\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2) = 1 - 0.36 = 0.64.$$

- $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ je događaj „*biće prihvaćen bar jedan projekat*”, i važi

  $$\mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \overset{(1.8)}{=}$$
  $$= \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \mathsf{P}(A_2A_3) + \mathsf{P}(A_1A_2A_3) =$$
  $$= 0.75 - 0.23 + 0.01 = 0.53.$$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ je događaj *„neće biti prihvaćen projekat ni na jednom konkursu"*, i važi

  $\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = \mathsf{P}(\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - 0.53 = 0.47.$

- $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$ je događaj *„projekat neće biti prihvaćen na A_1 i A_2 ili na A_3 "*

  $\mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_3) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2) + \mathsf{P}(\overline{A}_3) - \mathsf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) \overset{(1.2)}{=} 0.64 + (1 - \mathsf{P}(A_3)) - 0.47 =$
  $= 0.64 + 0.72 - 0.47 = 0.89.$

---

[42] *Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će se morati zaustaviti kod prvog iznosi* 0.4, *a kod drugog* 0.5. *Takođe je poznato da verovatnoća da će morati da se zaustavi bar kod jednog semafora iznosi* 0.6. *Izračunati verovatnoće događaja*

A	-	*„inženjer će morati da se zaustavi kod oba semafora",*
B	-	*„inženjer će morati da se zaustavi samo kod prvog semafora",*
C	-	*„inženjer će morati da se zaustavi kod tačno jednog semafora".*

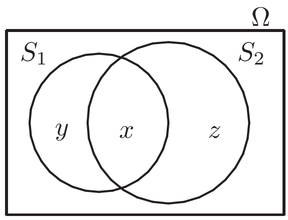
Rešenje: Označimo sa S_i, $i = \{1, 2\}$ događaj *"inženjer će morati da se zaustavi kod i-tog semafora"*. Na osnovu datih podataka $\mathsf{P}(S_1) = 0.4$, $\mathsf{P}(S_2) = 0.5$ i $\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.6$ izračunavamo

- $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1S_2) \overset{(1.9)}{=} \mathsf{P}(S_1) + \mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = 0.4 + 0.5 - 0.6 = 0.3,$

- $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = \mathsf{P}(S_1 \setminus S_1S_2) \overset{(1.5)}{=} \mathsf{P}(S_1) - \mathsf{P}(S_1S_2) = 0.4 - 0.3 = 0.1,$

- $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2 + \overline{S}_1S_2) \overset{(1.13)}{=} \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) + \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) = 0.1 + \mathsf{P}(S_2 \setminus S_1S_2) \overset{(1.5)}{=}$
  $= 0.1 + (\mathsf{P}(S_2) - \mathsf{P}(S_1S_2)) = 0.1 + (0.5 - 0.3) = 0.3.$

<u>Komentar</u>: verovatnoću možemo često interpretirati grafički; verovatnoću nekog događaja $X \subseteq \Omega$ možemo predstaviti kao meru oblasti (npr. „površine") Ω, izraženo u procentima p odnosno odgovarajućem broju $\frac{p}{100} \in [0, 1]$; u ovom zadatku (vidi sliku) bi to značilo: $\mathsf{P}(S_1S_2) = x$, $\mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = y$, $\mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) = z$,



$\mathsf{P}(S_1) = x + y = 0.4$, $\mathsf{P}(S_2) = x + z = 0.5$, $\mathsf{P}(S_1 \cup S_2) = x + y + z = 0.6$,
te rešavanjem sistema jednačina

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ x & & & + & z & = & 0.5 \\ x & + & y & + & z & = & 0.6 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = & 0.4 \\ & - & y & + & z & = & 0.1 \\ & & & & z & = & 0.2 \end{array}$$

dobijamo $z = 0.2$, $y = 0.1$, $x = 0.3$, odnosno

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(S_1S_2) = x = 0.3,$

$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = y = 0.1,$

$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2 + S_1\overline{S}_2) = \mathsf{P}(\overline{S}_1S_2) + \mathsf{P}(S_1\overline{S}_2) = z + y = 0.3.$

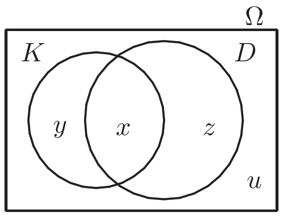
---

[43] *Na školskom takmičenju iz plivanja učestvuje* 45 *dece.* 15 *dece pliva kraul i delfin,* 30 *pliva kraul i* 20 *pliva delfin. Izračunati verovatnoće događaja:*

A_1 - *„slučajno odabrano dete pliva samo kraul”,*
A_2 - *„slučajno odabrano dete pliva tačno jednu od navedenih disciplina”,*
A_3 - *„slučajno odabrano dete pliva delfin ili kraul”,*
A_4 - *„slučajno odabrano dete ne pliva ni delfin ni kraul”.*

Rešenje:

Označimo sa K događaj događaj „*slučajno odabrano dete pliva kraul*” i sa D događaj događaj „*slučajno odabrano dete pliva delfin*”.
Neka je sa x označen broj dece koji plivaju kraul i delfin, sa y broj dece koji plivaju samo kraul, sa z broj dece koji plivaju samo delfin i sa u broj dece koji ne plivaju nijednu od ove dve discipline.



Ukupan broj dece koji učestvuju na takmičenju je $n = 45$. Na osnovu uslova zadatka sledi $x = 15$, $y = 30 - x = 15$, $z = 20 - x = 5$ i $u = 45 - x - y - z = 10$.

Tražene varovatnoće su

$$\mathsf{P}(A_1) = \tfrac{y}{n} = \tfrac{15}{45} = \tfrac{1}{3}, \quad \mathsf{P}(A_2) = \tfrac{y+z}{n} = \tfrac{20}{45} = \tfrac{4}{9},$$
$$\mathsf{P}(A_3) = \tfrac{x+y+z}{n} = \tfrac{35}{45} = \tfrac{7}{9}, \quad \mathsf{P}(A_4) = \tfrac{u}{n} = \tfrac{10}{45} = \tfrac{2}{9}.$$

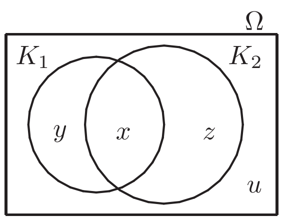
---

[44] *Ispit iz „Statističkih metoda” sastoji se iz dva kolokvijuma. Verovatnoća da Pera položi bar jedan kolokvijum je* 0.5*, da položi oba kolokvijuma je* 0.1 *i verovatnoća da položi prvi kolokvijum je* 0.25*. Izračunati verovatnoće događaja:*

A - *„Pera će položiti drugi kolokvijum”,*
B - *„Pera će položiti samo drugi kolokvijum”,*
C - *„Pera će položiti tačno jedan kolokvijum”,*
D - *„Pera neće položiti nijedan kolokvijum”.*

Rešenje:

Označimo sa K_i događaj događaj „*Pera je položio i-ti kolokvijum*”, $i = 1, 2$.
Neka je sa x označena verovatnoća daje Pera položio oba kolokvijuma, sa y verovatnoća da je Pera položio samo prvi kolokvijum, sa z verovatnoća da je Pera položio samo drugi kolokvijum i sa u verovatnoća da Pera nije položio nijedan kolokvijum.



Na osnovu uslova zadatka sledi $\mathsf{P}(K_1 \cup K_2) = x + y + z = 0.5$, $\mathsf{P}(K_1K_2) = x = 0.1$ i $\mathsf{P}(K_1) = x + y = 0.25$. Neka je $u = 1 - \mathsf{P}(K_1 \cup K_2) = 1 - x - y - z$. Rešavanjem sistema jednačina $x + y + z = 0.5 \wedge x = 0.1 \wedge x + y = 0.25 \wedge u = 1 - x - y - z$, dobija se $x = 0.1 \wedge y = 0.15 \wedge z = 0.25 \wedge u = 0.5$, tako da su tražene verovatnoće

$$\mathsf{P}(A) = x + z = 0.35, \quad \mathsf{P}(B) = z = 0.25, \quad \mathsf{P}(C) = y + z = 0.4, \quad \mathsf{P}(D) = u = 0.5.$$

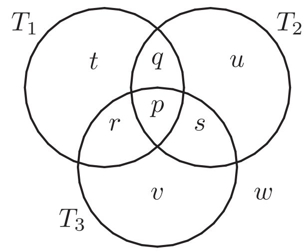
---

[45] *Na krosu učestvuje* 38 *dece koji trče tri trke,* T_1*,* T_2 *i* T_3*. Sve tri trke trči* 5 *dece. Trke* T_1 *i* T_2 *trči* 7 *dece,* T_1 *i* T_3 *trči* 8 *dece, dok* T_2 *i* T_3 *trči* 12 *dece. Trku* T_1 *trči* 15 *dece, trku* T_2 *trči* 20 *dece i trku* T_3 *trči* 25 *dece. Izračunati verovatnoće događaja:*

A - *„slučajno odabrano dete trči tačno jednu trku”,*
B - *„slučajno odabrano dete trči tačno dve trke”,*
C - *„slučajno odabrano dete trči bar jednu trku”,*
D - *„slučajno odabrano dete ne trči nijednu trku”.*

Rešenje:

Neka je p broj dece koja trče sve tri trke, q broj dece koja trče samo T_1 i T_2, r broj dece koja trče samo T_1 i T_3, s broj dece koja trče samo T_2 i T_2, t broj dece koja trče samo T_1, u broj dece koja trče samo T_2, v broj dece koja trče samo T_3 i w broj dece koja ne trče ni jednu trku.



Na osnovu uslova zadatka sledi $p = 5$, $q = 7 - p = 2$, $r = 8 - p = 3$, $s = 12 - p = 7$, $t = 15 - p - q - r = 5$, $u = 20 - p - q - s = 6$ i $v = 25 - p - r - s = 10$. Iz $p + q + r + s + t + u + v = 38$ vidimo da svako dete trči bar jednu trku, tako da je $w = 0$. Broj dece koja trče bar jednu trku je 38.

Primenom Laplasove definicije verovatnoće dobijaju se tražene verovatnoće:

$\mathsf{P}(A) = \frac{t+u+v}{n} = \frac{21}{38} \approx 0,552631579,$ $\quad \mathsf{P}(B) = \frac{q+r+s}{n} = \frac{12}{38} \approx 0,315789474,$

$\mathsf{P}(C) = \frac{p+q+r+s+t+u+v}{n} = \frac{38}{38} = 1,$ $\quad \mathsf{P}(D) = \frac{w}{n} = \frac{0}{38} = 0.$

---

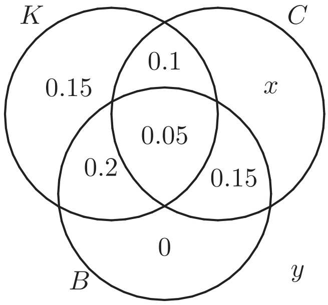
[46] *Silvia jede karamelu, čokoladu i biskvit. Verovatnoća da će jednog dana jesti sva tri slatkiša je* 0.05*, a verovatnoća da će jesti bar jedan slatkiš je* 0.75*. Verovatnoća da će jesti karamelu i čokoladu je* 0.15*, karamelu i biskvit* 0.25*, a čokoladu i biskvit je* 0.2*. Verovatnoća da će jesti karamelu je* 0.5*, a verovatnoća da će jesti biskvit je* 0.4*. Izračunati verovatnoće događaja:*

A - *„Silvia će u toku jednog dana jesti samo čokoladu”,*
B - *„Silvia će u toku jednog dana jesti bar dva slatkiša”,*
C - *„Silvia će u toku jednog dana neće jesti slatkiše”.*

Rešenje: Posmatramo događaje K–„*Silvia u toku jednog dana jede karamelu*”, C–„*Silvia u toku jednog dana jede čokoladu*” i B–„*Silvia u toku jednog dana jede biskvit*”.

Na osnovu uslova zadatka je $\mathsf{P}(KCB) = 0.05$, $\mathsf{P}(K \cup C \cup B) = 0.75$, $\mathsf{P}(KC) = 0.15$, $\mathsf{P}(KB) = 0.25$, $\mathsf{P}(CB) = 0.2$, $\mathsf{P}(K) = 0.5$ i $\mathsf{P}(B) = 0.4$.

Iz $\mathsf{P}(K \cup C \cup B) = \mathsf{P}(K) + \mathsf{P}(C) + \mathsf{P}(B) - \mathsf{P}(KC) - \mathsf{P}(KB) - \mathsf{P}(CB) + \mathsf{P}(KCB)$ dobija se $\mathsf{P}(C) = 0.4$.



Dalje sledi

$$\mathsf{P}(A) = x = 0.1,$$
$$\mathsf{P}(B) = 0.1 + 0.05 + 0.2 + 0.15 = 0.5,$$
$$\mathsf{P}(C) = y = 1 - \mathsf{P}(K \cup C \cup B) = 0.25.$$

---

[47] *Tri strelca nezavisno jedan od drugog gađaju jednu metu. Verovatnoća da prvi strelac pogodi metu je* 0.3, *drugi* 0.4 *i treći je* 0.5. *Izračunati verovatnoću događaja* A–„*meta je pogođena*".

Rešenje: Meta je pogođena ako ju je pogodio bar jedan strelac, tako da je

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_3) - \mathsf{P}(A_1A_2) - \mathsf{P}(A_1A_3) - \mathsf{P}(A_2A_3) + \mathsf{P}(A_1A_2A_3),$$

gde je sa A_i označen događaj „*i-ti strelac je pogodio metu*", $i = 1, 2, 3$.
Kako strelci gađaju metu nezavisno jedan od drugog dobija se $\mathsf{P}(A_1A_2) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2) = 0.3{\cdot}0.4 = 0.12$, $\mathsf{P}(A_1A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_3) = 0.3{\cdot}0.5 = 0.15$, $\mathsf{P}(A_2A_3) = \mathsf{P}(A_2)\,\mathsf{P}(A_3) = 0.4 \cdot 0.5 = 0.2$, $\mathsf{P}(A_1A_2A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2)\,\mathsf{P}(A_3) = 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.5 = 0.06$, tako da je

$$\mathsf{P}(A) = 0.3 + 0.4 + 0.5 - 0.12 - 0.15 - 0.2 + 0.06 = 0.79.$$

Drugi način: Posmatramo događaj $\overline{A}$–„*meta nije pogođena*". Iz $\overline{A} = \overline{A_1}\;\overline{A_2}\;\overline{A_3}$ i nezavisnosti sledi $\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(\overline{A_1})\;\mathsf{P}(\overline{A_2})\;\mathsf{P}(\overline{A_3}) = (1-0.3)\cdot(1-0.4)\cdot(1-0.5) = 0.21$, tako da je $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}(\overline{A}) = 0.79$.

---

[48] *Koliko iznosi verovatnoća da iz špila od* 32 *karte* 3 *puta zaredom izvučemo kralja ako*

(a) *izvučenu kartu svaki put vraćamo u špil,*

(b) *izvučene karte ne vraćamo u špil?*

Rešenje: Označimo sa A_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ događaj „*pri i-tom izvlačenju će biti izvučen kralj*". Događaj A: „3 *puta zaredom će biti izvučen kralj*" možemo predstaviti kao $A = A_1A_2A_3$, te na osnovu (1.15) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(A_1A_2A_3) = \mathsf{P}(A_1)\,\mathsf{P}(A_2|A_1)\,\mathsf{P}(A_3|A_1A_1)$$

(a) ako izvučene karte svaki put vraćamo u špil, tada svaki put izvlačimo iz špila sa istim sadržajem kao i pri prvom izvlačenju, što znači da su događaji A_i nezavisni, te sledi da je $\mathsf{P}(A_2|A_1) = \mathsf{P}(A_2) = \mathsf{P}(A_1)$ i $\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \mathsf{P}(A_3) = \mathsf{P}(A_1)$, odnosno

$\mathsf{P}(A) = (\mathsf{P}(A_1))^3 = (\frac{4}{32})^3 = (\frac{1}{8})^3 = \frac{1}{512} \approx 0.0020.$

(b) $\mathsf{P}(A_1) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(A_2|A_1) = \frac{3}{31}$ (ako je u prvom izvlačenju izvučen kralj, tada se drugi put izvlači iz špila od 31 karte u kojem se nalaze 3 kralja),

$\mathsf{P}(A_3|A_1A_2) = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$ (ako su u prva dva izvlačenja izvučeni kraljevi, tada se treći put izvlači iz špila od 30 karata u kojem se nalaze 2 kralja),

$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{8} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{1}{15} = \frac{1}{1240}$.

---

[49] *U kutiji se nalaze* 3 *zelene i* 4 *bele kuglice. Pera izvlači* 3 *puta po jednu kuglicu iz kutije*

(a) *bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju,*

(b) *sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju.*

Izračunati verovatnoću događaja A–„Pera će izvući bar jednu kuglicu bele boje".

Rešenje: Prvo ćemo izračunati verovatnoću suprotnog događaja, tj. događaja $\bar{A}$–„*Pera neće izvući nijednu kuglicu bele boje*", pa pomoću njega verovatnoću traženog događaja. Označimo sa Z_i događaj „*u i-tom izvlačenju Pera je izvukao kulicu zelene boje*", $i = 1, 2, 3$. Tada je $\overline{A} = Z_1\ Z_2\ Z_3$ i $\mathsf{P}(\overline{A}) = \mathsf{P}(Z_1\ Z_2\ Z_3)$.

(a) Pera izvlači kuglicu bez vraćanja prethodno izvučene kuglice u kutiju, tako da izvlačenja nisu nezavisna i

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \mathsf{P}(Z_1Z_2Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)\,\mathsf{P}(Z_2|Z_1)\,\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35},$$

odakle sledi $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{34}{35}$.

(b) Pera izvlači kuglicu tako što svaki put vrati predhodno izvučenu kuglicu u kutiju, te su izvlačenja međusobno nezavisna tako da je $\mathsf{P}(Z_2|Z_1) = \mathsf{P}(Z_2) = \mathsf{P}(Z_1)$, $\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_2) = \mathsf{P}(Z_3) = \mathsf{P}(Z_1)$, tako da je

$$\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = \mathsf{P}(Z_1)^3 = \left(\tfrac{3}{7}\right)^3,$$

odakle je $\mathsf{P}(A) = 1 - \mathsf{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^3 \approx 0.921282799$.

---

[50] *U činiji se nalaze* 4 *jabuke sorte ajdared i* 5 *jabuka sorte zlatni delišes. Lela svaki dan na slučajan način bira jednu jabuku koju pojede. Izračunati verovatnoću da će Lela prvo pojesti sve jabuke sorte zlatni delišes.*

Rešenje: Traženi događaj je Z–„*Lela će prvih pet dana jesti jabuku sorte zlatni delišes*". Označimo sa Z_i događaj „*Lela i-tog dana jede jabuku sorte zlatni delišes*", $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Tada je $Z = Z_1Z_2Z_3Z_4Z_5$ i

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(Z) &= \mathsf{P}(Z_1)\,\mathsf{P}(Z_2|Z_1)\,\mathsf{P}(Z_3|Z_1Z_1)\,\mathsf{P}(Z_4|Z_1Z_2Z_3)\,\mathsf{P}(Z_5|Z_1Z_2Z_3Z_4) \\ &= \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{126}. \end{aligned}$$

---

[51] *Marko putuje od mesta A do mesta C, preko mesta B, konstantnom brzinom. Razdaljina od mesta A do mesta B je* 30*km, a razdaljina od mesta B do mesta C je* 10*km. U slučajnom trenutku tokom putovanja ga na mobilni telefon zove prijatelj*

da proveri kada će Marko stići u mesto C. Izračunati verovatnoću da će Marko moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B.

Rešenje: Prostor događaja možemo opisati na kao $\Omega = [0, 40] = \{x \mid 0 \leq x \leq 40\}$, gde je x razdaljina koju je Marko prešao od početka putovanja do trenutka telefonskog poziva. Pošto ga prijatelj zove tokom putovanja, ukupno rastojanje koje je Marko prešao do trenutka poziva je najviše $30km + 10km = 40km$. Događaj X: „*Marko će moći prijatelju da kaže da je već prošao mesto B*" možemo predstaviti kao skup $X = [30, 40] = \{x \mid 30 \leq x \leq 40\} \subseteq \Omega$.

Svi elementarni ishodi $x \in \Omega$ su jednakoverovatni (jer Marko poziv dobija poziv u slučajnom trenutku), ali se zadatak ne može rešiti na isti način kao npr. zadatak [31] (vidi Laplasovu definiciju verovatnoće) jer broj elementarnih ishoda nije konačan. Naime, i skup Ω i skup X su beskonačni skupovi. Zadatak može da se reši primenom geometrijske definicije verovatnoće jer prostor Ω možemo predstaviti kao duž AC koja je dužine $m(\Omega) = 40$ (merna jedinica nam je kilometar), a događaju X odgovara duž BC koja je dužine $m(X) = 10$. Kako su zadovoljeni svi uslovi za primenu (1.19), sledi

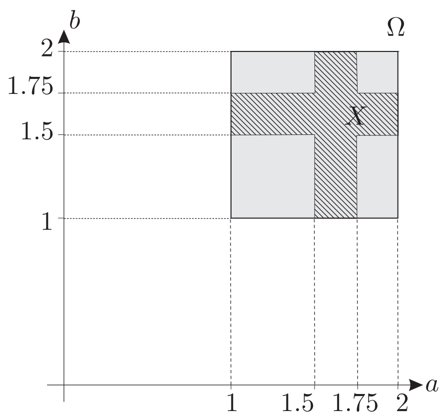
$$\mathsf{P}(X) = \tfrac{m(X)}{m(\Omega)} = \tfrac{10}{40} = \tfrac{1}{4} = 0.25.$$

---

[52] *Autobus stiže u stanicu u $1:30$ časova, a odlazi u $2:45$. Ana i branko dolaze na stanicu u slučajnim trenucima (svako za sebe) između $1:00$ i $2:00$. Svako od njih ulazi u autobus ako je došao u trenutku kada je autobus u stanici, a inače odlaze (npr. odustaju od putovanja). Izračunati verovatnoću da će se bar jedna od navedenih osoba naći u autobusu.*

Rešenje:

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a, b) \in [1, 2] \times [1, 2]$ gde a i b redom predstavljaju vremena kada su Ana odnosno Branko stigli na stanicu, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega = \{(a, b) \mid 1 \leq a \leq 2 \ \wedge\ 1 \leq b \leq 2\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ i $(1, 2)$ (merna jedinica nam je jedan sat). Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega) = 1$. Događaju X: „*bar jedna od navedenih osoba će se naći u autobusu*" odgovara tada u ravni oblast $X = \{(a, b) \in \Omega \mid 1.5 \leq a \leq 1.75 \ \vee\ 1.5 \leq b \leq 1.75\}$ (vidi sliku). Oblast X površine $m(X) = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 0.25 + 0.5 \cdot 0.25 = 0.4375$.



Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(X) = \frac{m(X)}{m(\Omega)} = 0.4375.$$

---

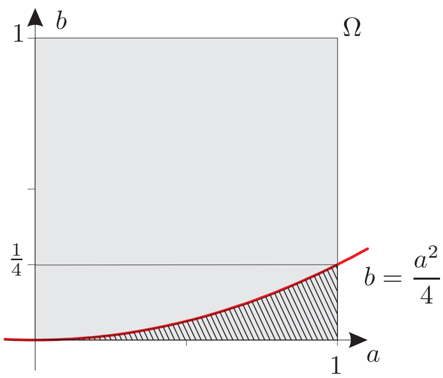
[53] *Na slučajan način se biraju brojevi a i b iz intervala $[0,1]$. Izračunati verovatnoću da će jednačina $x^2+ax+b=0$ imati realna rešenja po nepoznatoj x.*

Rešenje:

Kao što je poznato, kvadratna jednačina ima realna rešenja ukoliko je njena diskriminanta nenegativna, te posmatrana jednačina ima realna rešenja ukoliko je $a^2-4b\geq 0$, tj. ako je $b\leq \frac{1}{4}a^2$.

Jedan elementarni ishod možemo predstaviti kao uređeni par $(a,b)\in[0,1]\times[0,1]$, te se skup svih elementarnih ishoda $\Omega=\{(a,b)\,|\,0\leq a\leq 1\wedge 0\leq b\leq 1\}$ može predstaviti u ravni kao kvadrat sa temenima u tačkama $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ i $(1,0)$. Ovaj kvadrat je površine $m(\Omega)=1$. Događaju R: „*rešenja jednačine su realni brojevi*" odgovara tada oblast $R=\{(a,b)\in\Omega\,|\,b\leq\frac{1}{4}a^2\}$ (vidi sliku). Površinu ove oblasti možemo izračunati korišćenjem intergralnog računa:

$$m(R)=\int_0^1\frac{1}{4}a^2da=\frac{1}{4}\frac{a^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{12}.$$



Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se brojevi a i b biraju na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(R)=\frac{m(R)}{m(\Omega)}=\frac{1}{12}\approx 0.0833.$$

---

[54] *Oko kocke je opisana lopta. Na slučajan način se bira tačka iz lopte. Izračunati verovatnoću da će biti izabrana tačka iz kocke.*

Rešenje: Skup elementarnih ishoda možemo predstaviti kao skup L tačaka lopte, a događaju K: „*izabrana tačka pripada kocki*" odgovara tada skup K tačaka kocke. Ako je ivica kocke dužine a, tada je poluprečnik r lopte jednak polovini telesne dijagonale kocke, tj. $r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Zapremina lopte je

$$m(L)=\frac{4}{3}r^3\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi,$$

a zapremina kocke je $m(K)=a^3$. Kako su zadovoljeni uslovi za primenu geometrijske definicije verovatnoće (elementarni ishodi su jednakoverovatni) jer se tačka bira na slučajan način, primenom (1.19) dobijamo

$$\mathsf{P}(K)=\frac{m(K)}{m(L)}=\frac{a^3}{\frac{\sqrt{3}}{2}a^3\pi}=\frac{2}{\sqrt{3}\pi}\approx 0.3676.$$

---

[55] *Kulturni magazin se sastoji iz 3 dela: dela posvećenog muzici (M), dela posvećenog književnosti (K) i dela posvećenog filmu (F). Slučajno odabrani čitalac čita pojedine*

delove sa sledećim datim verovatnoćama:

deo magazina	M	K	F	MK	MF	KF	MKF
verovatnoća	0.14	0.23	0.37	0.08	0.09	0.13	0.05

Opisati rečima događaje $M|K$, $M|K\cup F$, $M|M\cup K\cup F$, $M\cup K|F$ i izračunati njihove verovatnoće.

Rešenje: Zadane događaje možemo opisati na sledeći način

$M|K$ - *„ako čitalac čita o književnosti, tada čita i o muzici"*,
$M|K\cup F$ - *„ako čitalac čita o književnosti ili filmu, tada čita i o muzici"*,
$M|M\cup K\cup F$ - *„ako čitalac čita o bar jednoj oblasti, tada čita i o muzici"*,
$M\cup K|F$ - *„ako čitalac čita o filmu, tada čita i o muzici ili književnosti"*,

a verovatnoće ovih događaja su:

- $\mathsf{P}(M|K) = \dfrac{\mathsf{P}(MK)}{\mathsf{P}(K)} = \dfrac{0.08}{0.23} \approx 0.3478,$
- koristeći

  $\mathsf{P}(K\cup F) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(K) + \mathsf{P}(F) - \mathsf{P}(KF) = 0.23 + 0.37 - 0.13 = 0.47,$

  $\mathsf{P}(M(K\cup F)) = \mathsf{P}(MK\cup MF) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(MK) + \mathsf{P}(MF) - \mathsf{P}(MKF) =$
  $= 0.08 + 0.09 - 0.05 = 0.12$

  dobijamo

  $\mathsf{P}(M|K\cup F) = \dfrac{\mathsf{P}(M(K\cup F))}{\mathsf{P}(K\cup F)} = \dfrac{0.12}{0.47} \approx 0.2553,$
- koristeći

  $\mathsf{P}(M\cup K\cup F) \overset{(1.8)}{=}$
  $= \mathsf{P}(M) + \mathsf{P}(K) + \mathsf{P}(F) - \mathsf{P}(MK) - \mathsf{P}(MF) - \mathsf{P}(KF) + \mathsf{P}(MKF) =$
  $= 0.14 + 0.23 + 0.37 - 0.08 - 0.09 - 0.13 + 0.05 = 0.49$

  dobijamo

  $\mathsf{P}(M|M\cup K\cup F) = \dfrac{\mathsf{P}(M(M\cup K\cup F))}{\mathsf{P}(M\cup K\cup F)} = \dfrac{\mathsf{P}(M)}{\mathsf{P}(M\cup K\cup F)} = \dfrac{0.12}{0.49} \approx 0.2449,$
- koristeći

  $\mathsf{P}((M\cup K)F) = \mathsf{P}(MF\cup KF) \overset{(1.7)}{=} \mathsf{P}(MF) + \mathsf{P}(KF) - \mathsf{P}(MKF) =$
  $= 0.09 + 0.13 - 0.05 = 0.17$

  dobijamo

  $\mathsf{P}(M\cup K|F) = \dfrac{\mathsf{P}((M\cup K)F)}{\mathsf{P}(F)} = \dfrac{0.17}{0.37} \approx 0.4595.$

---

[56] *U kutiji se nalaze 3 obična novčića i jedan defektni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.*

(b) *Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - „*iz kutije je izabran ispravan novčić*",
H_2 - „*iz kutije je izabran novčić sa grbom na obe strane*",
A - „*pri bacanju novčića će oba puta pasti grb*",
A_1 - „*pri prvom bacanju novčića će pasti grb*",
A_2 - „*pri drugom bacanju novčića će pasti grb*".

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2\}$ potpun sistem događaja[1] ($H_1H_2 = \emptyset$ i $H_1 + H_2 = \Omega$), i primenom (1.18) se dobija $\mathsf{P}(H_1) = \frac{3}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{4}$. Događaj A može se predstaviti kao $A = A_1A_2$, i na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2) =$

$= \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A_1A_2|H_2)$

gde je

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_i) = \frac{\mathsf{P}(A_1A_2H_i)}{\mathsf{P}(H_i)} = \frac{\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)}{\mathsf{P}(H_i)} = \mathsf{P}(A_1|H_i)\,\mathsf{P}(A_2|H_iA_1)$, $i \in \{1,2\}$,

odnosno

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_1) = \mathsf{P}(A_1|H_1)\,\mathsf{P}(A_2|H_1A_1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$\mathsf{P}(A_1A_2|H_2) = \mathsf{P}(A_1|H_2)\,\mathsf{P}(A_2|H_2A_1) = 1\cdot 1 = 1$,

te je

$$\mathsf{P}(A) = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{7}{16}\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}\,.$$

---

[57] *U tri magacina se nalaze mašinski strugovi, i to:*

magacin 1: 10 *strugova, od čega* 4 *neispravna,*
magacin 2: 6 *strugova, od čega* 1 *neispravna,*
magacin 3: 8 *strugova, od čega* 3 *neispravna.*

Iz slučajno odabranog magacina se nasumice odabira jedan strug.

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani strug biti neispravan.*

(b) *Izračunati verovatnoću da je odabrani strug iz magacina* 2 *ako se zna da je taj strug ispravan.*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani strug je neispravan*",
H_i - „*odabrani strug potiče iz magacina* $i \in \{1,2,3\}$".

[1] Zapravo je $H_2 = \overline{H}_1$.

(a) Očigledno je $\{H_1, H_2, H_3\}$ potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (magacin se bira na slučajan način) se dobija $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{3}$, $i \in \{1, 2, 3\}$, a koristeći navedene podatake o broju neispravnih i ukupnom broju strugova koji su raspoređeni po pojedinim magacinama se primenom (1.18) dobija $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{6}$, $\mathsf{P}(A|H_3) = \frac{3}{8}$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \frac{113}{360} \approx 0.3139\,.$$

(b) Koristeći $\mathsf{P}\left(\overline{A}\right) \overset{(1.2)}{=} 1 - \mathsf{P}(A) = \frac{247}{360} \approx 0.6861$ i $\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right) \overset{(1.3)}{=} 1 - \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{5}{6}$, primenom Bajesove formule (1.17) se dobija

$$\mathsf{P}\left(H_2|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_2\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}}{\frac{247}{360}} = \frac{100}{247} \approx 0.4049\,.$$

---

[58] *Prva kutija sadrži* 5 *crvenih i* 6 *belih kuglica, a druga kutija sadrži* 4 *crvene i* 4 *bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.*

(b) *Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*iz druge kutije će se izvući crvena kuglica*",
H_c - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena crvena kuglica*",
H_b - „*iz prve u drugu kutiju je premeštena bela kuglica*".

(a) $\{H_c, H_b\}$ je potpun sistem događaja, i primenom (1.18) (kuglica se iz prve kutije bira na slučajan način) dobija se $\mathsf{P}(H_c) = \frac{5}{5+6} = \frac{5}{11}$ i $\mathsf{P}(H_b) = \frac{6}{11}$. Koristeći podatake o sadržaju druge kutije u zavisnosti od toga da li je u nju iz prve kutije premeštena crvena ili bela kuglica se primenom (1.18) dobija

$\mathsf{P}(A|H_c) = \frac{4+1}{4+4+1} = \frac{5}{9}$, $\mathsf{P}(A|H_b) = \frac{4+0}{4+4+1} = \frac{4}{9}$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c) + \mathsf{P}(H_b)\,\mathsf{P}(A|H_b) = \frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9} + \frac{6}{11} \cdot \frac{4}{9} = \frac{49}{99} \approx 0.4949\,.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_c|A) = \frac{\mathsf{P}(H_c)\,\mathsf{P}(A|H_c)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{5}{9}}{\frac{49}{99}} = \frac{25}{49} \approx 0.5102\,.$$

---

[59] *Od ukupne proizvodnje jedne zanatske radionice,* 50% *se proizvodi na mašini* M_1*,* 20% *na mašini* M_2*, i* 30% *na mašini* M_3*. Na mašini* M_1 *se u proseku napravi* 3% *neispravnih proizvoda (škarta), na mašini* M_2 *u proseku* 5%*, a na mašini* M_3 *u proseku* 4% *neispravnih proizvoda. Na slučajan način se bira jedan proizvod iz posmatrane radionice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će odabrani proizvod biti ispravan.*

(b) *Ako je odabrani proizvod ispravan, koliko iznosi verovatnoća da je on proizveden na mašini M_3?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod će biti ispravan*”,

H_i - „*odabrani proizvod je proizveden na mašini M_i, $i \in \{1, 2, 3\}$*”.

Analogno kao u zadacima [56], [57], [58], rezultati se mogu dobiti primenom formule totalne verovatnoće (1.16) i Bajesove formule (1.17):

(a) $\mathsf{P}(H_1) = \frac{50}{100}$, $\mathsf{P}(H_2) = \frac{20}{100}$, $\mathsf{P}(H_3) = \frac{30}{100}$,

$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{100-3}{100} = \frac{97}{100}$, $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{100-5}{100} = \frac{95}{100}$, $\mathsf{P}(A|H_3) = \frac{100-4}{100} = \frac{96}{100}$,

$$\mathsf{P}(A) = \sum_{i=1}^{3} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(A|H_i) = \frac{50}{100}\cdot\frac{97}{100} + \frac{20}{100}\cdot\frac{95}{100} + \frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100} = 0.963\,.$$

(b)
$$\mathsf{P}(H_3|A) = \frac{\mathsf{P}(H_3)\,\mathsf{P}(A|H_3)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{\frac{30}{100}\cdot\frac{96}{100}}{\frac{963}{1000}} = \frac{288}{963} \approx 0.2991\,.$$

---

[60] *Proizvod izrađen u jednoj radionici kontroliše jedan od dva kontrolora. Verovatnoće da će proizvod na kontrolu stići kod prvog odnosno drugog kontrolora redom iznose* 0.6 *odnosno* 0.4. *Verovatnoća da će proizvod proći kao proizvod koji zadovoljava standarde kod prvog kontrolora iznosi* 0.94, *a kod drugog* 0.98. *Ako je jedan slučajno odabrani proizvod priznat kao proizvod koji zadovoljava standarde, koliko iznosi verovatnoća da ga je kontrolisao prvi kontrolor?*

Rešenje: Označimo događaje:

A - „*odabrani proizvod je zadovoljio kriterijume kontrolora*”,

H_i - „*odabrani proizvod je kontrolisao i-ti kontrolor, $i \in \{1, 2\}$*”.

Analogno zadacima [56], [57], [58], [59], rezultati se mogu dobiti primenom Bajesove formule (1.17):

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)}\,,$$

pri čemu se $\mathsf{P}(A)$ može izračunati primenom formule totalne verovatnoće (1.16):

$\mathsf{P}(H_1) = 0.6$, $\mathsf{P}(H_2) = 0.4$,

$\mathsf{P}(A|H_1) = 0.94$, $\mathsf{P}(A|H_2) = 0.98$,

$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)$.

Dakle,

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1) + \mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)} = \frac{0.6\cdot 0.94}{0.6\cdot 0.94 + 0.4\cdot 0.98} \approx 0.5900\,.$$

---

[61] *Dinar se baca dva puta. Ako je oba puta pao grb, iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 1 crna kuglica izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem u kutiju. U ostalim slučajevima izvlači se dva puta zaredom kuglica sa vraćanjem iz kutije u kojoj se nalaze 1 bela i 2 crne kuglice.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će oba puta biti izvučena bela kuglica.*

(b) *Ako je oba puta izvučena bela kuglica izračunati verovatnoću događaja da grb nije pao oba puta.*

Rešenje: Označimo događaje:

H_1 - *„oba puta pao grb"*,
H_2 - *„palo bar jedno pismo"*,
A - *„izvučene dve bele kuglice"*.

Događaji H_1 i H_2 čine potpun sistem događaja i njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1) = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{3}{4}$.

(a) Na osnovu uslova zadatka sledi $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, te primenom formule totalne verovatnoće (1.16) sledi

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{36}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}(H_2|A) = \frac{\mathsf{P}(H_2)\,\mathsf{P}(A|H_2)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{3}{7}.$$

---

[62] *Iz špila od 52 karte izvlači se jedna karta. Ako je izvučena tref karta, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 3 crne kuglice, a u ostalim slučajevima, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 4 bele i 1 crna kuglica.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će biti izvučene kuglice istih boja.*

(b) *Ako se zna da su izvučene kuglice različitih boja, izračunati verovatnoću da je izvučena tref karta.*

Rešenje: U špilu od 52 karte je 13 tref karata i 39 karata koje nisu tref. $\mathsf{P}(H_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$, gde je sa H_1 označen događaj *„iz špila je izvučena tref karta"* i $H_2 = \overline{H_1}$. Posmatramo događaj A–*„izvučene su kuglice iste boje"*. Događaj A se realizuje ako se iz kutije izvuku 2 bele ili 2 crne kuglice.

(a) Uvrštavanjem

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{\binom{2}{2} + \binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10} \qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$$

u formulu totalne verovatnoće (1.16) dobija se

$$\mathsf{P}(A) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{10} + \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} = \frac{11}{20}.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) dobija se

$$\mathsf{P}\left(H_1|\overline{A}\right) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}\left(\overline{A}|H_1\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{A}\right)} = \frac{\mathsf{P}(H_1)(1-\mathsf{P}(A|H_1))}{1-\mathsf{P}(A)} = \frac{1}{3}.$$

[63] *Dve istovetne koverte sadrže po 30 kartica na kojima je napisano 1000 ili 2000 dinara. U prvoj se nalazi 20 kartica koje vrede 1000 dinara i 10 kartica koje vrede 2000 dinara. U drugoj koverti se nalazi podjednak broj kartica koje vrede 1000 dinara i 2000 dinara. Takmičar u kvizu na slučajan način izvlači jednu kovertu i iz nje tri kartice koje predstavljaju njegov dobitak.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će takmičar osvojiti 5000 dinara.*

(b) *Ako se zna da je takmičar osvojio 5000 dinara kolika je verovatnoća da je odabrao prvu kovertu?*

Rešenje: Označimo sa H_i događaj „*izabrana je koverta i*”, $i = 1, 2$. Događaji H_1 i H_2 su jednakoverovatni tako da je $\mathsf{P}(H_1) = \mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{2}$.

(a) Neka je A događaj „*takmičar će osvojiti* 5000 *dinara*”. Kako takmičar izvlači 3 kartice on 5000 dinara može da osvoji jedino ako izvuče 2 kartice sa 2000 dinara i jednu kartice sa 1000 dinara, tako da iz

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{\binom{10}{2}\binom{20}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{900}{4060} \approx 0.22$$

i

$$\mathsf{P}(A|H_2) = \frac{\binom{15}{2}\binom{15}{1}}{\binom{30}{3}} = \frac{1575}{4060} \approx 0.39$$

primenom formule totalne verovatnoće (1.16) se dobija

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{1}{2} \cdot 0.22 + \tfrac{1}{2} \cdot 0.39 = 0.305.$$

(b) Primenom Bajesove formule (1.17) sledi

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)} \approx 0.36.$$

---

[64] *Iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ na slučajan način se bira jedan broj, a zatim bez vraćanja izvučenog broja još jedan. Izračunati verovatnoće događaja*

(a) *A–„drugi broj je veći od prvog”,*

(b) *B–„drugi broj je za 2 veći od prvog”.*

Rešenje: Označimo sa H_i događaj „*u prvom izvlačenju je izvučen broj i*”, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Očigledno je da su događaji H_i jednakoverovatni tako da je $\mathsf{P}(H_i) = \frac{1}{5},\ i = 1, 2, 3, 4, 5$.

(a) Iz $\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{4}{4},\ \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{3}{4},\ \mathsf{P}(A|H_3) = \frac{2}{4},\ \mathsf{P}(A|H_4) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(A|H_5) = 0$, primenom formule totalne verovatnoće se dobija

$$\mathsf{P}(A) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{4}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{2}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{1}{2}.$$

(b) Iz $\mathsf{P}(B|H_1) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(B|H_2) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(B|H_3) = \frac{1}{4},\ \mathsf{P}(A|H_4) = 0,\ \mathsf{P}(B|H_5) = 0$, primenom formule totalne verovatnoće se dobija

$$\mathsf{P}(B) = \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} \cdot 0 + \tfrac{1}{5} \cdot 0 = \tfrac{3}{20}.$$

[65] *Pera bira jednu od dve kutije* K_1 *i* K_2 *i to dvostrukoverovatnije kutiju* K_1 *nego kutiju* K_2*, a zatim iz kutije izvlači* 2 *kuglice. U kutiji* K_1 *se nalaze dve kuglice označene brojem* 1 *i tri kuglice označene brojem* 2*. U kutiji* K_2 *se nalazi jedna kuglica označena brojem* 1 *i četiri kuglice označene brojem* 2*. Ako je zbir izvučenih brojeva jednak* 3 *izrčunati verovatnoću da je Pera izvlačio kuglice iz prve kutije.*

Rešenje: Označimo sa H_i događaj „*Pera izvlači kuglice iz kutije i*”, $i = 1, 2$. Iz $\mathsf{P}(H_1) + \mathsf{P}(H_2) = 1$ i $\mathsf{P}(H_1) : \mathsf{P}(H_2) = 2 : 1$ sledi $\mathsf{P}(H_1) = \frac{2}{3}$ i $\mathsf{P}(H_2) = \frac{1}{3}$. Označimo sa A događaj „*zbir izvučenih brojeva je* 3”. Na osnovu uslova zadatka sledi

$$\mathsf{P}(A|H_1) = \frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{5}, \qquad \mathsf{P}(A|H_2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Primenom formule totalne verovatnoće dobija se

$$\mathsf{P}(A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{8}{15},$$

te je tražena verovatnoća

$$\mathsf{P}(H_1|A) = \frac{\mathsf{P}(H_1)\,\mathsf{P}(A|H_1)}{\mathsf{P}(A)} = \frac{3}{4}.$$

---

[66] *Radnik ide svaki dan na posao autobusom, tramvajem ili biciklom. U* 50% *slučajeva se opredeljuje za autobus, u* 20% *posto slučajeva za tramvaj, i u* 30% *slučajeva za bicikl. Verovatnoća da će zbog kašnjenja autobusa zakasniti na posao je* 0.05*, u slučaju izbora tramvaja ta verovatnoća iznosi* 0.1*, a biciklom kasni sa verovatnoćom* 0.01.

(a) *Izračunati verovatnoću sa kojom radnik kasni na posao.*

(b) *Ako je radnik zakasnio na posao, koliko iznosi verovatnoća da je on na posao išao biciklom?*

Rešenje: Označimo događaje:

Z - „*radnik određenog dana kasni na posao*”,
A - „*radnik na posao ide auotobusom*”,
T - „*radnik na posao ide tramvajem*”,
B - „*radnik na posao ide biciklom*”.

Analogno kao u zadacima [56], [57], [58], [59], rezultati se mogu dobiti primenom formule totalne verovatnoće (1.16) i Bajesove formule (1.17) (događaji A, T i B čine potpun sistem događaja):

(a) $\mathsf{P}(A) = 0.5, \quad \mathsf{P}(T) = 0.2, \quad \mathsf{P}(B) = 0.3,$
$\mathsf{P}(Z|A) = 0.05, \quad \mathsf{P}(Z|T) = 0.1, \quad \mathsf{P}(Z|B) = 0.01,$

$$\mathsf{P}(Z) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(Z|A) + \mathsf{P}(T)\,\mathsf{P}(Z|T) + \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(Z|B) = 0.048\,.$$

(b)
$$\mathsf{P}(B|Z) = \frac{\mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(Z|B)}{\mathsf{P}(Z)} = 0.0625\,.$$

---

[67] *Poreski inspektor će sutradan obići jednu od prodavnica* A *ili* B*, pri čemu će se jednakoverovatno odlučiti za bilo koju od njih. U prodavnici* A *će zabeležiti nepravilnost u radu sa verovatnoćom* 0.1*, a u prodavnici* B *sa verovatnoćom* 0.05.

(a) *Izračunati verovatnoću da će poreski inspektor sutradan zabeležiti neku nepravilnost u radu.*

(b) *Ako će poreski inspektor sutradan konstatovati da prodavnica koju je posetio radi pravilno, koliko iznosi verovatnoća da će posetiti prodavnicu A?*

Rešenje: Označimo događaje:

N - „*inspektor će zabeležiti nepravilnost u radu*",
A - „*inspektor će posetiti prodavnicu A*",
B - „*inspektor će posetiti prodavnicu B*".

Analogno kao u zadacima [56], [57], [58], [59], [66], rezultati se mogu dobiti primenom formule totalne verovatnoće (1.16) i Bajesove formule (1.17) (potpun sistem događaja čine događaji A i B):

(a) $\mathsf{P}(A) = 0.5, \quad \mathsf{P}(B) = 0.5,$

$\mathsf{P}(N|A) = 0.1, \quad \mathsf{P}(N|B) = 0.05,$

$$\mathsf{P}(N) = \mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}(N|A) + \mathsf{P}(B)\,\mathsf{P}(N|B) = 0.075\,.$$

(b) $\overline{N}$ je događaj „*inspektor će konstatovati da posećena prodavnica radi pravilno*", i njegova verovatnoća je $\mathsf{P}\left(\overline{N}\right) = 1 - \mathsf{P}(N) = 0.925$. Sledi

$$\mathsf{P}\left(A|\overline{N}\right) = \frac{\mathsf{P}(A)\,\mathsf{P}\left(\overline{N}|A\right)}{\mathsf{P}\left(\overline{N}\right)} = \frac{\mathsf{P}(A)\,(1 - \mathsf{P}(N|A))}{\mathsf{P}\left(\overline{N}\right)} \approx 0.4865\,.$$

2 Slučajne promenljive

2.1 Slučajne promenljive diskretnog tipa

Skup svih mogućih ishoda jednog verovatnosnog eksperimenta je Ω. **Slučajna promenljiva** X predstavlja merljivu funkciju koja preslikava skup Ω u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Skup slika od X označavamo sa $\mathcal{R}_X$ i zovemo **skup vrednosti** slučajne promenljive X.

Slučajna promenljiva je **diskretnog** tipa ako je skup vrednosti konačan ili prebrojiv. Tada ga možemo predstaviti u obliku $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Sa $\mathsf{p}(x_i)$ obeležavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u x_i, tj.

$$\mathsf{p}(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i) = \mathsf{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}), \tag{2.1}$$

pri čemu važi da je

$$\sum_i \mathsf{p}(x_i) = \sum_i \mathsf{P}\,(X = x_i) = 1. \tag{2.2}$$

Skup vrednosti diskretne slučajne promenljive $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama $\mathsf{p}(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ predstavlja **zakon raspodele** slučajne promenljive X. Zakon raspodele slučajne promenljive X najčešće predstavljamo šematski

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & \ldots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \ldots & \mathsf{p}(x_n) & \ldots \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Funkciju raspodele slučajne promenljive X označavamo sa $F_X\,(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i definišemo sa

$$F_X\,(x) = \mathsf{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} = \mathsf{P}\,(X < x) = \sum_{i:\ x_i < x} \mathsf{p}(x_i). \tag{2.4}$$

Slučajna promenljiva X ima **binomnu** $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu sa parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{0, 1, \ldots, n\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}(X = i) = \tbinom{n}{i}\, p^i q^{n-i}, \tag{2.5}$$

gde je $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Slučajna promenljiva X ima **Poasonovu** (*Poisson*) $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu sa parametrom $\lambda > 0$, ako je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots\}$ njen skup vrednosti i za $i \in \mathcal{R}_X$ važi

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}\,(X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}. \tag{2.6}$$

Slučajna promenljiva X ima **geometrijsku** $\mathcal{G}(p)$ raspodelu sa parametrom $0 < p < 1$ ako je njen skup vrednosti $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$, a odgovarajuće verovatnoće su date sa

$$\mathsf{p}(i) = \mathsf{P}\,(X = i) = q^{i-1} p, \tag{2.7}$$

za $i \in \mathcal{R}_X$, $q = 1 - p$.

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu i $n \to \infty$, a $p \to 0$ i $np \to \lambda = const$, tada

$$\binom{n}{i}\, p^i\, q^{n-i} \to \frac{\lambda^i}{i!}\, e^{-\lambda}, \tag{2.8}$$

tj. verovatnoće koje odgovaraju binomnoj raspodeli konvergiraju ka verovatnoćama koje odgovaraju Poasonovoj raspodeli.

---

[68] *Firma na raspolaganju ima šest telefonskih linija. Neka je X broj linija zauzetih u određenom trenutku. Zakon raspodele za X dat je sa*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće sledećih događaja*
A - *„bar tri linije su zauzete",*
B - *„manje od dve linije su zauzete",*
C - *„najmanje četiri linije nisu zauzete",*
D - *„zauzeto je između dve i pet linija".*

(b) *Izračunati* $F_X(1.3)$, $F_X(3)$ *i* $F_X(4.6)$.

(c) *Naći funkciju raspodele* $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ *i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su:

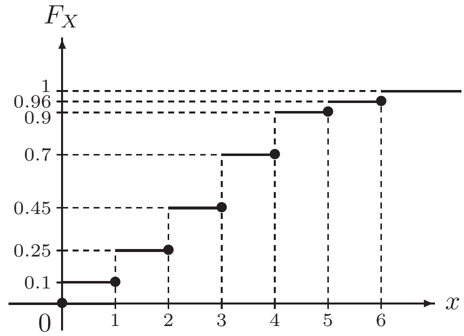
$$\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) + \mathsf{P}(X = 6) =$$
$$= 0.25 + 0.2 + 0.06 + 0.04 = 0.55,$$
$$\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(2 \leq X \leq 5) =$$
$$= \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) =$$
$$= 0.2 + 0.25 + 0.2 + 0.06 = 0.71.$$

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$$F_X(1.3) = \mathsf{P}(X < 1.3) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = 0.1 + 0.15 = 0.25,$$
$$F_X(3) = \mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 = 0.45,$$
$$F_X(4.6) = \mathsf{P}(X < 4.6) =$$
$$= \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) =$$
$$= 0.1 + 0.15 + 0.2 + 0.25 + 0.2 = 0.9.$$

(c) Primenjujući (2.4) određujemo funkciju raspodele i njen grafik

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.1, & 0 < x \leq 1 \\ 0.25, & 1 < x \leq 2 \\ 0.45, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 0.9, & 4 < x \leq 5 \\ 0.96, & 5 < x \leq 6 \\ 1, & x > 6 \end{cases},$$



---

[69] *Ako je* $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *skup vrednosti slučajne promenljive* X*, i ako je* $\mathsf{P}(X = i) = c\,(5 - i)$*, odrediti konstantu* c *tako da* X *bude slučajna promenljiva.*

Rešenje: Da bi X bila slučajna promenljiva neophodno je da važi $\mathsf{P}(X = x_i) \geq 0$ i (2.2). Kako je $0 \leq i \leq 4$ imamo da je $c \geq 0$. Koristeći uslov (2.2) dalje imamo $5c + 4c + 3c + 2c + c = 1$ odakle je $c = \frac{1}{15}$.

---

[70] *Neka je* X *broj guma koje nisu dovoljno napumpane na slučajno izabranom automobilu.*

(a) *Koja od tri ponuđene funkcije* P *određuje zakon raspodele za slučajnu promenljivu* X*.*

x_i	0	1	2	3	4
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.3	0.2	0.1	0.05	0.05
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.4	0.1	0.1	0.1	0.3
$\mathsf{P}(X = x_i)$	0.4	0.1	0.2	0.1	0.3

(b) *Za funkciju koja određuje zakon raspodele izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4)$, $\mathsf{P}(X \leq 2)$ *i* $\mathsf{P}(X \neq 0)$.

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive* X*.*

Rešenje:

(a) Za sve tri ponuđene funkcije važi da su nenegativne, tako da još treba proveriti u kom slučaju važi uslov (2.2). Za prvu funkciju je $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 0.7$, za drugu je $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 1$ i za treću $\sum_{i=0}^{4} \mathsf{P}(X = x_i) = 1.1$, tako da jedino druga funkcija određuje zakon raspodele slučajne promenljive X.

(b) Tražene verovatnoće su:

$\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) = 0.1 + 0.1 + 0.3 = 0.5,$

$\mathsf{P}(X \leq 2) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = 0.4 + 0.1 + 0.1 = 0.6,$

$\mathsf{P}(X \neq 0) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) = 1 - 0.4 = 0.6.$

(c) Funkcija raspodele $F_X(x) = \mathsf{P}(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$ je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 0.4, & 0 < x \leq 1 \\ 0.5, & 1 < x \leq 2 \\ 0.6, & 2 < x \leq 3 \\ 0.7, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

---

[71] *Od izvođača radova se zahteva da podnesu jedan, dva, tri, četiri ili pet formulara (u zavisnosti od vrste posla) kod dobijanja građevinske dozvole. Neka je X broj formulara koji se zahteva od narednog podnesioca molbe. Verovatnoća da se zahteva i formulara je proporcionalna sa i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.*

(a) *Odrediti vrednost konstante proporcionalnosti.*

(b) *Izračunati verovatnoću da će najmanje tri formulara biti zahtevana.*

(c) *Izračunati verovatnoću da će broj formulara koji se zahtevaju biti između dva i četiri.*

(d) *Da li funkcija $\mathsf{P}(Y = i) = \frac{i^2}{50}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ može biti zakon raspodele slučajne promenljive Y?*

Rešenje:

(a) Na osnovu uslova zadatka verovatnoća da se zahteva i formulara proporcionalna je sa i, te je $\mathsf{P}(X = i) = k \cdot i$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Na osnovu uslova nenegativnosti dobijamo da je $k \geq 0$, pa primenom (2.2) dobijamo $i + 2i + 3i + 4i + 5i = 1$, odakle je $i = \frac{1}{15}$.

(b) Tražena verovatnoća je
$\mathsf{P}(X \geq 3) = \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) + \mathsf{P}(X = 5) = \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{4}{5}$.

(c) Znači, $\mathsf{P}(2 \leq X \leq 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) + \mathsf{P}(X = 4) = \frac{2}{15} + \frac{3}{15} + \frac{4}{15} = \frac{3}{5}$.

(d) Kako je $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{i^2}{50} = \frac{1+4+9+16+25}{50} = \frac{55}{50}$ na osnovu (2.2) data funkcija ne može biti zakon raspodele slučajne promenljive Y.

---

[72] *U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 2 i dve kuglice označene brojem 3. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(2.5)$, $F_X(-1)$, $F_X(2)$ i $F_X(5)$.*

(c) *Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

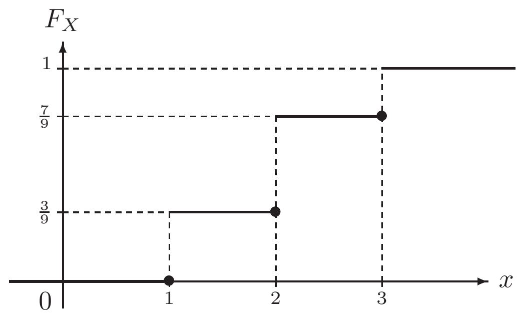
(a) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1,2,3\}$, pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X=1) = \frac{3}{9}$, $\mathsf{P}(X=2) = \frac{4}{9}$ i $\mathsf{P}(X=3) = \frac{2}{9}$. Znači, traženi zakon raspodele slučajne promenljive X je $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{3}{9} & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

(b) Na osnovu (2.4) imamo da je

$F_X(2.5) = \mathsf{P}(X < 2.5) = \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} = \frac{7}{9}$,
$F_X(-1) = \mathsf{P}(X < -1) = 0$,
$F_X(2) = \mathsf{P}(X < 2) = \mathsf{P}(X=1) = \frac{3}{9}$,
$F_X(5) = \mathsf{P}(X < 5) = \mathsf{P}(X=1) + \mathsf{P}(X=2) + \mathsf{P}(X=3) = \frac{3}{9} + \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 1$.

(c) Tražena funkcija raspodele $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}$ i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1 \\ \frac{3}{9}, & 1 < x \le 2 \\ \frac{7}{9}, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases},$$



---

[73] *U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem* 1, *četiri kuglice označene brojem* 3, *i jedna kuglica označena brojem* 5. *Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati* $F_X(2)$, $F_X(4)$, $F_X(8)$ *i* $F_X(16.375)$.

(c) *Naći funkciju raspodele, $F_X(x)$, za slučajnu promenljivu X i grafički je predstaviti.*

Rešenje:

(a) Označimo sa $k_{\{m,n\}}$, $m,n \in \{1,3,5\}$ događaj „izvučene su kuglice sa brojevima m i n" (pri čemu je nebitan redosled izvučenih kuglica). Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2,4,6,8\}$ pri čemu je

$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(k_{\{1,1\}}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1}{21}$,

$\mathsf{P}(X=4) = \mathsf{P}(k_{\{1,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$,

$\mathsf{P}(X=6) = \mathsf{P}(k_{\{1,5\}} \cup k_{\{3,3\}}) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{8}{21}$ i

$\mathsf{P}(X=8)=\mathsf{P}(k_{\{3,5\}})=\frac{\binom{4}{1}\binom{1}{1}}{\binom{7}{2}}=\frac{4}{21}$,

tako da je $X:\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ \frac{1}{21} & \frac{8}{21} & \frac{8}{21} & \frac{4}{21} \end{pmatrix}$.

(b) Koristeći (2.4) imamo:

$F_X\,(2)=\mathsf{P}(X<2)=0$,

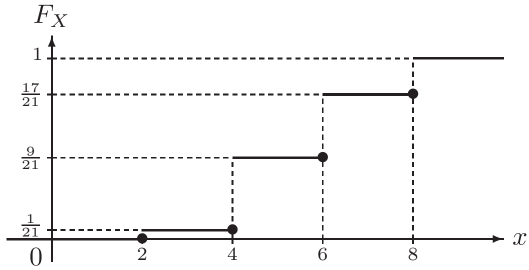
$F_X\,(4)=\mathsf{P}(X<4)=\mathsf{P}(X=2)=\frac{1}{21}$,

$F_X\,(8)=\mathsf{P}(X<8)=1-\mathsf{P}(X=8)=1-\frac{4}{21}=\frac{17}{21}$,

$F_X\,(16.375)=\mathsf{P}(X<16.375)=1$.

(c) Funkcija raspodele slučajne promenljive X i njen grafik su

$$F_X\,(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2 \\ \frac{1}{21}, & 2<x\le 4 \\ \frac{9}{21}, & 4<x\le 6 \\ \frac{17}{21}, & 6<x\le 8 \\ 1, & x>8 \end{cases},$$



---

[74] *U kutiji se nalaze 4 bele i 6 zelenih kuglica. Pera izvlači jednu po jednu kuglicu bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju sve dok ne izvuče zelenu kuglicu. Slučajna promenljiva X predstavlja broj izvedenih izvlačenja. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X i izračunati $F_{2X+1}\,(5)$ i $F_{X^2}\,(6)$.*

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1,2,3,4,5\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{6}{10}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{4}{15}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{1}{10}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{35}$, $\mathsf{P}(X=5)=\mathsf{P}(BBBB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{210}$, gde je sa B označen događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*". Traženi zakon raspodele je $X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{6}{10} & \frac{4}{15} & \frac{1}{10} & \frac{1}{35} & \frac{1}{210} \end{pmatrix}$.

Primenom definicije funkcije raspodele dobija se

$F_{2X+1}\,(5)=\mathsf{P}(2X+1<5)=\mathsf{P}(X<2)=\mathsf{P}(X=1)=\frac{6}{10}$,

$F_{X^2}\,(6)=\mathsf{P}(X^2<6)=\mathsf{P}(-\sqrt{6}<X<\sqrt{6})=\mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)=\frac{13}{15}$.

---

[75] *Biljana baca kockicu za „Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva X predstavlja vrednost ostatka pri deljenju palog broja sa 4. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X=\{0,1,2,3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X=0)=\mathsf{P}($„*prilikom bacanja kockice pojavio se broj* 4"$)=\frac{1}{6}$,

$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(„\textit{prilikom bacanja kockice pojavio se broj } 1 \textit{ ili broj } 5") = \frac{2}{6}$,
$\mathsf{P}(X=2) = \mathsf{P}(„\textit{prilikom bacanja kockice pojavio se broj } 2 \textit{ ili broj } 6") = \frac{2}{6}$,
$\mathsf{P}(X=3) = \mathsf{P}(„\textit{prilikom bacanja kockice pojavio se broj } 3") = \frac{1}{6}$,
tako da je $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

---

[76] *U kutiji se nalaze p kuglica označenih brojem 2 i q kuglica označenih brojem 3* $(p, q \geq 2)$.

(a) *Izvlači se jedna kuglica. Slučajna promenljiva* X *predstavlja izvučeni broj. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive* X .

(b) *Izvlače se dve kuglice odjednom. Slučajna promenljiva* Y *predstavlja zbir izvučenih brojeva. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* Y .

Rešenje:

(a) Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{2, 3\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X=2) = \frac{p}{p+q}$ i $\mathsf{P}(X=3) = \frac{q}{p+q}$, tako da je $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{p}{p+q} & \frac{q}{p+q} \end{pmatrix}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{4, 6, 9\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(Y=4) = \frac{\binom{p}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)}$, $\mathsf{P}(Y=6) = \frac{\binom{p}{1}\binom{q}{1}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)}$ i $\mathsf{P}(Y=9) = \frac{\binom{q}{2}}{\binom{p+q}{2}} = \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)}$ tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ \frac{p(p-1)}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{2pq}{(p+q)(p+q-1)} & \frac{q(q-1)}{(p+q)(p+q-1)} \end{pmatrix}$.

---

[77] *U kutiji se nalazi 5 crvenih i 3 bele kuglice. Slavica izvlači tri kuglice istovremeno. Slučajna promenljiva* X *predstavlja broj izvučenih belih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X .

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3\}$ i $\mathsf{P}(X=0) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{10}{56}$, $\mathsf{P}(X=1) = \frac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{30}{56}$, $\mathsf{P}(X=2) = \frac{\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{15}{56}$ i $\mathsf{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{56}$, tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{10}{56} & \frac{30}{56} & \frac{15}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$.

---

[78] *Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva X predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.*

(a) *Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(2 \leq X < 4)$, $\mathsf{P}(2 < X < 4)$ *i* $\mathsf{P}(X < 3.)$

(c) *Naći funkciju raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Označimo sa D događaj da se u jednom bacanju kockice pojavi broj 6, a sa $\bar{D}$ da se u jednom bacanju kockice ne pojavi broj 6. Tada je $\mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$ i $\mathsf{P}(\bar{D}) = \frac{5}{6}$. Primetimo da su bacanja kockice međusobno nezavisna.

(a) Očigledno je da je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(D) = \frac{1}{6}$,

$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$,

$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{25}{216}$,

$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}D + \bar{D}\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \mathsf{P}(\bar{D}\bar{D}\bar{D}) = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{216}$,

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{36} & \frac{25}{216} & \frac{125}{216} \end{pmatrix}$.

(b) Tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(2 \leq X < 4) = \mathsf{P}(X = 2) + \mathsf{P}(X = 3) = \frac{5}{36} + \frac{25}{216} = \frac{55}{216}$,

$\mathsf{P}(2 < X < 4) = \mathsf{P}(X = 3) = \frac{25}{216}$,

$\mathsf{P}(X < 3) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}$.

(c) Primenjujući (2.4) dobijamo da je $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & 1 < x \leq 2 \\ \frac{11}{36}, & 2 < x \leq 3 \\ \frac{91}{216}, & 3 < x \leq 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$.

---

[79] *Četiri osobe izvlače na slučajan način, jedna za drugom, po jednu šibicu od četiri ponuđene, od kojih je jedna kraća od ostalih. Izvučena šibica i osoba koja ju je izvukla se ne vraćaju u igru. Slučajna promenljiva X predstavlja redni broj izvlačenja u kojem je izvučena kraća šibica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X uzima vrednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Označimo sa K_i događaj „*u i-tom izvlačenju je izvučena kraća šibica*", $i = 1, 2, 3, 4$. Iz $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(K_1) = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(\overline{K_1}K_2) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\ \overline{K_2}K_3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(\overline{K_1}\ \overline{K_2}\ \overline{K_3}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ dobija se traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

---

[80] *U kutiji se nalazi 5 belih i 3 zelene kuglice. Zoran na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *bez vraćanja*

(b) *sa vraćanjem*

dok ne izvuče kuglicu zelene boje. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja.

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*" i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*".

(a) Broj izvlačenja može biti $\{1,2,3,4,5,6\}$ tako da je traženi zakon raspodele X : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{3}{8} & \frac{15}{56} & \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & \frac{3}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}$, gde je $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}=\frac{5}{28}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{28}$, $\mathsf{P}(X=5)=\mathsf{P}(BBBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{56}$ i $\mathsf{P}(X=6)=\mathsf{P}(BBBBB)=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{56}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\{1,2,3,\ldots\}=\mathbb{N}$. Kako se izvlačenja vrše sa vraćanjem dalje imamo $\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(Z)=\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(BZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(BBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}$, $\mathsf{P}(X=4)=\mathsf{P}(BBBZ)=\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8},\ldots$ tako da slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{3}{8})$ raspodelu.

---

[81] *Dinar se baca tri puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj palih grbova, a slučajna promenljiva Y uzima vrednost 1 ako je palo više grbova, a -1 ako je palo više pisama. Naći zakone raspodela slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje: Označimo sa P_i i G_i događaje „*u i-tom bacanju dinara palo pismo, odnosno grb*", gde $i\in\{1,2,3\}$. Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X=\{0,1,2,3\}$, a skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y=\{-1,1\}$. Kako su bacanja dinara međusobno nezavisna imamo da je

$\mathsf{P}(X=0)=\mathsf{P}(P_1P_2P_3)=\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(G_1P_2P_3+P_1G_2P_3+P_1P_2G_3)=$

$=\mathsf{P}(G_1P_2P_3)+\mathsf{P}(P_1G_2P_3)+\mathsf{P}(P_1P_2G_3)=$

$=\mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.

Analogno se dobija da je $\mathsf{P}(X=2)=\frac{3}{8}$ i $\mathsf{P}(X=3)=\frac{1}{8}$. Za slučajnu promenljivu Y imamo da je

$\mathsf{P}(Y=-1)=\mathsf{P}(P_1P_2P_3+P_1P_2G_3+P_1G_2P_3+G_1P_2P_3)=$

$=\mathsf{P}(P_1P_2P_3)+\mathsf{P}(P_1P_2G_3)+\mathsf{P}(P_1G_2P_3)+\mathsf{P}(G_1P_2P_3)=$

$=\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(G_3)+\mathsf{P}(P_1)\,\mathsf{P}(G_2)\,\mathsf{P}(P_3)+\mathsf{P}(G_1)\,\mathsf{P}(P_2)\,\mathsf{P}(P_3)=$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$\mathsf{P}(Y=1)=1-\mathsf{P}(Y=-1)=\frac{1}{2}$.

Tražene slučajne promenljive su $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$ i $Y:\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

---

[82] *Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je 0.9. Ako je meta pogođena najviše jedanom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju 10 poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj osvojenih poena. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka skup vrednosti tražene slučajne promenljive je $\mathcal{R}_X=\{-5,5,10\}$, a dogovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X=-5)=\mathsf{P}($„*Strelac ima* 3 *promašaja ili* 2 *promašaja i* 1 *pogodak* "$)=0.1^3+\binom{3}{2}\cdot0.1^2\cdot0.9=0.028$, $\mathsf{P}(X=5)=\mathsf{P}($„*Strelac ima* 2 *pogotka i* 1 *promašaj*"$)=$

$\binom{3}{2} \cdot 0.9^2 \cdot 0.1 = 0.243$ i $\mathsf{P}(X = 10) = \mathsf{P}($„*Strelac ima* 3 *pogotka*”$) = 0.9^3 = 0.729$, tako da je $X : \begin{pmatrix} -5 & 5 & 10 \\ 0.028 & 0.243 & 0.729 \end{pmatrix}$.

---

[83] *Dinar se baca dok se prvi put ne pojavi grb ali najviše pet puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvedenih bacanja.*

Rešenje: Kako je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i

$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(G_1) = \frac{1}{2}$,

$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(P_1G_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$,

$\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(P_1P_2G_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,

$\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(P_1P_2P_3G_4) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$,

$\mathsf{P}(X = 5) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$,

gde je sa G_i i P_i označena pojava grba, odnosno pisma u i-tom bacanju ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) imamo da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$.

---

[84] *U kutiji se nalaze* 2 *zelene i* 3 *bele kuglice. Ksenija na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu*

(a) *sa vraćanjem dok ne izvuče kuglicu zelene boje ali najviše* 5 *puta,*

(b) *bez vraćanja dok ne izvuče kuglicu zelene boje.*

Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja.

Rešenje: Označimo sa B događaj „*izvučena je bela kuglica*” i sa Z događaj „*izvučena je zelena kuglica*”.

(a) Broj izvlačenja može biti $1, 2, 3, 4, 5$. Odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{125}$, $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBBZ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{54}{625}$ i $\mathsf{P}(X = 5) = \mathsf{P}(BBBB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{81}{625}$, tako da je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{2}{5} & \frac{6}{25} & \frac{18}{125} & \frac{54}{625} & \frac{81}{625} \end{pmatrix}$.

(b) Kad Ksenija izvlači kuglice bez vraćanja skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3, 4\}$, a odgovarajuće verovatnoće su $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z) = \frac{2}{5}$, $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(BZ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathsf{P}(X = 3) = \mathsf{P}(BBZ) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{5}$ i $\mathsf{P}(X = 4) = \mathsf{P}(BBB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$ i traženi zakon raspodele je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$.

---

[85] *U prvoj kutiji se nalaze* 2 *bele,* 3 *zelene i* 4 *crvene kuglice. U drugoj kutiji se nalazi* 1 *bela,* 2 *zelene i* 3 *crvene kuglice. Jelena na slučajan način bira dve kuglice iz prve kutije i prebacuje ih u drugu kutiju. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj belih kuglica u drugoj kutiji nakon premeštanja.*

Rešenje: Nakon opisanog eksperimenta u drugoj kutiji može biti 1, 2 ili 3 bele kuglice, tako da je skup vrednosti slučajne promenljive X skup $\{1, 2, 3\}$. Nakon prebacivanja će u drugoj kutiji biti jedna bela kuglica ako Jelena iz prve u drugu kutiju prebaci dve kuglice koje nisu bele boje tako da je $\mathsf{P}(X = 1) = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{12}$. U drugoj kutiji će nakon prebacivanja broj belih kuglica biti 2 ako Jelena prebaci jednu belu kuglicu i jednu kuglicu koja nije bele boje, tj. $\mathsf{P}(X = 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{7}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{7}{18}$. Broj belih kuglica će biti tri ako Jelena iz prve u drugu kutiju prebaci dve bele kuglice tako da je $\mathsf{P}(X = 3) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36}$. Traženi zakon raspodele je $X : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{7}{12} & \frac{7}{18} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

---

[86] *U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem* 1, *tri kuglice označene brojem* 2 *i četiri kuglice označene brojem* 3. *Vlada na slučajan način bira odjednom dve kuglice iz kutije. Naći zakon raspodele slučajne promenljice* X *koja predstavlja ostatak pri deljenu zbira izvučenih brojeva sa* 3.

Rešenje: Ostatak pri deljenju nekog broja sa tri može biti 0, 1 ili 2 tako da je skup vrednosti slučajne promenljive X jednak $\{0, 1, 2\}$. Zbir izvučenih brojeva može biti $2, 3, 4, 5$ i 6. Označimo sa $Z = i$ događaj „*zbir je jednak* i ”, $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Dalje imamo $\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(Z = 3) + \mathsf{P}(Z = 6) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{1}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{6}{36} + \frac{6}{36} = \frac{12}{36}$, $\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(Z = 4) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{8}{36} + \frac{3}{36} = \frac{11}{36}$ i $\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(Z = 2) + \mathsf{P}(Z = 5) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{9}{2}} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{1}{36} + \frac{12}{36} = \frac{13}{36}$, te je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{12}{36} & \frac{11}{36} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$.

---

[87] *Meta se sastoji iz tri koncentična kruga. Pogodak u krug* K_1 *donosi* 10 *poena, u prsten* K_2 5 *poena i u prsten* K_3 1 *poen. Pogodak van mete donosi* -1 *poen. Verovatnoća da će strelac pogoditi u krug* K_1 *je* 0.4, *u prsten* K_2 *je* 0.3 *i u prsten* K_3 *je* 0.2.

(a) *Ako strelac gađa metu jednim metkom, naći zakon raspodele slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj osvojenih poena.*

(b) *Ako strelac gađa metu dva puta i gađanja su međusobno nezavisna, naći zakon raspodele slučajne promenljive* Y *koja predstavlja ukupan broj osvojenih poena*

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka imamo da je verovatnoća pogotka van mete 0.1.

(a) Jednostavno se dobija da je $X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 5 & 10 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{-2, 0, 2, 4, 6, 9, 10, 11, 15, 20\}$. Označimo sa $P_{i,j}$ događaj da je strelac pogodio metu u i-tom gađanju u deo K_j, $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ i sa V_i da je pogodio van mete u i-tom gađanju, $i \in \{1, 2\}$. Kako su gađanja međusobno nezavisna imamo da je

$\mathsf{P}(Y=-2)=\mathsf{P}(V_1V_2)=0.1\cdot 0.1=0.01,$
$\mathsf{P}(Y=0)=\mathsf{P}(V_1P_{2,3})+\mathsf{P}(P_{1,3}V_2)=0.1\cdot 0.2+0.2\cdot 0.1=0.04,$
$\mathsf{P}(Y=2)=\mathsf{P}(P_{1,1}\,\mathsf{P}_{2,1})=0.2\cdot 0.2=0.04,$
$\mathsf{P}(Y=4)=\mathsf{P}(V_1P_{2,2})+\mathsf{P}(P_{1,2}V_2)=0.1\cdot 0.3+0.3\cdot 0.1=0.06,$
$\mathsf{P}(Y=6)=\mathsf{P}(P_{1,3}P_{2,2})+\mathsf{P}(P_{1,2}P_{2,3})=0.2\cdot 0.3+0.3\cdot 0.2=0.12,$
$\mathsf{P}(Y=9)=\mathsf{P}(V_1P_{2,1})+\mathsf{P}(P_{1,1}V_2)=0.1\cdot 0.4+0.4\cdot 0.1=0.08,$
$\mathsf{P}(Y=10)=\mathsf{P}(P_{1,2}P_{2,2})=0.3\cdot 0.3=0.09,$
$\mathsf{P}(Y=11)=\mathsf{P}(P_{1,3}P_{2,1})+\mathsf{P}(P_{1,1}P_{2,3})=0.4\cdot 0.2+0.2\cdot 0.4=0.16,$
$\mathsf{P}(Y=15)=\mathsf{P}(P_{1,2}P_{2,1})+\mathsf{P}(P_{1,1}P_{2,2})=0.3\cdot 0.4+0.4\cdot 0.3=0.24,$
$\mathsf{P}(Y=20)=\mathsf{P}(P_{1,1}P_{2,1})=0.4\cdot 0.4=0.16,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive Y

$$Y:\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 4 & 6 & 9 & 10 & 11 & 15 & 20 \\ 0.01 & 0.04 & 0.04 & 0.06 & 0.12 & 0.08 & 0.09 & 0.16 & 0.24 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

---

[88] *Na pravcu kretanja automobila se nalaze tri semafora. Verovatnoća zaustavljanja automobila na prvom semaforu je* 0.4, *na drugom* 0.6 *i na trećem* 0.5. *Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja.*

Rešenje: Označimo sa Z_i događaj da je vozač zaustavio automobil na i-tom semaforu $i\in\{1,2,3\}$. Kako se na putu kretanja automobila nalaze tri semafora imamo da je $\mathcal{R}_X=\{0,1,2,3\}$ pri čemu je
$\mathsf{P}(X=0)=\mathsf{P}(Z_1)=0.4,$
$\mathsf{P}(X=1)=\mathsf{P}(\bar{Z}_1Z_2)=0.6\cdot 0.6=0.36,$
$\mathsf{P}(X=2)=\mathsf{P}(\bar{Z}_1\bar{Z}_2Z_3)=0.6\cdot 0.4\cdot 0.5=0.12,$
$\mathsf{P}(X=3)=\mathsf{P}(\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3)=0.6\cdot 0.4\cdot 0.5=0.12.$

tako da je traženi zakon raspodele $\quad X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.4 & 0.36 & 0.12 & 0.12 \end{pmatrix}.$

---

[89] *Baca se kockica za igru „Ne ljuti se čoveče". Ako se pojavi broj manji od tri izvlače se dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze tri zelene i dve bele kuglice. U suprotnom se izvlače dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze dve zelene i jedna bela kuglica. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X.*

Rešenje: Obeležimo sa H_1 događaj da se pri bacanju kockice pojavio broj manji od tri, a sa H_2 događaj da se pojavio broj veći ili jednak sa tri, koji čine potpun sistem događaja. Njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ i $\mathsf{P}(H_2)=1-\mathsf{P}(H_1)=\frac{2}{3}$. Raspodelu slučajne promenljive X, odnosno odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X=j)$, $j\in\mathcal{R}_X=\{0,1,2\}$ možemo izračunati primenom formule totalne verovatnoće

$$\mathsf{P}(X=j)=\textstyle\sum_{i=1}^{2}\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}\left(X=j|H_i\right),\ \ j\in\mathcal{R}_X,$$

pri čemu je

$\mathsf{P}(X=0|H_1)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$, $\quad \mathsf{P}(X=0|H_2)=\frac{0}{\binom{3}{2}}=0$,

$\mathsf{P}(X=1|H_1)=\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$, $\quad \mathsf{P}(X=1|H_2)=\frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{3}{2}}=\frac{2}{3}$,

$\mathsf{P}(X=2|H_1)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$, $\quad \mathsf{P}(X=2|H_2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}}=\frac{1}{3}$.

Uvrštavanjem u formulu totalne verovatnoće dobijamo

$\mathsf{P}(X=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2}{3}\cdot 0=\frac{1}{30}$,
$\mathsf{P}(X=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{29}{45}$,
$\mathsf{P}(X=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{29}{90}$,

tako da je traženi zakon raspodele $\quad X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{30} & \frac{29}{45} & \frac{29}{90} \end{pmatrix}$.

---

[90] *U kutiji se nalaze* 3 *bele i* 1 *zelena kuglica. Ljubo na slučajan način izvlači jednu kuglicu. Ako izvuče belu kuglicu baca ispravan novčić dva puta. Ako izvuče zelenu kuglicu baca dva puta novčić koji sa obe strane ima grb. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj pojavljivanja pisma u opisanom eksperimentu.*

Rešenje: Obeležimo sa H_1 događaj „*Ljubo je izvukao belu kuglicu*", a sa H_2 događaj „*Ljubo je izvukao zelenu kuglicu* ", koji čine potpun sistem događaja. Njihove verovatnoće su $\mathsf{P}(H_1)=\frac{3}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2)=\frac{1}{4}$. Raspodelu slučajne promenljive X, odnosno odgovarajuće verovatnoće računamo primenom formule totalne verovatnoće

$$\mathsf{P}(X=j)=\sum_{i=1}^{2}\mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}(X=j|H_i)\,,\quad j\in\mathcal{R}_X=\{0,1,2\},$$

pri čemu je

$\mathsf{P}(X=0|H_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\quad \mathsf{P}(X=0|H_2)=1\cdot 1=1$,

$\mathsf{P}(X=1|H_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2}$, $\quad \mathsf{P}(X=1|H_2)=0$,

$\mathsf{P}(X=2|H_1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\quad \mathsf{P}(X=2|H_2)=0$.

Uvrštavanjem u formulu totalne verovatnoće dobijamo

$\mathsf{P}(X=0)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{7}{16}$,
$\mathsf{P}(X=1)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{6}{16}$,
$\mathsf{P}(X=2)=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 0=\frac{3}{16}$,

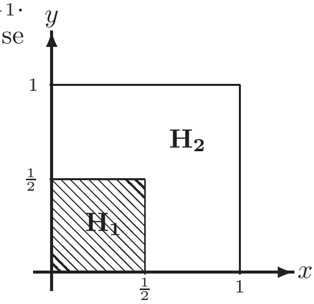
tako da je traženi zakon raspodele $\quad X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{16} & \frac{6}{16} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$.

---

[91] *Iz kvadrata* K *sa temenima u tačkama* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ *i* $(0,1)$ *na slučajan način se bira tačka* $A(x,y)$. *Ako su obe koordinate izabrane tačke manje od* $\frac{1}{2}$ *izvlači se dva puta po jedna kuglica sa vraćanjem iz kutije koja sadrži* 1 *zelenu i* 2 *bele kuglice. U suprotnom se izvlači jedna kuglica iz iste kutije. Naći zakon raspodele slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj izvučenih zelenih kuglica.*

Rešenje:

$H_1 = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{1}{2} \wedge 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$ i $H_2 = K \setminus K_1$. Primenom geometrijske definicije verovatnoće dobija se da je $\mathsf{P}(H_1) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ i $\mathsf{P}(H_2) = 1 - \mathsf{P}(H_1) = \frac{3}{4}$. Primenom formule totalne verovatnoće



$$\mathsf{P}(X=j) = \sum_{i=1}^{2} \mathsf{P}(H_i)\,\mathsf{P}\left(X=j|H_i\right),$$

$j \in \mathcal{R}_X = \{0,1,2\}$, gde je

$\mathsf{P}\left(X=0|H_1\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$, $\quad \mathsf{P}\left(X=0|H_2\right) = \frac{2}{3}$,

$\mathsf{P}\left(X=1|H_1\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{4}{9}$, $\quad \mathsf{P}\left(X=1|H_2\right) = \frac{1}{3}$,

$\mathsf{P}\left(X=2|H_1\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$, $\quad \mathsf{P}\left(X=2|H_2\right) = 0$,

dobija se

$\mathsf{P}(X=0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = \frac{22}{36}$,
$\mathsf{P}(X=1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{36}$,
$\mathsf{P}(X=2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} + \frac{3}{4}\cdot 0 = \frac{1}{36}$,

tako da je traženi zakon raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{22}{36} & \frac{13}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$.

---

[92] *Bacaju se bela i zelena kockica. Naći zakone raspodela za slučajne promenljive*

(a) *Y-zbir palih brojeva,*

(b) *Z-razlika između broja palog na beloj i broja na zelenoj kockici,*

(c) *U-maksimum palih brojeva.*

Rešenje: Skup elementarnih događaja je $\Omega = \{\omega_{ij} \mid i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}$, gde je sa ω_{ij} označen događaj da se na beloj kockici pojavio broj i, a na zelenoj broj j, gde je $i,j \in \{1,2,\ldots,6\}$. Kako su svi elementarni događaji jednakoverovatni imamo da je $\mathsf{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{36}$.

(a) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(Y=2) = \mathsf{P}(\omega_{11}) = \frac{1}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=3) = \mathsf{P}(\omega_{12}+\omega_{21}) = \frac{2}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=4) = \mathsf{P}(\omega_{13}+\omega_{22}+\omega_{31}) = \frac{3}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=5) = \mathsf{P}(\omega_{14}+\omega_{23}+\omega_{32}+\omega_{41}) = \frac{4}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=6) = \mathsf{P}(\omega_{15}+\omega_{24}+\omega_{33}+\omega_{42}+\omega_{51}) = \frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=7) = \mathsf{P}(\omega_{16}+\omega_{25}+\omega_{34}+\omega_{43}+\omega_{52}+\omega_{61}) = \frac{6}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=8) = \mathsf{P}(\omega_{26}+\omega_{35}+\omega_{44}+\omega_{53}+\omega_{62}) = \frac{5}{36}$,

$\mathsf{P}(Y=9)=\mathsf{P}(\omega_{36}+\omega_{45}+\omega_{54}+\omega_{63})=\frac{4}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=10)=\mathsf{P}(\omega_{46}+\omega_{55}+\omega_{64})=\frac{3}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=11)=\mathsf{P}(\omega_{56}+\omega_{65})=\frac{2}{36}$,
$\mathsf{P}(Y=12)=\mathsf{P}(\omega_{66})=\frac{1}{36}$.

Znači, traženi zakon raspodele je

$$Y:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Z je
$\mathcal{R}_Z=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(Z=-5)=\mathsf{P}(\omega_{16})=\frac{1}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=-4)=\mathsf{P}(\omega_{15}+\omega_{26})=\frac{2}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=-3)=\mathsf{P}(\omega_{14}+\omega_{25}+\omega_{36})=\frac{3}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=-2)=\mathsf{P}(\omega_{13}+\omega_{24}+\omega_{35}+\omega_{46})=\frac{4}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=-1)=\mathsf{P}(\omega_{12}+\omega_{23}+\omega_{34}+\omega_{45}+\omega_{56})=\frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=0)=\mathsf{P}(\omega_{11}+\omega_{22}+\omega_{33}+\omega_{44}+\omega_{55}+\omega_{66})=\frac{6}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=1)=\mathsf{P}(\omega_{21}+\omega_{32}+\omega_{43}+\omega_{54}+\omega_{65})=\frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=2)=\mathsf{P}(\omega_{31}+\omega_{42}+\omega_{53}+\omega_{64})=\frac{4}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=3)=\mathsf{P}(\omega_{41}+\omega_{52}+\omega_{63})=\frac{3}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=4)=\mathsf{P}(\omega_{51}+\omega_{62})=\frac{2}{36}$,
$\mathsf{P}(Z=5)=\mathsf{P}(\omega_{61})=\frac{1}{36}$.

Znači, traženi zakon raspodele je

$$Z:\begin{pmatrix} -5 & -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

(c) Skup vrednosti slučajne promenljive U je $\mathcal{R}_U=\{1,2,3,4,5,6\}$. Odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(U=1)=\mathsf{P}(\omega_{11})=\frac{1}{36}$,
$\mathsf{P}(U=2)=\mathsf{P}(\omega_{12}+\omega_{21}+\omega_{22})=\frac{3}{36}$,
$\mathsf{P}(U=3)=\mathsf{P}(\omega_{13}+\omega_{23}+\omega_{31}+\omega_{32}+\omega_{33})=\frac{5}{36}$,
$\mathsf{P}(U=4)=\mathsf{P}(\omega_{14}+\omega_{24}+\omega_{34}+\omega_{41}+\omega_{42}+\omega_{43}+\omega_{44})=\frac{7}{36}$,
$\mathsf{P}(U=5)=\mathsf{P}(\omega_{15}+\omega_{25}+\omega_{35}+\omega_{45}+\omega_{51}+\omega_{52}+\omega_{53}+\omega_{54}+\omega_{55})=\frac{9}{36}$,
$\mathsf{P}(U=6)=\mathsf{P}(\omega_{16}+\omega_{26}+\omega_{36}+\omega_{46}+\omega_{56}+\omega_{61}+\omega_{62}+\omega_{63}+\omega_{64}+\omega_{65}+\omega_{66})=\frac{11}{36}$,

pa je zakon raspodele slučajne promenljive $U:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{36} & \frac{3}{36} & \frac{5}{36} & \frac{7}{36} & \frac{9}{36} & \frac{11}{36} \end{pmatrix}$.

---

[93] *Strelac gađa metu. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je* 0.6.

(a) *Ako strelac na raspolaganju ima četiri metka, naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj ostvarenih pogodaka.*

(b) *Ako strelac na raspolaganju ima sto metaka, naći raspodelu slučajne promenljive Y koja predstavlja broj promašaja.*

(c) *Ako strelac gađa metu do prvog pogotka naći raspodelu slučajne promenljive U koja predstavlja broj ispaljenih metaka.*

(d) *Ako strelac gađa metu do prvog promašaja naći raspodelu slučajne promenljive V koja predstavlja broj ispaljenih metaka.*

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka imamo da je verovatnoća pogotka 0.6, a verovatnoća promašaja, kao suprotnog događaja, 0.4.

(a) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X = i) = \binom{4}{i} \cdot 0.6^i \cdot 0.4^{4-i}, \quad i \in \mathcal{R}_X$, tako da slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(4, 0.6)$ raspodelu.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(Y = i) = \binom{100}{i} \cdot 0.4^i \cdot 0.6^{100-i}, \quad i \in \mathcal{R}_Y$, tako da slučajna promenljiva Y ima binomnu $\mathcal{B}(100, 0.4)$ raspodelu.

(c) Skup vrednost slučajne promenljive U je $\mathcal{R}_U = \{1, 2, 3, \ldots\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(U = i) = 0.4^{i-1} \cdot 0.6, \quad i \in \mathcal{R}_U$, tako da slučajna promenljiva U ima geometrijsku $\mathcal{G}(0.6)$ raspodelu.

(d) Skup vrednost slučajne promenljive V je $\mathcal{R}_V = \{1, 2, 3, \ldots\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(V = i) = 0.6^{i-1} \cdot 0.4, \quad i \in \mathcal{R}_V$, tako da slučajna promenljiva V ima geometrijsku $\mathcal{G}(0.4)$ raspodelu.

---

[94] *Verovatnoća da student položi kolokvijum iz Statistike je* 0.75. *Pretpostavimo da studenti polažu kolokvijum nezavisno jedan od drugog.*

(a) *Ako na kolokvijum izađe* 250 *studenata naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj studenata koji će položiti kolokvijum. Izračunati verovatnoće događaja A-„kolokvijum će položiti 185 studenata " i B-„kolokvijum će položiti bar 7 studenata".*

(b) *Ako na kolokvijum izađe* 100 *studenata naći raspodelu slučajne promenljive Y koja predstavlja broj studenata koji neće položiti kolokvijum. Izračunati verovatnoće događaja C-„kolokvijum neće položiti 3 studenta " i D-„kolokvijum neće položiti bar 3 studenta".*

(c) *Ako asistent pregleda studentske radove dok jedan student ne položi naći raspodelu slučajne promenljive U koja predstavlja broj radova koje će asistent pregledati. Izračunati verovatnoće događaja E-„asistent će pregledati tačno pet radova " i F-„asistent će pregledati najviše pet radova".*

(d) *Ako asistent pregleda studentske radove dok jedan student ne padne naći raspodelu slučajne promenljive V koja predstavlja broj radova koje će asistent pregledati. Izračunati verovatnoće događaja G-„asistent će pregledati tačno dva rada ” i H-„asistent će pregledati bar dva rada”.*

Rešenje: Na osnovu uslova zadatka imamo da je verovatnoća da student položi kolokvijum 0.75, a verovatnoća da ne položi kolokvijum 0.25.

(a) Skup vrednosti slučajne promenljive X je $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2, \ldots, 250\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(X = i) = \binom{250}{i} \cdot 0.75^i \cdot 0.25^{250-i}$, $i \in \mathcal{R}_X$, tako da slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(250, 0.75)$ raspodelu. Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(A) = \mathsf{P}(X = 185) = \binom{250}{185} \cdot 0.75^{185} \cdot 0.25^{250-185} \approx 0.05376856$ i $\mathsf{P}(B) = \mathsf{P}(X \geq 7) = 1 - \mathsf{P}(X < 7) = 1 - \mathsf{P}(X = 0) - \mathsf{P}(X = 1) - \mathsf{P}(X = 2) - \mathsf{P}(X = 3) - \mathsf{P}(X = 4) - \mathsf{P}(X = 5) - \mathsf{P}(X = 6) = 1 - \binom{250}{0} \cdot 0.75^0 \cdot 0.25^{250-0} - \binom{250}{1} \cdot 0.75^1 \cdot 0.25^{250-1} - \binom{250}{2} \cdot 0.75^2 \cdot 0.25^{250-2} - \binom{250}{3} \cdot 0.75^3 \cdot 0.25^{250-3} - \binom{250}{4} \cdot 0.75^4 \cdot 0.25^{250-4} - \binom{250}{5} \cdot 0.75^5 \cdot 0.25^{250-5} - \binom{250}{6} \cdot 0.75^6 \cdot 0.25^{250-6} \approx 1$.

(b) Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 2, \ldots, 100\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(Y = i) = \binom{100}{i} \cdot 0.25^i \cdot 0.75^{100-i}$, $i \in \mathcal{R}_Y$, tako da slučajna promenljiva Y ima binomnu $\mathcal{B}(100, 0.25)$ raspodelu. Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(C) = \mathsf{P}(Y = 3) = \binom{100}{3} \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^{100-3} \approx 1.92076 \cdot 10^{-9}$ i $\mathsf{P}(D) = \mathsf{P}(Y \geq 3) = 1 - \mathsf{P}(Y < 3) = 1 - \mathsf{P}(Y = 0) - \mathsf{P}(Y = 1) - \mathsf{P}(Y = 2) = 1 - \binom{100}{0} \cdot 0.25^0 \cdot 0.75^{100-0} - \binom{100}{1} \cdot 0.25^1 \cdot 0.75^{100-1} - \binom{100}{2} \cdot 0.25^2 \cdot 0.75^{100-2} \approx 1$.

(c) Skup vrednost slučajne promenljive U je $\mathcal{R}_U = \{1, 2, 3, \ldots\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(U = i) = 0.25^{i-1} \cdot 0.75$, $i \in \mathcal{R}_U$, tako da slučajna promenljiva U ima geometrijsku $\mathcal{G}(0.75)$ raspodelu. Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(E) = \mathsf{P}(U = 5) = 0.25^{5-1} \cdot 0.75 \approx 0.002929688$ i $\mathsf{P}(F) = \mathsf{P}(U \leq 5) = \mathsf{P}(U = 1) + \mathsf{P}(U = 2) + \mathsf{P}(U = 3) + \mathsf{P}(U = 4) + \mathsf{P}(U = 5) = 0.25^{1-1} \cdot 0.75 + 0.25^{2-1} \cdot 0.75 + 0.25^{3-1} \cdot 0.75 + 0.25^{4-1} \cdot 0.75 + 0.25^{5-1} \cdot 0.75 \approx 0.999023438$.

(d) Skup vrednost slučajne promenljive V je $\mathcal{R}_V = \{1, 2, 3, \ldots\}$ pri čemu su odgovarajuće verovatnoće $\mathsf{P}(V = i) = 0.75^{i-1} \cdot 0.25$, $i \in \mathcal{R}_V$, tako da slučajna promenljiva V ima geometrijsku $\mathcal{G}(0.25)$ raspodelu. Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(G) = \mathsf{P}(V = 5) = 0.75^{5-1} \cdot 0.25 \approx 0.079101563$ i $\mathsf{P}(H) = \mathsf{P}(V \geq 2) = 1 - \mathsf{P}(V < 2) = 1 - \mathsf{P}(V = 1) = 1 - 0.75^{1-1} \cdot 0.25 = 0.25$.

---

[95] *Pretpostavimo da mali avioni pristižu na neki aerodrom u skladu sa Poasonovom raspodelom sa parametrom $\lambda = 8$ na sat.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će tačno pet aviona sleteti na aerodrom u toku jednog sata.*

(b) *Izračunati verovatnoću da će najmanje pet aviona sleteti na aerodrom u toku jednog sata.*

Rešenje: Slučajna promenljiva koja predstavlja broj aviona koji sleću na aerodrom u toku jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(8)$ raspodelu.

(a) Primenom (2.6) imamo $\mathsf{P}(X=5)=\frac{8^5}{5!}\cdot e^{-8}\approx 0.0916037.$

(b) Traženu verovatnoću ćemo izračunati preko verovatnoće suprotnog događaja i primenom (2.6)

$$\mathsf{P}(X\geq 5)=1-\mathsf{P}(X<5)=1-\sum_{i=0}^{4}\mathsf{P}(X=i)=$$
$$=1-(\tfrac{8^0}{0!}+\tfrac{8^1}{1!}+\tfrac{8^2}{2!}+\tfrac{8^3}{3!}+\tfrac{8^4}{4!})\cdot e^{-8}\approx 0.900368.$$

---

[96] *Pretpostavimo da broj telefonskuh poziva ima Poasonovu raspodelu sa parametrom $\lambda=2$ na sat.*

(a) *Izračunati verovatnoću da će u toku sata biti obavljeno tačno tri telefonska poziva.*

(b) *Izračunati verovatnoću da će u toku jednog sata biti obavljeno najviše dva telefonska poziva.*

(c) *Izračunati verovatnoću da će u toku jednog sata biti obavljeno najmanje dva telefonska poziva.*

Rešenje: Slučajna promenljiva koja predstavlja broj poziva u toku jednog sata ima Poasonovu $\mathcal{P}(2)$ raspodelu.

(a) Primenom (2.6) imamo $\mathsf{P}(X=3)=\frac{2^3}{3!}\cdot e^{-2}\approx 0,180447044.$

(b) Tražena verovatnoća je $\mathsf{P}(X\leq 2)=\mathsf{P}(X=0)+\mathsf{P}(X=1)+\mathsf{P}(X=2)=\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}+\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}+\frac{2^2}{2!}\cdot e^{-2}\approx 0,676676416.$

(c) Primenom definicije za računanje verovatnoće suprotnog događaja dobija se $\mathsf{P}(X\geq 2)=1-\mathsf{P}(X<2)=1-\mathsf{P}(X=0)-\mathsf{P}(X=1)=1-\frac{2^0}{0!}\cdot e^{-2}-\frac{2^1}{1!}\cdot e^{-2}\approx 0,59399415.$

---

[97] *Pretpostavimo da se prosečno* 20% *od ukupnog broja vozača zaustavi na raskrsnici na kojoj svetle crvena svetla na svim pravcima kada nema drugih vozila na vidiku. Na slučajan način je uočeno trideset vozača.*

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj vozača koji se zaustave na semaforu. Izračunati verovatnoću da se među posmatranim vozačima najviše njih pet zaustavilo na semaforu.*

(b) *Naći približnu raspodelu Y slučajne promenljive koja predstavlja broj vozača koji se zaustave na semaforu, a zatim pomoću nje izračunati verovatnoću da se među posmatranim vozačima najviše njih pet jeste zaustavilo na semaforu.*

Rešenje: Verovatnoća da se vozač zaustavi na semaforu je $p=0.2$, a da se ne zaustavi je $q=0.8$.

(a) Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(30, 0.2)$ raspodelu pa primenom (2.5) dobijamo da je tražena verovatnoća $\mathsf{P}(X \leq 5) = \sum\limits_{i=0}^{5} \mathsf{P}(X = i) = \sum\limits_{i=0}^{5} \binom{30}{i} 0.2^i \cdot 0.8^{30-i} \approx 0.427512$.

(b) Za $\lambda = 30 \cdot 0.2 = 6$ primenom (2.8) imamo da slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(6)$ raspodelu, pa primenom (2.6) imamo da je $\mathsf{P}(X \leq 5) = \sum\limits_{i=0}^{5} \mathsf{P}(X = i) = \sum\limits_{i=0}^{5} \frac{6^i}{i!} e^{-6} \approx 0.44568$.

---

[98] *Košarkaš gađa koš* 1000 *puta. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je* 0.005. *Naći raspodele slučajnih promenljivih X i Y koje predstavljaju redom tačan i približan broj promašaja.*

Rešenje: Verovatnoća promašaja je $p = 0.005$, a verovatnoća pogotka $q = 0.995$. Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(1000, 0.005)$ raspodelu i na osnovu (2.5) je

$$\mathsf{P}(X = i) = \binom{1000}{i} 0.005^i \cdot 0.995^{1000-i}, \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}.$$

Kako je $\lambda = 1000 \cdot 0.005 = 5$ na osnovu (2.8) imamo da se slučajna promenljiva X može aproksimirati Poasonovom slučajnom promenljivom tako da slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu i tada osnovu (2.6) važi

$$\mathsf{P}(Y = i) = \frac{5^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad i \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

2.2 Slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa

U odeljku 2.1 smo razmatrali slučajne promenljive diskretnog tipa kod kojih je skup vrednosti, $\mathcal{R}_X$, najviše prebrojiv. Skup vrednosti slučajne promenljive neprekidnog tipa, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, je neprebrojiv, tj. ona može uzimati vrednosti iz nekog intervala ili iz celog skupa realnih brojeva.

Funkcija gustine, φ_X, slučajne promenljive neprekidnog tipa je nenegativna realna funkcija sa sledećim osobinama:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = \mathsf{P}(-\infty < X < \infty) = 1, \tag{2.9}$$

$$\mathsf{P}(X = a) = 0, \text{ za } a \in \mathbb{R}, \tag{2.10}$$

za sve $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ važi da je

$$\mathsf{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.11}$$

Važi i sledeće

$$\mathsf{P}(a \leq X \leq b) = \mathsf{P}(a < X \leq b) = \mathsf{P}(a \leq X < b) = \int_{a}^{b} \varphi_X(x)\, dx. \tag{2.12}$$

Funkcija raspodele F_X neprekidne slučajne promenljive X je za svako $x \in \mathbb{R}$ data sa

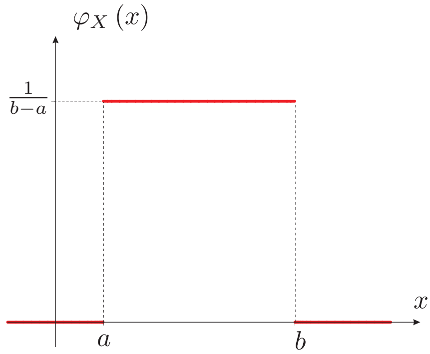
$$F_X(x) = \mathsf{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt, \tag{2.13}$$

i u tačkama neprekidnosti važi

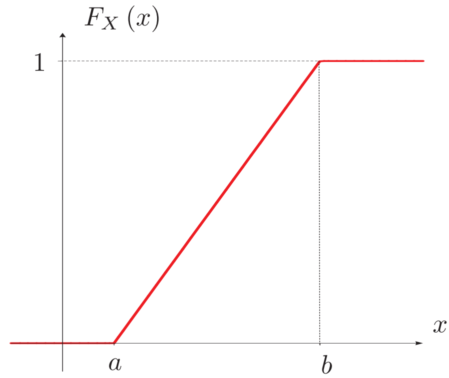
$$\varphi_X(x) = F'_X(x). \tag{2.14}$$

Slučajna promenljiva sa **uniformnom** $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelom, gde su a, $b \in \mathbb{R}$ i $a < b$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b); \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{2.15}$$



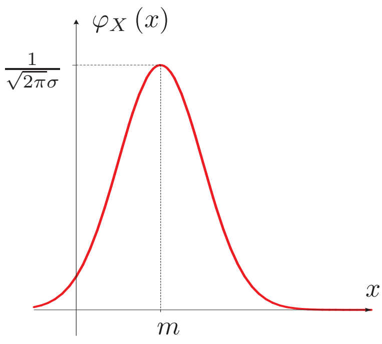
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a,b)$.



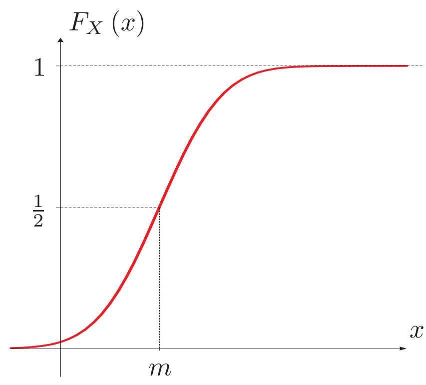
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{U}(a,b)$.

Slučajna promenljiva sa **normalnom** (Gausovom) $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelom, gde su $m, \sigma \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}; \qquad F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m,\sigma)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{N}(m,\sigma)$.

Napomena: **Standardizovana** (**normalizovana**) slučajna promenljiva X^* se dobija iz slučajne promenljive X transformacijom:[2]

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}; \tag{2.16}$$

ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu sa parametrima m i σ tada slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ ima normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu, tj. ako

[2]transformacije slučajnih promenljivih, matematičko očekivanje $E(X)$ i disperzija $D(X)$ definisani su u poglavlju V

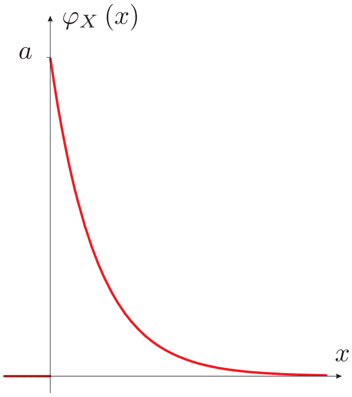
$$X : \mathcal{N}(m,\sigma) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-m}{\sigma} : \mathcal{N}(0,1); \tag{2.17}$$

na osnovu Moavr-Laplasove teoreme možemo zaključiti da raspodela standardizovane binomne slučajne promenljive X^* može biti aproksimirana normalnom raspodelom $\mathcal{N}(0,1)$, tj. ako

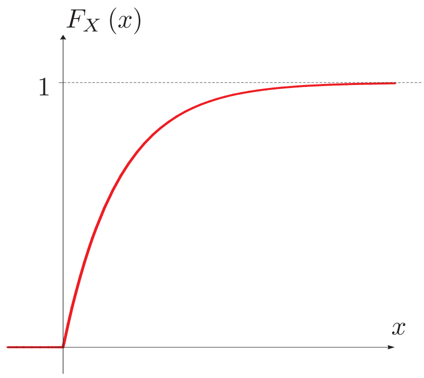
$$X : \mathcal{B}(n,p) \quad \text{tada} \quad X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0,1). \tag{2.18}$$

Slučajna promenljiva sa **eksponencijalnom** $\mathcal{E}(a)$ raspodelom, gde je $a > 0$, ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{2.19}$$



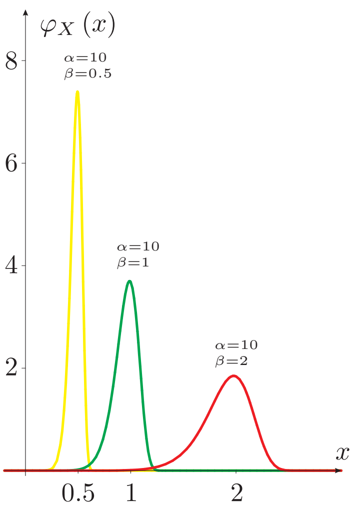
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(a)$.



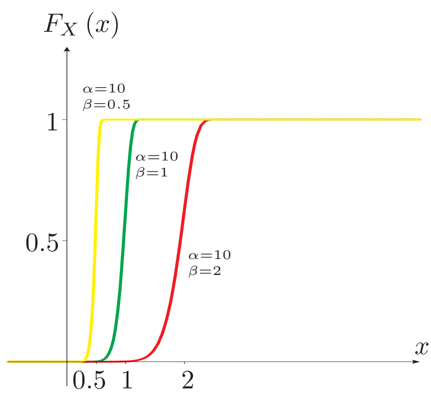
Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{E}(a)$.

Slučajna promenljiva sa **Vejbulovom** $\mathcal{V}(\alpha,\beta)$ raspodelom, sa parametrima $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ima gustinu i odgovarajuću funkciju raspodele

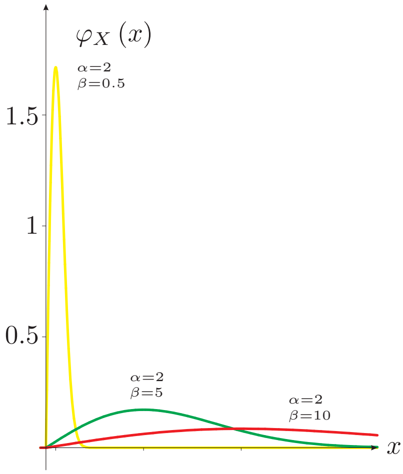
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0; \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-(\frac{x}{\beta})^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} \tag{2.20}$$



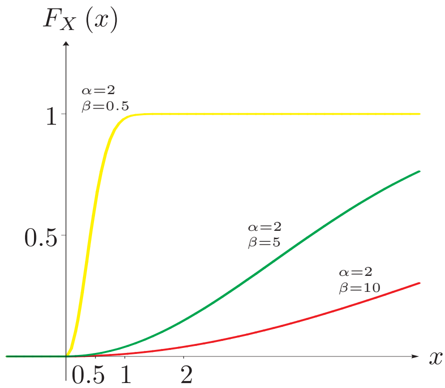
Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha,\beta)$.



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{V}(\alpha, \beta)$.

---

[99] *Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva X označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Izračunati $F_X(1.2)$, $F_X(-1)$, $F_X(3.5)$, a zatim naći funkciju raspodele $F_X(x)$ za svako $x \in \mathbb{R}$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?*

(c) *Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X \le 1)$, $\mathsf{P}(X > 1.5)$ i $\mathsf{P}(X = 1)$.*

(d) *Grafički predstaviti funkciju gustine φ_X i funkciju raspodele F_X.*

Rešenje:

(a) Direktnom primenom formule (2.13), dobija se

$$F_X(1.2) = \int_{-\infty}^{1.2} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1.2} \frac{1}{2}x\, dx = 0 + \frac{1}{4}x^2\Big|_0^{1.2} = 0.36.$$

Analogno sledi $F_X(-1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\, dx = 0,$

kao i $F_X(3.5) = \displaystyle\int_{-\infty}^{3.5} \varphi_X(x)\, dx = \int_{0}^{2} \frac{1}{2}x\, dx = 1.$

Za pronalaženje funkcije raspodele, razmotrićemo sledeća tri slučaja:
i) Za $x \le 0$, važi da je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0.$$

ii) Za fiksirano x iz intervala $(0,2]$, tj. ako je $0 < x \leq 2$, dobija se

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\, t\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2 \Big|_0^x = \frac{1}{4}x^2$$

iii) Ako je $x > 2$, dobijamo

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{2} \frac{1}{2}\, t\, dt + \int_{2}^{x} 0\, dt = 0 + \frac{1}{4}\, t^2 \Big|_0^2 + 0 = 1.$$

Konačno, iz i), ii) i iii) dobija se

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

(b) Verovatnoća događaja da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena je verovatnoća da slučajna promenjiva X uzima vrednosti između 1 i 1.5. Na osnovu (2.12) dobija se

$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = \int_{1}^{1.5} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_1^{1.5} = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

Primetimo da isti rezultat možemo dobiti i pomoću funkcije raspodele F_X određene pod (a), tj.

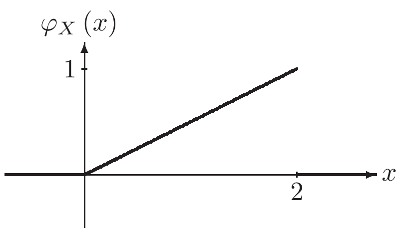
$$\mathsf{P}(1 \leq X \leq 1.5) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{(1.5)^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 0.3125.$$

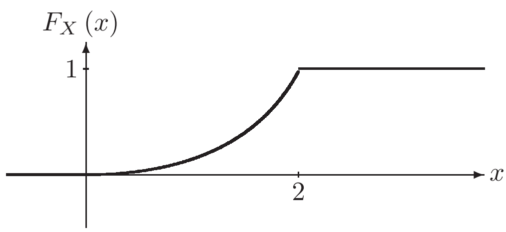
(c) Na osnovu (2.12), dobija se

$$\mathsf{P}(X \leq 1) = \int_{-\infty}^{1} \varphi_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\, x\, dx = 0 + \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25.$$

Traženu verovatnoću možemo izračunati i ovako: $\mathsf{P}(X \leq 1) = \mathsf{P}(X < 1) = F_X(1) = \frac{1}{4}$.
Slično, $\mathsf{P}(X > 1.5) = \displaystyle\int_{1.5}^{2} \frac{1}{2}\, x\, dx = \frac{1}{4}\, x^2 \Big|_{1.5}^{2} = 1 - 0.5625 = 0.4375$ ili pomoću funkcije raspodele $\mathsf{P}(X > 1.5) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 1.5) = 1 - F_X(1.5) = 1 - \dfrac{1.5^2}{4} = 0.4375$.
Na osnovu osobine gustine (2.10), koja je zadovoljena za svaki realan broj a, dobija se da je $\mathsf{P}(X = 1) = 0$.

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





[100] *Profesor nikada ne završi čas pre zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka X predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za X data je sa*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k.*

(b) *Naći funkciju raspodele za X.*

(c) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?*

(d) *Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?*

Rešenje:

(a) Konstantu k određujemo tako da bude zadovoljena osobina (2.9). Prema tome,

$$\int_0^1 kx^2\,dx = k\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{k}{3} = 1,$$

a odavde sledi da je tražena konstanta $k = 3$.

(b) Za fiksirano x, $x \le 0$ funkcija raspodele je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$. Neka je $x \in (0,1]$. Tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_0^x 3t^2\,dt = t^3\big|_0^x = x^3$. Ako je $x > 1$ dobija se $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_0^1 3t^2\,dt = 1$. Dakle, funkcija raspodele F_X slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(c) Verovatnoća događaja da će čas biti produžen najduže pola minute je verovatnoća da slučajna promenljiva X uzme vrednost manju ili jednaku 0.5. Dakle,

$$\mathsf{P}(X \le 0.5) = \int_{-\infty}^{0.5} \varphi_X(x)\,dx = \int_0^{0.5} 3x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0.5} = 0.125.$$

Do istog rezultata dolazimo i ako iskoristimo rešenje pod (b), odnosno

$$\mathsf{P}(X \le 0.5) = \mathsf{P}(X < 0.5) = F_X(0.5) = 0.5^3 = 0.125.$$

(d) Događaj da je čas produžen više od 40 sekundi podrazumeva da slučajna promenljiva X uzme vrednost strogo veću od $\frac{2}{3}$. Njegova verovatnoća je

$$\mathsf{P}(X > 2/3) = \int_{2/3}^{1} 3x^2\,dx = x^3\big|_{2/3}^{1} = 1 - (2/3)^3 = 0.7037.$$

Primetimo da pomoću funkcije raspodele dolazimo do istog rezultata $\mathsf{P}(X > 2/3) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 2/3) = 1 - F_X(2/3) = 1 - (2/3)^3 = 0.7037$.

---

[101] *Slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} k(1-(x-3)^2), & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu k i skicirati grafik funkcije φ_X.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(2.5 < X < 3)$ *i* $\mathsf{P}(X > 3)$.

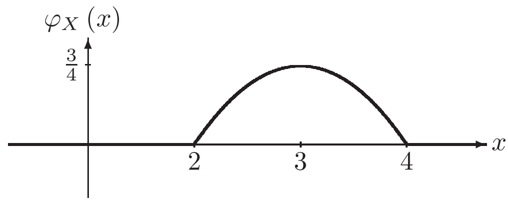
(c) *Odrediti funkciju raspodele F_X i skicirati njen grafik.*

Rešenje:

(a) Konstanta k se određuje iz uslova (2.9). Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\,dx = \int_2^4 k(1-(x-3)^2)\,dx = k\int_2^4 (-8+6x-x^2)\,dx =$$
$$= k\left(-8x+3x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^4 = \frac{4}{3}k,$$

iz uslova dobijamo da je tražena konstanta $k = \frac{3}{4}$. Grafik funkcije gustine φ_X je



(b) Slično kao u prethodnom zadatku možemo dobiti tražene verovatnoće

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(2.5 < X < 3) &= \int_{2.5}^{3} \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx = \left\{ \begin{array}{rr} \text{smena} & x-3=t, \\ & dx = dt \end{array} \right\} \\ &= \int_{-0.5}^{0} \frac{3}{4}(1-t^2)\,dt = \left(\frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^3\right)\Bigg|_{-0.5}^{0} = 0.34375. \end{aligned}$$

Dalje, $\mathsf{P}(X > 3) = \displaystyle\int_3^4 \frac{3}{4}(1-(x-3)^2)\,dx$. Integral sa desne strane jednakosti može se rešiti uvođenjem smene $x-3=t$ i njegovim izračunavanjem dobijamo da je tražena verovatnoća 0.5.

(c) Za $x \leq 2$ je $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$,

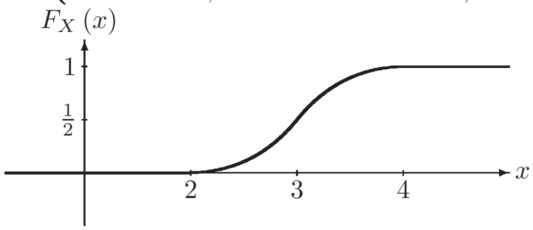
a za $x > 4$ je $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \int_2^4 \frac{3}{4}(1-(t-3)^2)\,dt + \int_4^x 0\,dt = 1$.

Posmatrajmo $x \in (2,4]$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{2} 0\,dt + \frac{3}{4}\int_{2}^{x} (-8+6t-t^2)\,dt = \\ &= \frac{3}{4}(-8t+3t^2-\frac{1}{3}t^3)\Big|_2^x = \frac{3}{4}(\frac{20}{3} - 8x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}) \end{aligned}$$

Dakle, funkcija raspodele i njen grafik su

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ -\frac{x^3}{4} + \frac{9}{4}x^2 - 6x + 5, & 2 < x \le 4, \\ 1, & x > 4, \end{cases}$$



---

[102] *Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata" autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva X predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \le x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \le x \le 10, \\ 0, & x \notin [0,10]. \end{cases}$$

(a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta?

(b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti" između 3 i 8 minuta?

(c) Naći funkciju raspodele F_X.

(d) Grafički predstaviti funkcije φ_X i F_X, a zatim obeležiti $\mathsf{P}(X < 6)$.

Rešenje:

(a) Verovatnoća događaja da će na čekanje „izgubiti" više od 6 minuta je

$$\mathsf{P}(X > 6) = \int_6^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x)\,dx = (\frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2)\Big|_6^{10} = 0.32.$$

(b) Uočimo da je gustina različito definisana na intervalima $[0,5)$ i $[5,10]$, a zatim slično kao pod (a), dobijamo da je tražena verovatnoća

$$\mathsf{P}(3 \le X \le 8) = \int_3^8 \varphi_X(x)\,dx = \int_3^5 \frac{1}{25}x\,dx + \int_5^8 (\frac{2}{5} - \frac{1}{25}x)\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{50}\Big|_3^5 + (\frac{2x}{5} - \frac{x^2}{50})\Big|_5^8 = 0.74$$

(c) Za $x \leq 0$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0$.

Ako je $x > 10$ tada je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\, dt + \int_{5}^{10} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25} t)\, dt + \int_{10}^{x} 0\, dt = 1$.

Za $x \in (0, 5]$ je $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{25} t\, dt = \frac{x^2}{50}$.

Ako je $x \in (5, 10]$ tada je

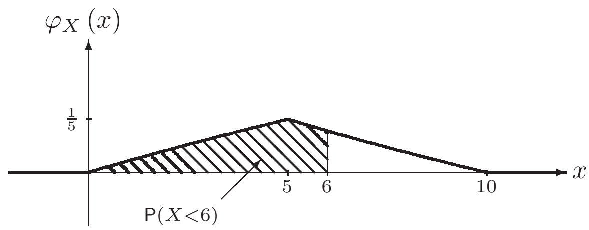
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\, dt + \int_{0}^{5} \frac{1}{25} t\, dt + \int_{5}^{x} (\frac{2}{5} - \frac{1}{25} t)\, dt =$$

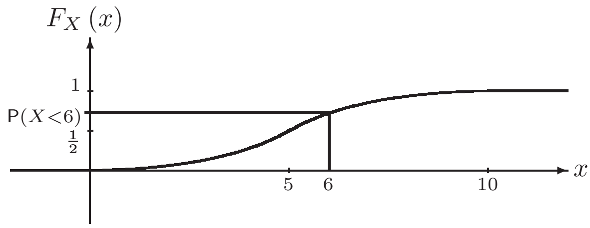
$$= \left.\frac{t^2}{50}\right|_0^5 + \left.(\frac{2t}{5} - \frac{t^2}{50})\right|_5^x = -1 + \frac{2}{5}x - \frac{1}{50}x^2.$$

Dakle, funkcija raspodele je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{50}, & 0 < x \leq 5, \\ -\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x - 1, & 5 < x \leq 10, \\ 1, & x > 10. \end{cases}$$

(d) Grafici gustine φ_X i funkcije raspodele F_X su:





---

[103] *Neprekidna slučajna promenljiva data je funkcijom raspodele*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{4}(1 + \ln \frac{4}{x}), & 0 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

(a) *Naći funkciju gustine za* X.

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(X \leq 1)$ *i* $\mathsf{P}(1 < X \leq 3)$.

Rešenje:

(a) Kako je poznata funkcija raspodele F_X, gustinu ćemo naći pomoću relacije (2.14), koja važi u svim tačkama u kojima je gustina neprekidna. Za $x \in (0,4]$ je

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{x}{4}(1+\ln\frac{4}{x})\right)' = \frac{1}{4}(1+\ln\frac{4}{x}) + \frac{x}{4}\cdot\frac{x}{4}\cdot(-\frac{4}{x^2}) = \frac{1}{4}(1+\ln\frac{4}{x}) - \frac{1}{4}$$

Dakle,

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\ln\frac{4}{x}, & x \in (0,4] \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) Po definiciji funkcije raspodele je $\mathsf{P}(X \leq 1) = F_X(1) = \dfrac{1}{4}(1+\ln 4)$. Slično je $\mathsf{P}(1 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1) = \dfrac{3}{4}\left(1+\ln\dfrac{4}{3}\right) - \dfrac{1}{4}(1+\ln 4) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{16}{27} \approx 0.37.$

---

[104] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je funkcijom raspodele:*

$$F_X(x) = \begin{cases} b, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & 1 < x \leq 4, \\ 3a, & x > 4. \end{cases}$$

Odrediti konstante a i b i naći gustinu za X.

Rešenje: Konstante a i b određujemo na osnovu osobina $\lim\limits_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a = 1$, dakle $a = \frac{1}{3}$ i $b = 0$.
Koristeći (2.14) dobijamo za $x \in (1,4]$

$$\varphi_X(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{27}\right)' = \frac{3(x-1)^2}{27} = \frac{(x-1)^2}{9},$$

te je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2}{9}, & x \in (1,4], \\ 0, & x \notin (1,4]. \end{cases}$$

---

[105] *Neka je X vreme (izraženo u satima) između dolaska dva klijenta u banku i neka X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$.*

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive X. Na grafiku funkcije gustine predstaviti $\mathsf{P}(X \geq 0.2)$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će između dolaska dva klijenta proteći najviše 30 minuta?*

(c) *Izračunati $\mathsf{P}(0.4 \leq X \leq 1)$ i $\mathsf{P}(X \geq 0.2)$.*

Rešenje:

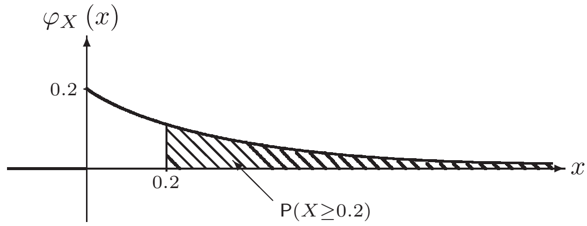
(a) Kako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom $a = 0.2$, tj. $X : \mathcal{E}(0.2)$, njena funkcija raspodele je

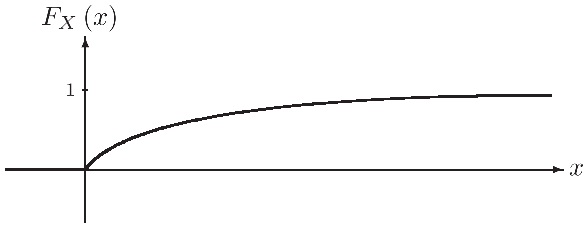
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-0.2x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Gustina slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0.2e^{-0.2x}, & x > 0, \end{cases}$$

a grafici funkcija φ_X i F_X su





(b) Verovatnoća traženog događaja je

$\mathsf{P}(X \leq 0.5) = F_X(0.5) = 1 - e^{-0.2 \cdot 0.5} = 1 - e^{-0.1} = 1 - 0.9048 = 0.0952.$

(c) Na osnovu (2.13) i (2.12) dobijamo da je

$\mathsf{P}(0.4 \leq X \leq 1) = F_X(1) - F_X(0.4) = 1 - e^{-0.2 \cdot 1} - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.4}) =$
$= e^{-0.08} - e^{-0.2} = 0.9231 - 0.8187 = 0.1044,$

$\mathsf{P}(X \geq 0.2) = 1 - \mathsf{P}(X < 0.2) = 1 - F_X(0.2) = 1 - (1 - e^{-0.2 \cdot 0.2}) =$
$= e^{-0.04} = 0.9608.$

---

[106] *Slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu raspodelu, $X : \mathcal{E}(1)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(-2)$, $F_X(4)$, $\mathsf{P}(|X| \leq 3)$ i $\mathsf{P}(0.2 \leq 2X - 1 < 7)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ e^{-x}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}, & x > 0, \end{cases}$$

(b) $F_X(-2) = 0$, $F_X(4) = 1 - e^{-4} \approx 0.9817$, a tražene verovatnoće su
$\mathsf{P}(|X| \leq 3) = \mathsf{P}(-3 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(-3) = 1 - e^{-3} - 0 \approx 0.95$,
$\mathsf{P}(0.2 \leq 2X - 1 < 7) = \mathsf{P}(1.2 \leq 2X < 8) = \mathsf{P}(0.6 \leq X < 4) = F_X(4) - F_X(0.6) =$
$$= 1 - e^{-4} - (1 - e^{-0.6}) \approx 0.9817 - 0.4512 = 0.5305.$$

---

[107] *Slučajna promenljva Y koja predstavlja kašnjenje voza (izraženo u satima) ima uniformnu raspodelu, $Y : \mathcal{U}(0, 2)$.*

(a) *Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive Y. Na grafiku funkcije gustine predstaviti $\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8)$.*

(b) *Kolika je verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta?*

(c) *Izračunati $\mathsf{P}(Y \leq 0.5)$, $\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8)$ i $\mathsf{P}(Y \geq 1.7)$.*

Rešenje:

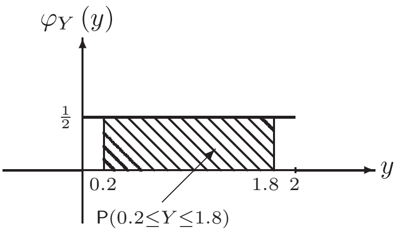
(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive Y je

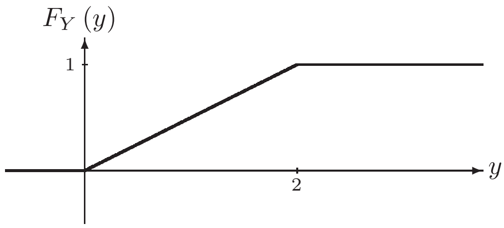
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y}{2}, & 0 < y \leq 2, \\ 1, & y > 2, \end{cases}$$

a njena gustina je

$$\varphi_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (0, 2) \\ \frac{1}{2}, & y \in (0, 2) \end{cases}.$$

Grafici ove dve funkcije su





(b) Verovatnoća da će voz kasniti bar 45 minuta je
$\mathsf{P}(Y \geq \frac{3}{4}) = 1 - \mathsf{P}(Y < \frac{3}{4}) = 1 - F_Y\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{3}{8} = 0.625.$

(c) Tražene verovatnoće su $\mathsf{P}(Y \leq 0.5) = F_Y(0.5) = \frac{0.5}{2} = 0.25$.
$\mathsf{P}(0.2 \leq Y \leq 1.8) = F_Y(1.8) - F_Y(0.2) = \frac{1.8}{2} - \frac{0.2}{2} = 0.8$,
dok je $\mathsf{P}(Y \geq 1.7) = 1 - \mathsf{P}(Y < 1.7) = 1 - F_Y(1.7) = 1 - \frac{1.7}{2} = 0.15$.

---

[108] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu raspodelu, $X : \mathcal{U}(-3; 5)$.*

(a) *Odrediti funkciju raspodele i gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Izračunati $F_X(0)$, $\mathsf{P}(|X - 3| \leq 5)$ i $\mathsf{P}(1 < 2 - X < 10)$.*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-3;5), \\ \frac{1}{8}, & x \in (-3;5), \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -3, \\ \frac{x+3}{8}, & -3 < x \leq 5, \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(b) $F_X(0) = \frac{0+3}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$, a tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(|X-3| \leq 5) = \mathsf{P}(-5 \leq X-3 \leq 5) = \mathsf{P}(-2 \leq X \leq 8) = F_X(8) - F_X(-2) =$$
$$= 1 - \frac{-2+3}{8} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875,$$
$$\mathsf{P}(1 < 2-X < 10) = \mathsf{P}(-1 < -X < 8) = \mathsf{P}(-8 < X < 1) = F_X(1) - F_X(-8) =$$
$$= \frac{1+3}{8} - 0 = \frac{1}{2} = 0.5.$$

---

[109] *Slučajna promenljiva X predstavlja dužinu rada motora izraženu u hiljadama sati. Neka X ima Vejbulovu raspodelu sa parametrima $\alpha = 2$ i $\beta = 2$.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi bar 6 hiljada sati?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati?*

Rešenje:

(a) Funkcija gustine φ_X i funkcija raspodele F_X su

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}xe^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-(\frac{x}{2})^2}, & x > 0, \end{cases}$$

Tražena verovatnoća je

$\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 6) = 1 - F_X(6) = 1 - (1 - e^{-9}) = 0.999877.$

(b) Verovatnoća događaja da će motor raditi između 2 i 3 hiljade sati je

$\mathsf{P}(2 \leq X \leq 3) = F_X(3) - F_X(2) = 1 - e^{-\frac{9}{4}} - (1 - e^{-1}) = 0.2624802.$

---

[110] *Neka slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Izračunati sledeće verovatnoće:*

(a) $\mathsf{P}(Z \leq 2.17)$ (b) $\mathsf{P}(0 \leq Z \leq 1)$ (c) $\mathsf{P}(-2.5 \leq Z)$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \leq Z \leq 2.17)$ (e) $\mathsf{P}(-0.4 \leq Z \leq 1)$ (f) $\mathsf{P}(-2 \leq Z < 1.1)$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \leq 1.2)$ (h) $\mathsf{P}(Z \leq 4.4)$ (j) $\mathsf{P}(Z \leq -1.01)$

Rešenje:

Prilikom rešavanja ovog i narednih zadataka korišćene su statističke tablice normalne raspodele $\mathcal{N}(0,1)$ (vidi [8]). Takođe se koriste i sledeće osobine funkcije raspodele $\Phi(x)$ slučajne promenljive sa normalnom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom:

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ kao i $\Phi(|Z| < x) = 2\Phi(x) - 1$.

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}\, dt$

x	...	0.07	...
$\vdots$		$\downarrow$	
2.1	$\rightarrow$	0.985	
$\vdots$			

Dakle, $\Phi(2.17) = 0.985$.

(a) $\mathsf{P}(Z \le 2.17) = \Phi(2.17) = 0.985.$

(b) $\mathsf{P}(0 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(0) = 0.8413 - 0.5 = 0.3413.$

(c) $\mathsf{P}(-2.5 \le Z) = 1 - \mathsf{P}(Z < -2.5) = 1 - \Phi(-2.5) = 1 - (1 - \Phi(2.5)) =$
$= \Phi(2.5) = 0.9938.$

(d) $\mathsf{P}(1.3 \le Z \le 2.17) = \Phi(2.17) - \Phi(1.3) = 0.985 - 0.9032 = 0.0818.$

(e) $\mathsf{P}(-0.4 \le Z \le 1) = \Phi(1) - \Phi(-0.4) = \Phi(1) - (1 - \Phi(0.4)) = \Phi(1) + \Phi(0.4) - 1 =$
$= 0.8413 + 0.6554 - 1 = 0.4967.$

(f) $\mathsf{P}(-2 \le Z < 1.1) = \Phi(1.1) - \Phi(-2) = \Phi(1.1) - (1 - \Phi(2)) = \Phi(1.1) + \Phi(2) - 1 =$
$= 0.8643 + 0.9772 - 1 = 0.8415$

(g) $\mathsf{P}(|Z| \le 1.2) = \mathsf{P}(-1.2 \le Z \le 1.2) = \Phi(1.2) - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) - (1 - \Phi(1.2)) =$
$= 2\Phi(1.2) - 1 = 2 \cdot 0.8849 - 1 = 0.7698.$

(h) $\mathsf{P}(Z \le 4.4) = \Phi(4.4) \approx 1$

(j) $\mathsf{P}(Z \le -1.01) = \Phi(-1.01) = 1 - \Phi(1.01) = 1 - 0.8438 = 0.1562.$

---

[111] *Slučajna promenljiva Z ima standardizovanu normalnu raspodelu. Odrediti c tako da važe jednakosti:*

(a) $\Phi(c) = 0.9838$ (b) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.6718$ (c) $\mathsf{P}(c \le Z) = 0.121$

(d) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.1231$ (e) $\mathsf{P}(-c \le Z \le c) = 0.668$ (f) $\mathsf{P}(|Z| \le c) = 0.6542$

Rešenje:

(a) $\Phi(c) = 0.9838 \;\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.9838) = 2.14$

(b) $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.6718 \;\Rightarrow$
$c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$

(c) $\mathsf{P}(c \le Z) = 0.121 \;\Rightarrow$
$1 - \mathsf{P}(Z < c) = 0.121 \;\Rightarrow$
$1 - \Phi(c) = 0.121 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.879 \;\Rightarrow$
$c = \Phi^{-1}(0.879) = 1.17.$

x	$\dots$	0.04	0.05	$\dots$
$\vdots$		$\uparrow$	$\uparrow$	
0.4	$\leftarrow$	0.6700	0.6736	
$\vdots$				

Dakle, $c = \Phi^{-1}(0.6718) = 0.445$, kao aritmetička sredina brojeva 0.44 i 0.45.

(d) Kako vrednost funkcije raspodele 0.1231 ne pronalazimo u tablicama ni za jedno c, koristićemo činjenicu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$, dakle : $\mathsf{P}(Z \le c) = 0.1231$
$\Rightarrow\; \Phi(c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; 1 - \Phi(-c) = 0.1231 \;\Rightarrow\; \Phi(-c) = 0.8769$
$\Rightarrow\; -c = \Phi^{-1}(0.8769) = 1.16 \;\Rightarrow\; c = -1.16.$

(e) $\mathsf{P}(-c \le Z \le c) = 0.668 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.668 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.668}{2}$
$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.834) = 0.97.$

(f) $\mathsf{P}(|Z| \le c) = 0.6542 \;\Rightarrow\; 2\Phi(c) - 1 = 0.6542 \;\Rightarrow\; \Phi(c) = \frac{1.6542}{2}$
$\Rightarrow\; c = \Phi^{-1}(0.8271) = 0.945.$

---

[112] *Slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(80, 10)$. Izračunati verovatnoće $\mathsf{P}(X \le 100)$, $\mathsf{P}(70 \le X)$, $\mathsf{P}(65 \le X \le 100)$ i $\mathsf{P}(|X - 80| \le 10)$.*

Rešenje:

$X : \mathcal{N}(80, 10) \;\Rightarrow\; X^* = \frac{X-80}{10} : \mathcal{N}(0, 1).$

$\mathsf{P}(X \leq 100) = \mathsf{P}(\frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(X^* \leq 2) = \Phi(2) = 0.9773.$
$\mathsf{P}(70 \leq X) = \mathsf{P}(\frac{70-80}{10} \leq \frac{X-80}{10}) = \mathsf{P}(-1 \leq X^*) = 1 - \mathsf{P}(X^* < -1) =$
$= 1 - \Phi(-1) = 1 - (1 - \Phi(1)) = 0.8413.$
$\mathsf{P}(65 \leq X \leq 100) = \mathsf{P}(\frac{65-80}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{100-80}{10}) = \mathsf{P}(-1.5 \leq X^* \leq 2) =$
$= \Phi(2) - \Phi(-1.5) = 0.9773 + 0.9332 - 1 = 0.9105.$
$\mathsf{P}(|X - 80| \leq 10) = \mathsf{P}(-10 \leq X - 80 \leq 10) = \mathsf{P}(-\frac{10}{10} \leq \frac{X-80}{10} \leq \frac{10}{10}) =$
$= \mathsf{P}(-1 \leq X^* \leq 1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$

---

[113] *Pretpostavimo da pH vrednost zemljišta jednog regiona ima normalnu raspodelu sa* $m = 6$ *i* $\sigma = 0.1$*. Ako je sa tog područja uzet jedan uzorak zemljišta, naći verovatnoću da uzeti uzorak ima pH vrednost*

(a) *između 5.9 i 6.15,*

(b) *veću od 6,*

(c) *najviše 5.95.*

Rešenje:

Obeležimo sa X slučajnu promenljivu koja predstavlja pH vrednost zemljišta. Kako X ima normalnu raspodelu $X : \mathcal{N}(6, 0.1)$ to $X^* = \frac{X-6}{0.1} : \mathcal{N}(0, 1)$.
(a) $\mathsf{P}(5.9 \leq X \leq 6.15) = \mathsf{P}(\frac{5.9-6}{0.1} \leq \frac{X-6}{0.1} \leq \frac{6.15-6}{0.1}) = \mathsf{P}(-1 \leq X^* \leq 1.5) =$
$= \Phi(1.5) - \Phi(-1) = \Phi(1.5) - (1 - \Phi(1)) =$
$= 0.9332 + 0.8413 - 1 = 0.7745.$
(b) $\mathsf{P}(X > 6) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 6) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-6}{0.1} \leq \frac{6-6}{0.1}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$
(c) $\mathsf{P}(X \leq 5.95) = \mathsf{P}(X^* \leq \frac{5.95-6}{0.1}) = \mathsf{P}(X^* \leq -0.5) = \Phi(-0.5) =$
$= 1 - \Phi(0.5) = 1 - 0.6915 = 0.3085.$

---

[114] *Neka* X *ima binomnu raspodelu* $\mathcal{B}(25, 0.6)$*. Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X \leq 15)$*,* $\mathsf{P}(20 \leq X)$ *i* $\mathsf{P}(10 \leq X \leq 22)$ *koristeći aproksimaciju binomne raspodele normalnom raspodelom.*

Rešenje:

$X : \mathcal{B}(25, 0.6) \quad n \cdot p = 25 \cdot 0.6 = 15, \ \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{25 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \sqrt{6},$
$\rightarrow \ X^* = \frac{X-15}{\sqrt{6}} : \mathcal{N}(0, 1).$
$\mathsf{P}(X \leq 15) = \mathsf{P}(\frac{X-15}{\sqrt{6}} \leq \frac{15-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(X^* \leq 0) = \Phi(0) = 0.5.$
$\mathsf{P}(20 \leq X) = 1 - \mathsf{P}(X < 20) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{20-15}{\sqrt{6}}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 2.04124) =$
$= 1 - \Phi(2.04) = 1 - 0.9793 = 0.0207.$
$\mathsf{P}(10 \leq X \leq 22) = \mathsf{P}(\frac{10-15}{\sqrt{6}} \leq X^* \leq \frac{22-15}{\sqrt{6}}) = \mathsf{P}(-2.04124 \leq X^* \leq 2.8577) =$
$= \Phi(2.86) - \Phi(-2.04) = 0.9979 + 0.9793 - 1 = 0.9772.$

[115] *Dinar se baca 400 puta. Naći zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj palih pisama. Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoće*

(a) *da će broj palih pisama biti veći od broja palih grbova,*

(b) *da će broj palih pisama biti najviše 185.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(400, \frac{1}{2})$, $n \cdot p = 400 \cdot \frac{1}{2} = 200$, $\sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{400 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{100} = 10$, , tako da $X^* = \frac{X-200}{10} : \mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 200) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 200) = 1 - \mathsf{P}(X^* < \frac{200-200}{10}) = 1 - \mathsf{P}(X^* < 0) =$
$= 1 - \Phi(0) = 0.5,$

(b) $\mathsf{P}(X \leq 185) = \mathsf{P}(X^* \leq \frac{185-200}{10}) = \mathsf{P}(X^* \leq -1.5) = \Phi(-1.5) = 1 - \Phi(1.5) =$
$= 0.0668.$

---

[116] *Prosečno 4 % proizvoda je škart. Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj ispravnih proizvoda od 150 posmatranih. Koristeći Moavr-Laplasovu teoremu izračunati verovatnoću*

(a) *da će više od 140 proizvoda biti ispravno,*

(b) *da će više od 5 proizvoda biti neispravno.*

Rešenje: Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj ispravnih proizvoda ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(150, 0.96)$, $p = 0.96$, $q = 0.04$, $n = 150$, pa je $np = 144$, $\sqrt{npq} = \sqrt{5.76} = 2.4$. Na osnovu Moavr-Laplasove teoreme $X^* = \frac{X-144}{2.4}$ ima standardizovanu normalnu raspodelu, tj. $\mathcal{N}(0,1)$.

(a) $\mathsf{P}(X > 140) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 140) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-144}{2.4} \leq \frac{140-144}{2.4}) \approx 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -1.67) =$
$= 1 - \Phi(-1.67) = \Phi(1.67) = 0.9525.$

(b) Primetimo da ako je X broj ispravnih proizvoda tada je $150 - X$ broj neispravnih proizvoda i obrnuto. Zaključujemo da je događaj A – „ više od 5 proizvoda je neispravno" jednak događaju B – „ manje od 145 proizvoda je ispravno", tj. $A = B$. Dakle,
$\mathsf{P}(150 - X > 5) = \mathsf{P}(X < 145) = \mathsf{P}(X^* < \frac{145-144}{2.4}) \approx \mathsf{P}(X^* < 2.08) = \Phi(2.08) =$ 09812.

---

[117] *Prosečno sedamdeset posto studenata traži konsultacije za vreme rada u računskom centru. Neka je u toku dana 100 studenata radilo u računskom centru.*

(a) *Kolika je verovatnoća da će više od polovine broja studenata tražiti konsultacije?*

(b) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti manji od 72?*

(c) *Kolika je verovatnoća da će broj studenata sa pitanjima biti između 70 i 80?*

Rešenje:
$p = 0.7,\ n = 100,\ np = 70,\ \sqrt{npq} = \sqrt{21},\ X : \mathcal{B}(100, 0.7)\ \Rightarrow\ X^* = \frac{X-70}{4.58} : \mathcal{N}(0,1).$
(a) $\mathsf{P}(X > 50) = 1 - \mathsf{P}(X \leq 50) = 1 - \mathsf{P}(\frac{X-70}{4.58} \leq \frac{50-70}{4.58}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -4.3668) =$
$= 1 - \Phi(-4.3668) = \Phi(4.3668) \approx 1.$
(b) $\mathsf{P}(X < 72) = \mathsf{P}(X^* < \frac{72-70}{4.58}) = \mathsf{P}(X^* < 0.436681) = \Phi(0.436681) = 0.668$
(c) $\mathsf{P}(70 \leq X^* \leq 80) = \mathsf{P}(\frac{70-70}{4.58} \leq \frac{X-70}{4.58} \leq \frac{80-70}{4.58}) = \mathsf{P}(0 \leq X^* \leq 2.18341) =$
$= \Phi(2.18341) - \Phi(0) = 0.9854 - 0.5 = 0.4854.$

---

[118] *Prosečno 80% vozača koristi sigurnosni pojas. Saobraćajna policija je u toku dana zaustavila 500 vozača.*

(a) Kolika je verovatnoća da više od 100 vozača ne koristi pojas?

(b) Kolika je verovatnoća da bar 300 vozača koristi pojas?

(c) Kolika je verovatnoća da je broj vozača koji ne koriste pojas između 100 i 150?

Rešenje:
Slučajna promenljiva X koja predstavlja broj vozača koji koriste sigurnosni pojas ima binomnu raspodelu sa parametrima $n = 500$ i $p = 0.8$. Kako je $np = 400$, $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.8 \cdot 0.2} = \sqrt{80} = 8.944$ i $X : \mathcal{B}(500, 0.8)$ sledi $X^* = \frac{X-400}{8.944} : \mathcal{N}(0,1)$.
(a) $\mathsf{P}(500 - X > 100) = \mathsf{P}(X < 400) = \mathsf{P}(X^* < \frac{400-400}{8.944}) = \mathsf{P}(X^* < 0) = \Phi(0) = 0.5.$
(b) $\mathsf{P}(X \geq 300) = 1 - \mathsf{P}(X < 300) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq \frac{300-400}{8.944}) = 1 - \mathsf{P}(X^* \leq -11.18) =$
$= 1 - \Phi(-11.18) = \Phi(11.18) \approx 1.$
(c) $\mathsf{P}(100 \leq 500 - X \leq 150) = \mathsf{P}(350 < X < 400) = \mathsf{P}(\frac{350-400}{8.944} < X^* < \frac{400-400}{8.944}) =$
$= \mathsf{P}(-5.59 < X < 0) = \Phi(0) - \Phi(-5.59) \approx 0.5.$

2.3 Dvodimenzionalna slučajna promenljiva

Ako su $X : \Omega \to \mathbb{R}$ i $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajne promenljive, tada uređeni par (X, Y) nazivamo dvodimenzionalnom slučajnom promenljivom.
Slučajna promenljiva (X, Y) je diskretnog tipa ako su X i Y diskretnog tipa. Ako je $\mathcal{R}_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ skup vrednosti slučajne promenljive X i $\mathcal{R}_Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y tada je skup vrednosti slučajne promenljive (X, Y)

$$\mathcal{R}_{X,Y} = \{(x_i, y_j) : x_i \in \mathcal{R}_X, y_j \in \mathcal{R}_Y\}. \tag{2.21}$$

Sa $\mathsf{p}(x_i, y_j)$ označavamo verovatnoću događaja $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}$, tj.

$$\mathsf{p}(x_i, y_j) = \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j), \tag{2.22}$$

pri čemu je

$$\sum_i \sum_j \mathsf{p}(X = x_i, Y = y_j) = 1. \tag{2.23}$$

Skup vrednosti slučajne promenljive (X, Y) zajedno sa odgovarajućim verovatnoćama predstavlja zakon raspodele dvodimenzionalne diskretne slučajne promenljive. On se obično zapisuje u obliku tablice

$$
\begin{array}{c|ccc|c}
X \setminus Y & y_1 & y_2 & \cdots & \\
\hline
x_1 & p_{11} & p_{12} & \cdots & \mathsf{p}(x_1) \\
x_2 & p_{21} & p_{22} & \cdots & \mathsf{p}(x_2) \\
\vdots & & & & \vdots \\
\hline
 & \mathsf{p}(y_1) & \mathsf{p}(y_2) & \cdots & 1
\end{array} \tag{2.24}
$$

Uz pomoć marginalnih verovatnoća

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p}(x_i) = \mathsf{P}(X = x_i) &= \mathsf{P}(X = x_i, Y \in \mathbb{R}) = \sum_j \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
\mathsf{p}(y_j) = \mathsf{P}(Y = y_j) &= \mathsf{P}(Y = y_j, X \in \mathbb{R}) = \sum_i \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j)
\end{aligned} \tag{2.25}
$$

dobijamo marginalne raspodele za X i Y

$$
X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \cdots \end{pmatrix}, \quad Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots \\ \mathsf{p}(y_1) & \mathsf{p}(y_2) & \cdots \end{pmatrix}. \tag{2.26}
$$

Funkcija raspodele diskretne dvodimenzionalne slučajne promenljive se dobija na sledeći način

$$
F_{X,Y}(x, y) = \mathsf{P}(X < x, Y < y) = \sum_{i:\, x_i < x} \; \sum_{j:\, y_j < y} \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) \tag{2.27}
$$

Slučajne promenljive X i Y diskretnog tipa su nezavisne ako i samo ako za sve $i, j \in \{1, 2, \ldots\}$ važi

$$
\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X = x_i)\, \mathsf{P}(Y = y_j). \tag{2.28}
$$

Ako je $\mathsf{P}(X = x_i) \neq 0$ tada se uslovna verovatnoća definiše na sledeći način

$$
\mathsf{P}(Y = y_j | X = x_i) = \frac{\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathsf{P}(X = x_i)}. \tag{2.29}
$$

Analogno, za $\mathsf{P}(Y = y_j) \neq 0$ važi

$$
\mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j) = \frac{\mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j)}{\mathsf{P}(Y = y_j)}. \tag{2.30}
$$

Slučajna promenljiva (X, Y) je neprekidna dvodimenzionalna slučajna promenljiva ako postoji funkcija $\varphi_{XY} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ takva da je za sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$
F_{XY}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} dt \int_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(t, u)\, du. \tag{2.31}
$$

Funkcija φ_{XY} se naziva funcijom gustine ili gustinom za (X, Y) i ima sledeće osobine:

$$
\varphi_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} \text{ za sve } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ u kojima je } \varphi_{XY} \text{ neprekidna}, \tag{2.32}
$$

$$
\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)\, dy = 1, \tag{2.33}
$$

$$
\mathsf{P}(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b dx \int_c^d \varphi_{XY}(x, y)\, dy, \text{ za sve } a < b,\ c < d. \tag{2.34}
$$

Marginalne gustine neprekidnih slučajnih promenljivih X i Y date su sa:

$$
\varphi_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)\, dy \text{ i } \varphi_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{XY}(x, y)\, dx \tag{2.35}
$$

Neprekidne slučajne promenljive X i Y su nezavisne ako i samo ako je

$$
\varphi_{XY}(x, y) = \varphi_X(x)\, \varphi_Y(y) \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}. \qquad (2.36).
$$

[119] *Dvodimenzionalna slučajna promenljiva* (X, Y) *data je zakonom raspodele*

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$
2	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$

(a) *Naći marginalne raspodele za slučajne promenljive* X *i* Y*.*

(b) *Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih* X *i* Y*.*

(c) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X > 0)$, $\mathsf{P}(X \leq 1)$, $\mathsf{P}(X < 1, Y < 2)$, $\mathsf{P}(X < 1, Y \leq 2)$, $\mathsf{P}(X = 1 | Y = 1)$ *i* $\mathsf{P}(Y = 1 | X = 2)$.

(d) *Izračunati* $F_{X,Y}(-1, 0)$, $F_{X,Y}(1, 1.35)$, $F_{X,Y}(2, 2)$ *i* $F_{X,Y}(2.17, 1.5)$.

Rešenje:

(a) Skup vrednosti slučajnih promenljivih X i Y su $\mathcal{R}_X = \{0, 1, 2\}$ i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1\}$ pa primenom (2.25) odgovarajuće marginalne verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = \tfrac{1}{18} + \tfrac{6}{18} = \tfrac{7}{18},$$
$$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \tfrac{3}{18} + \tfrac{4}{18} = \tfrac{7}{18},$$
$$\mathsf{P}(X = 2) = \mathsf{P}(X = 2, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 1) = \tfrac{3}{18} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{4}{18},$$
$$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 0) = $$
$$= \tfrac{1}{18} + \tfrac{3}{18} + \tfrac{3}{18} = \tfrac{7}{18},$$
$$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 1) = $$
$$= \tfrac{6}{18} + \tfrac{4}{18} + \tfrac{1}{18} = \tfrac{11}{18},$$

Možemo nacrtati tabelu i u nju uneti dobijene vrednosti marginalnih verovatnoća. Marginalne verovatnoće se dobijaju sabiranjem brojeva iz tabele i upisuju se u marginalna polja tabele. Odgovarajuće marginalne raspodele su

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{18} & \frac{7}{18} & \frac{4}{18} \end{pmatrix} \text{ i } Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{pmatrix}.$$

$X \setminus Y$	0	1	
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{6}{18}$	$\frac{7}{18}$
1	$\frac{3}{18}$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$
2	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{18}$
	$\frac{7}{18}$	$\frac{11}{18}$	

(b) Kako je, na primer $\mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = \frac{1}{18} \neq \frac{7}{18} \cdot \frac{7}{18} = \mathsf{P}(X = 0)\,\mathsf{P}(Y = 0)$ primenom (2.28) imamo da slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne (tj. zavisne su).

(c) Tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(X > 0) = \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) = \frac{11}{18}$,
$\mathsf{P}(X \le 1) = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = \frac{14}{18}$,
$\mathsf{P}(X < 1, Y < 2) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{18} + \frac{6}{18} = \frac{7}{18}$,
$\mathsf{P}(X < 1, Y \le 2) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{7}{18}$,
$\mathsf{P}(X = 1|Y = 1) = \dfrac{\mathsf{P}(X = 1, Y = 1)}{\mathsf{P}(Y = 1)} = \dfrac{\frac{4}{18}}{\frac{11}{18}} = \frac{4}{11}$,
$\mathsf{P}(Y = 1|X = 2) = \dfrac{\mathsf{P}(X = 2, Y = 1)}{\mathsf{P}(X = 2)} = \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{4}{18}} = \frac{1}{4}$.

(d) Primenom (2.27) imamo da je
$F_{X,Y}(-1, 0) = \mathsf{P}(X < -1, Y < 0) = 0$,
$F_{X,Y}(1, 1.35) = \mathsf{P}(X < 1, Y < 1.35) =$
$= \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{18} + \frac{6}{18} = \frac{7}{18}$,
$F_{X,Y}(2, 2) = \mathsf{P}(X < 2, Y < 2) =$
$= \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) +$
$+ \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{18} = \frac{14}{18}$,
$F_{X,Y}(2.17, 1.5) = \mathsf{P}(X < 2.17, Y < 1.5) =$
$= \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) +$
$+ \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 1) =$
$= \frac{1}{18} + \frac{6}{18} + \frac{3}{18} + \frac{4}{18} + \frac{3}{18} + \frac{1}{18} = 1$.

---

[120] *Slučajna promenljiva* (X, Y) *data je zakonom raspodele*

$X \setminus Y$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(a) Naći marginalne raspodele za slučajne promenljive X *i* Y.

(b) Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X *i* Y.

(c) Izračunati $F_{X,Y}(-1, 0)$, $F_{X,Y}(1, 1.35)$, *i* $F_{X,Y}(2, 2)$.

Rešenje:

(a) Očigledno je $\mathcal{R}_X = \mathcal{R}_Y = \{0, 1\}$, tako da su odgovarajuće marginalne verovatnoće (na osnovu (2.25))
$\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
$\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 1) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$,
tako da su tražene marginalne raspodele $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ i $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

(b) Kako je

$$\tfrac{1}{4} = \mathsf{P}(X=0, Y=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=0),$$
$$\tfrac{1}{4} = \mathsf{P}(X=0, Y=1) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=1),$$
$$\tfrac{1}{4} = \mathsf{P}(X=1, Y=0) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=0),$$
$$\tfrac{1}{4} = \mathsf{P}(X=1, Y=1) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=0),$$

na osnovu (2.28) imamo da slučajne promenljive X i Y jesu nezavisne.

(c) Primenom (2.27) dobijamo

$$F_{X,Y}(-1,0) = \mathsf{P}(X<-1, Y<0) = 0,$$
$$F_{X,Y}(1,1.35) = \mathsf{P}(X<1, Y<1.35) = $$
$$= \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2},$$
$$F_{X,Y}(2,2) = \mathsf{P}(X<2, Y<2) = $$
$$= \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) +$$
$$+ \mathsf{P}(X=1,Y=0) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4} = 1.$$

---

[121] *Dvodimenzionalna slučajna promenljiva (X,Y) data je zakonom raspodele*

$X \setminus Y$	2	4
-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	p
1	0	$\frac{1}{3}$

(a) *Odrediti parametar p.*

(b) *Izračunati* $\mathsf{P}(X\le 0, Y\le 2)$, $\mathsf{P}(X<0, Y<4)$, $\mathsf{P}(X=0, Y\le 4)$ *i* $\mathsf{P}(X\ge 0, Y=4)$.

(c) *Izračunati* $F_{X,Y}(1.1, 2.5)$, $F_{X,Y}(0.5, 5.5)$, $F_{X,Y}(0.5, 3)$ *i* $F_{X,Y}(4,5)$.

(d) *Naći marginalne raspodele za slučajne promenljive X i Y. Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje:

(a) Na osnovu (2.23) imamo da treba da važi $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+p+\frac{1}{3}=1$, odakle sledi da je $p=\frac{1}{6}$.

(b) Tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X\le 0, Y\le 2) = \mathsf{P}(X=-1, Y=2) + \mathsf{P}(X=0,Y=2) = \tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},$$
$$\mathsf{P}(X<0, Y<4) = \mathsf{P}(X=-1, Y=2) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathsf{P}(X=0, Y<4) = \mathsf{P}(X=0, Y=2) = \tfrac{1}{8},$$
$$\mathsf{P}(X\ge 0, Y=4) = \mathsf{P}(X=0, Y=4) + \mathsf{P}(X=1,Y=4) = \tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

(c) Primenom (2.27) imamo da je

$$\begin{aligned}
&F_{X,Y}(1.1, 2.5) = \mathsf{P}(X < 1.1, Y < 2.5) = \\
&= \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 2) = \mathsf{P}(Y = 2) = \tfrac{3}{8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{X,Y}(0.5, 5.5) = \mathsf{P}(X < 0.5, Y < 5.5) = \\
&= \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = -1, Y = 4) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) + \\
&+ \mathsf{P}(X = 0, Y = 4) = \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 0) = \tfrac{3}{8} + \tfrac{7}{24} = \tfrac{2}{3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{X,Y}(0.5, 3) = \mathsf{P}(X < 0.5, Y < 3) = \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \\
&+ \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&F_{X,Y}(4, 5) = \mathsf{P}(X < 4, Y < 5) = \\
&= \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = -1, Y = 4) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) + \\
&\quad + \mathsf{P}(X = 0, Y = 4) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 4) = \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6} + 0 + \tfrac{1}{3} = 1.
\end{aligned}$$

(d) Skupovi vrednosti za slučajne promenljive X i Y su redom $\mathcal{R}_X = \{-1, 0, 1\}$ i $\mathcal{R}_Y = \{2, 4\}$. Primenom (2.25) dobijamo da su marginalne verovatnoće

$$\begin{aligned}
&\mathsf{P}(X = -1) = \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = -1, Y = 4) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{3}{8}, \\
&\mathsf{P}(X = 0) = \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 4) = \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8} = \tfrac{7}{24}, \\
&\mathsf{P}(X = 1) = \mathsf{P}(X = 1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 4) = 0 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3}, \\
&\mathsf{P}(Y = 2) = \mathsf{P}(X = -1, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 2) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 2) = \\
&= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + 0 = \tfrac{3}{8}, \\
&\mathsf{P}(Y = 4) = \mathsf{P}(X = -1, Y = 4) + \mathsf{P}(X = 0, Y = 4) + \mathsf{P}(X = 1, Y = 4) = \\
&= \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{6} + 13 = \tfrac{5}{8},
\end{aligned}$$

tako da su tražene marginalne raspodele

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{8} & \frac{7}{24} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mathsf{P}(X = 1, Y = 2) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} = \mathsf{P}(X = 1)\,\mathsf{P}(Y = 2)$ primenom (2.28) imamo da slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne.

---

[122] *U kutiji se nalazi* 13 *kuglica označenih brojevima* $1, 2, \ldots, 13$. *Na slučajan način je izvučena jedna kuglica. Slučajna promenljiva* X *uzima vrednost jedan ako je izvučen paran broj, a vrednost nula ako je izvučen neparan broj. Slučajna promenljiva* Y *predstavlja ostatak pri deljenju izvučenog broja sa tri.*

(a) *Naći zakon raspodele za dvodimenzionalnu slučajnu promenljivu* (X, Y).

(b) *Naći marginalne raspodele i ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih* X *i* Y.

(c) *Izračunati* $F_{X,Y}(0, 1.5)$, $F_{X,Y}(1.2, 1.4)$, $F_{X,Y}(0.5, 4)$ *i* $F_{X,Y}(5, 6)$.

Rešenje:

(a) Na osnovu uslova zadatka imamo da je $\mathcal{R}_X = \{0,1\}$ skup vrednosti slučajne promenljive X. Kako slučajna promenljiva Y predstavlja ostatak pri deljenju izvučenog broja sa tri, njen skup vrednosti je $\mathcal{R}_Y = \{0,1,2\}$. Na osnovu (2.21) imamo da je $\mathcal{R}_{X,Y} = \{(i,j) : i \in \{0,1\}, j \in \{0,1,2\}\}$ skup vrednosti slučajne promenljive (X,Y) . Označimo sa A_i događaj da je iz kutije izvučena kuglica sa brojem $i,\ i \in \{1,2,\ldots,13\}$. Kako se iz kutije bira jedna kuglica na slučajan način imamo da je $\mathsf{P}(A_i) = \frac{1}{13}$. Kako je

$\mathsf{P}(X=0,Y=0) = \mathsf{P}(A_3 + A_9) = \mathsf{P}(A_3) + \mathsf{P}(A_9) = \frac{2}{13}$,
$\mathsf{P}(X=0,Y=1) = \mathsf{P}(A_1 + A_7 + A_{13}) = \mathsf{P}(A_1) + \mathsf{P}(A_7) + \mathsf{P}(A_{13}) = \frac{3}{13}$,
$\mathsf{P}(X=0,Y=2) = \mathsf{P}(A_5 + A_{11}) = \mathsf{P}(A_5) + \mathsf{P}(A_{11}) = \frac{2}{13}$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=0) = \mathsf{P}(A_6 + A_{12}) = \mathsf{P}(A_6) + \mathsf{P}(A_{12}) = \frac{2}{13}$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=1) = \mathsf{P}(A_4 + A_{10}) = \mathsf{P}(A_4) + \mathsf{P}(A_{10}) = \frac{2}{13}$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=2) = \mathsf{P}(A_2 + A_8) = \mathsf{P}(A_2) + \mathsf{P}(A_8) = \frac{2}{13}$,

traženi zakon raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive je

$X \setminus Y$	0	1	2
0	$\frac{2}{13}$	$\frac{3}{13}$	$\frac{2}{13}$
1	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{2}{13}$

(b) Primenom (2.25) dobijamo marginalne verovatnoće

$\mathsf{P}(X=0) = \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=0,Y=2) = \frac{7}{13}$,
$\mathsf{P}(X=1) = \mathsf{P}(X=1,Y=0) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) + \mathsf{P}(X=1,Y=2) = \frac{6}{13}$,
$\mathsf{P}(Y=0) = \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=1,Y=0) = \frac{4}{13}$,
$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) = \frac{5}{13}$,
$\mathsf{P}(Y=2) = \mathsf{P}(X=0,Y=2) + \mathsf{P}(X=1,Y=2) = \frac{4}{13}$,

tako da su tražene marginalne raspodele

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{7}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{4}{13} & \frac{5}{13} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Kako je $\mathsf{P}(X=1,Y=2) = \frac{2}{13} \neq \frac{6}{13} \cdot \frac{4}{13} = \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=2)$ primenom (2.28) imamo da slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne.

(c) $F_{X,Y}(0,1.5) = \mathsf{P}(X<0,Y<1.5) = 0$,

$F_{X,Y}(1.2,1.4) = \mathsf{P}(X<1.2,Y<1.4) =$
$= \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=1,Y=0) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) =$
$= \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} = \frac{9}{13}$,

$F_{X,Y}(0.5,4) = \mathsf{P}(X<0.5,Y<4) =$
$= \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=0,Y=2) =$
$= \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} = \frac{7}{13}$,

$F_{X,Y}(5,6) = \mathsf{P}(X<5,Y<6) =$
$= \mathsf{P}(X=0,Y=0) + \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=0,Y=2) +$
$\quad + \mathsf{P}(X=1,Y=0) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) =$

$= \frac{2}{13} + \frac{3}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} + \frac{2}{13} = 1.$

---

[123] *Pera izvlači jednu kuglicu iz kutije u kojoj se nalazi sedam kuglica označenih brojevima* 3, 4, 5, 6, 7, 8 *i* 9*. Ako je izvučen broj deljiv sa tri, dobija jedan poen, ako je izvučen broj deljiv sa četiri, dobija dva poena, a u ostalim slučajevima dobija tri poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj poena koje je Pera osvojio. Slučajna promenljiva Y uzima vrednost nula ako je izvučen paran broj, a vrednost jedan ako je izvučen neparan broj. Naći zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y). Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X = 1|Y = 0)$, $\mathsf{P}(Y = 0|X = 3)$ *i* $\mathsf{P}(X < 3, Y = 0)$.

Rešenje: $\mathcal{R}_X = \{1, 2, 3\}$ i $\mathcal{R}_Y = \{0, 1\}$ su skupovi vrednosti za slučajne promenljive X i Y, redom. Primenom (2.21), $\mathcal{R}_{X,Y} = \{(i, j) : i \in \{1, 2, 3\},\ j \in \{0, 1\}\}$ je skup vrednosti slučajne promenljive (X, Y). Označimo sa A_i događaj da je Pera iz kutije izvukao kuglicu na kojoj je broj i, $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Tada su odgovarajuće verovatnoće slučajne promenljive (X, Y)

$\mathsf{P}(X = 1, Y = 0) = \mathsf{P}(A_6) = \frac{1}{7}$,
$\mathsf{P}(X = 1, Y = 1) = \mathsf{P}(A_3 + A_9) = \frac{2}{7}$,
$\mathsf{P}(X = 2, Y = 0) = \mathsf{P}(A_4 + A_8) = \frac{2}{7}$,
$\mathsf{P}(X = 2, Y = 1) = 0$,
$\mathsf{P}(X = 3, Y = 0) = 0$,
$\mathsf{P}(X = 3, Y = 1) = \mathsf{P}(A_5 + A_7) = \frac{2}{7}$,

tj. traženi zakon raspodele je

$X \setminus Y$	0	1	$\mathsf{P}(X = i)$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	
2	$\frac{2}{7}$	0	
3	0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
$\mathsf{P}(Y = j)$	$\frac{3}{7}$		

Tražene verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X = 1|Y = 0) = \frac{\mathsf{P}(X = 1, Y = 0)}{\mathsf{P}(Y = 0)} = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{3},$$
$$\mathsf{P}(Y = 0|X = 3) = \frac{\mathsf{P}(X = 3, Y = 0)}{\mathsf{P}(X = 3)} = \frac{0}{\frac{2}{7}} = 0,$$
$$\mathsf{P}(X < 3, Y = 0) = \mathsf{P}(X = 1, Y = 0) + \mathsf{P}(X = 2, Y = 0) = \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}.$$

---

[124] *Aca baca dva puta kockicu za igru „Ne ljuti se čoveče". Neka je X broj pojavljivanja broja deljivog sa tri, a Y broj pojavljivanja broja tri. Naći zakon raspodele slučajne promenljive (X, Y). Ispitati nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje: Označimo sa ω_{ij} događaj da su se u prvom, odnosno drugom bacanju kockice pojavili brojevi i i j $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Bacanja kockica su međusobno nezavisna tako da je $\mathsf{P}(\omega_{ij}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ za svako $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Skup vrednosti slučajne promenljive (X, Y) je $\mathcal{R}_{X,Y} = \{(i, j) :\ i, j \in \{0, 1, 2\}\}$, a ogovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(X=0,Y=0)=\mathsf{P}(\omega_{11}+\omega_{12}+\omega_{14}+\omega_{15}+\omega_{21}+\omega_{22}+\omega_{24}+\omega_{25}+\omega_{41}+\omega_{42}+$
$+\omega_{44}+\omega_{45}+\omega_{51}+\omega_{52}+\omega_{54}+\omega_{55})=\frac{16}{36}$,
$\mathsf{P}(X=0,Y=1)=0$,
$\mathsf{P}(X=0,Y=2)=0$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=0)=\mathsf{P}(\omega_{16}+\omega_{26}+\omega_{46}+\omega_{56}+\omega_{61}+\omega_{62}+\omega_{64}+\omega_{65})=\frac{8}{36}$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=1)=\mathsf{P}(\omega_{13}+\omega_{23}+\omega_{43}+\omega_{53}+\omega_{31}+\omega_{32}+\omega_{34}+\omega_{35})=\frac{8}{36}$,
$\mathsf{P}(X=1,Y=2)=0$,
$\mathsf{P}(X=2,Y=0)=\mathsf{P}(\omega_{66})=\frac{1}{36}$,
$\mathsf{P}(X=2,Y=1)=\mathsf{P}(\omega_{36}+\omega_{63})=\frac{2}{36}$,
$\mathsf{P}(X=2,Y=2)=\mathsf{P}(\omega_{33})=\frac{1}{36}$.

Zakon raspodele slučajne promenljive (X,Y) je

$X \setminus Y$	0	1	2	$\mathsf{P}(X=i)$
0	$\frac{16}{36}$	0	0	$\frac{16}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{8}{36}$	0	$\frac{16}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$
$\mathsf{P}(Y=j)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Kako je $\mathsf{P}(X=1,Y=2)=0\neq\frac{16}{36}\cdot\frac{1}{36}=\mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=2)$ na osnovu (2.28) sledi da slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne.

---

[125] *Neprekidna slučajna promenljiva (X,Y) data je gustinom*

$$\varphi_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{8}(6-x-y), & x\in[0,2],\ y\in[2,4],\\ 0, & \text{inače}\end{cases}$$

(a) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X<1,\,2.5<Y<3.5)$, $\mathsf{P}(0.5<X<1.5,Y<3)$ *i* $\mathsf{P}(X>1,Y>3)$.

(b) *Izračunati* $F_{XY}(1.2,3.2)$, $F_{XY}(0.5,3.5)$, $F_{XY}(-1,-2)$, $F_{XY}(0.5,5)$, *i* $F_{XY}(6,6)$.

(c) *Naći marginalne gustine za X i Y i ispitati njihovu nezavisnost.*

Rešenje: (a) Primenom (2.34) dobijamo

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(X<1,\,2.5<Y<3.5)&=\int_0^1\int_{2.5}^{3.5}\tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy=\int_0^1 dx\int_{2.5}^{3.5}\tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dy\\&=\tfrac{1}{8}\int_0^1\left(6y-xy-\tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{2.5}^{3.5}dx=\tfrac{1}{8}\int_0^1(3-x)\,dx=\\&=\tfrac{1}{8}\left(3x-\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=0.3125.\end{aligned}$$

Slično dobijamo i

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(0.5 < X < 1.5, Y < 3) &= \int_{0.5}^{1.5}\int_{2}^{3} \tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = \int_{0.5}^{1.5} dx \int_{2}^{3} \tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dy \\ &= \tfrac{1}{8}\int_{0.5}^{1.5} \left(6y - xy - \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{2}^{3} dx = \tfrac{1}{8}\int_{0.5}^{1.5}(3.5-x)\,dx = \\ &= \tfrac{1}{8}\left(3.5x - \tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{0.5}^{1.5} = 0.3125.\end{aligned}$$

Analogno prethodnim slučajevima dobija se

$\mathsf{P}(X > 1, Y > 3) = \int_{1}^{2}\int_{3}^{4} \frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = 0.125.$

(b) Koristeći definiciju neprekidne dvodimenzionalne slučajne promenljive (2.31) dobija se

$$\begin{aligned}F_{XY}(1.2, 3.2) &= \int_{0}^{1.2}\int_{2}^{3.2} \tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = \int_{0}^{1.2} dx \int_{2}^{3.2} \tfrac{1}{8}(6-x-y)\,dy \\ &= \tfrac{1}{8}\int_{0}^{1.2} \left(6y - xy - \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{2}^{3.2} dx = \tfrac{1}{8}\int_{0}^{1.2}(4.08-1.2x)\,dx = \\ &= \tfrac{1}{8}\left(4.08x - 1.2\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{1.2} = 0.312.\end{aligned}$$

Slično je i

$F_{XY}(0.5, 3.5) = \int_{0}^{0.5}\int_{2}^{3.5} \frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = 0.28125,$

$F_{XY}(0.5, 5) = \int_{0}^{0.5}\int_{2}^{4} \frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = 0.34375,$

$F_{XY}(-1,-2) = \int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-2} 0\,dxdy = 0$ i $F_{XY}(6,6) = \int_{0}^{2}\int_{2}^{4} \frac{1}{8}(6-x-y)\,dxdy = 1.$

(c) Marginalne gustine određujemo primenom (2.35). Gustina neprekidne slučajne promenljive X je nula za $x \notin [0,2]$, a za $x \in [0,2]$ je:

$$\varphi_X(x) = \int_{2}^{4} \tfrac{1}{8}(6-x-y)dy = \tfrac{1}{8}\left(6y - xy - \tfrac{y^2}{2}\right)\Big|_{2}^{4} = \tfrac{1}{8}(6-2x) = \tfrac{1}{4}(3-x).$$

Gustina neprekidne slučajne promenljive Y je nula za $y \notin [2,4]$, a za $y \in [2,4]$ je:

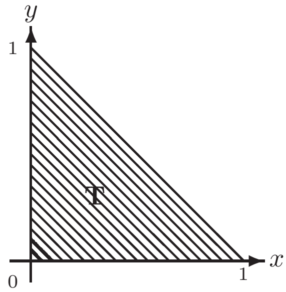
$$\varphi_Y(y) = \int_{0}^{2} \tfrac{1}{8}(6-x-y)dx = \tfrac{1}{8}\left(6x - \tfrac{x^2}{2} - yx\right)\Big|_{0}^{2} = \tfrac{1}{8}(10-2y) = \tfrac{1}{4}(5-y).$$

Nezavisnost slučajnih promenljivih X i Y ćemo proveriti koristeći uslov (2.36), a kako on nije ispunjen za sve $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, slučajne promenljive X i Y nisu nezavisne (zavisne su).

---

[126] *Neprekidna slučajna promenljiva* (X, Y) *data je gustinom*

$$\varphi_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2, & (x,y) \in T, \\ 0, & (x,y) \notin T. \end{cases}$$



(a) *Izračunati verovatnoću* $\mathsf{P}(0.2 \le X \le 0.5, Y < 0.5)$,

(b) *Izračunati* $F_{XY}(0.5, 0.2)$, $F_{XY}(0.5, 0.5)$, $F_{XY}(-1,-1)$, $F_{XY}(1.1, 1.2)$, $F_{XY}(0.5, 1.2)$ *i* $F_{XY}(0.5, 0.7)$.

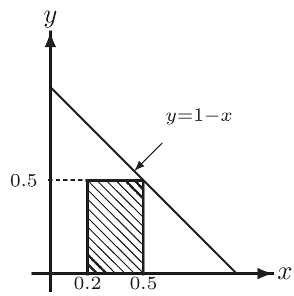
Rešenje:

(a) Primenom (2.34) dobijamo (vidi sliku)

$\mathsf{P}(0.2 \le X \le 0.5, Y < 0.5) =$

$$= \int_{0.2}^{0.5}\int_{0}^{0.5} 2\,dxdy = \int_{0.2}^{0.5} dx \int_{0}^{0.5} 2\,dy =$$

$$= 2\int_{0.2}^{0.5} y|_0^{0.5}\, dx = \int_{0.2}^{0.5} dx = x|_{0.2}^{0.5} = 0.3.$$



slika 3.

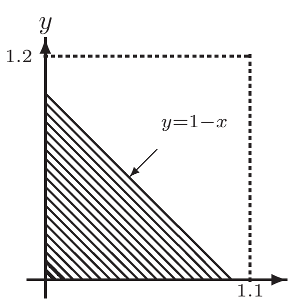
(b) Na osnovu (2.31) je

$$F_{XY}(0.5, 0.2) = \int_0^{0.5}\int_0^{0.2} 2\,dxdy = \int_0^{0.5} dx \int_0^{0.2} 2\,dy = 2\int_0^{0.5} 0.2dx = 0.4x|_0^{0.5} = 0.2.$$

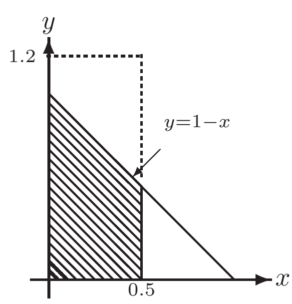
Slično je i $F_{XY}(0.5, 0.5) = \int_0^{0.5}\int_0^{0.5} 2\,dxdy = 0.5,$ kao i

$F_{XY}(-1,-1) = \int_{-\infty}^{-1}\int_{-\infty}^{-1} 0\,dxdy = 0.$

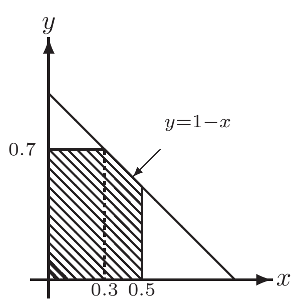
Za izračunavanje sledeće tri vrednosti, $F_{XY}(1.1, 1.2)$, $F_{XY}(0.5, 1.2)$ i $F_{XY}(0.5, 0.7)$, odredimo najpre oblasti integracije $D \subset \mathbb{R}^2$ nad kojima treba izračunati vrednost dvostrukog integrala datog u definiciji (2.31). Tražene oblasti D dobijaju se u preseku beskonačnih pravougaonika sa oblasti T, na kojoj je gustina φ_{XY} različita od nule, i prikazane su na sledećim graficima, respektivno.



slika 1.



slika 2.



slika 3.

$$F_{XY}(1.1,1.2)=\int\limits_0^1\int\limits_0^{1-x}2\,dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}2\,dy=2\int\limits_0^1(1-x)\,dx=$$
$$=2\left(x-\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=1.\ \text{(vidi sl.1)}$$
$$F_{XY}(0.5,1.2)=\int\limits_0^{0.5}\int\limits_0^{1-x}2\,dxdy=\int\limits_0^{0.5} dx\int\limits_0^{1-x}2\,dy=2\int\limits_0^{0.5}(1-x)\,dx=$$
$$=2\left(x-\tfrac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{0.5}=0.75.\ \text{(vidi sl.2)}$$
$$F_{XY}(0.5,0.7)=\int\limits_0^{0.3}dx\int\limits_0^{0.7}2\,dy+\int\limits_{0.3}^{0.5}dx\int\limits_0^{1-x}2\,dy=$$
$$=2\int\limits_0^{0.3}0.7\,dx+2\int\limits_{0.3}^{0.5}(1-x)\,dx=0.66.\ \text{(vidi sl.3)}$$

---

[127] *Nezavisne slučajne promenljive X i Y date su gustinama*

$$\varphi_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x\in[1,e]\\ 0, & x\notin[1,e]\end{cases},\quad \varphi_Y(y)=\begin{cases}2(1-y), & y\in[0,1]\\ 0, & y\notin[0,1]\end{cases}.$$

Naći funkciju raspodele dvodimenzionalne slučajne promenljive (X,Y).

Rešenje: Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y, na osnovu (2.36) dobijamo da je gustina slučajne promenljive (X,Y):

$$\varphi_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{2-2y}{x}, & (x,y)\in[1,e]\times[0,1]\\ 0, & (x,y)\notin[1,e]\times[0,1].\end{cases}$$

Za $x\le 1\ \vee\ y\le 0$ na osnovu (2.31) je $F_{XY}(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y}0\,dxdy=0.$

Za $x\in(1,e]$ i $y>1$ je

$$\begin{aligned}F_{XY}(x,y)&=\int\limits_1^x\int\limits_0^1\frac{2-2y}{t}\,dtdy=2\int\limits_1^x dt\int\limits_0^1\frac{1-y}{t}\,dy=2\int\limits_1^x\frac{1}{t}\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dt=\\ &=\int\limits_1^x\frac{dt}{t}=\ln t|_1^x=\ln x.\end{aligned}$$

Za $x>e$ i $y\in(0,1]$ je

$$\begin{aligned}F_{XY}(x,y)&=\int\limits_1^e\int\limits_0^y\frac{2-2u}{x}\,dxdu=2\int\limits_0^y du\int\limits_1^e\frac{1-u}{x}\,dx\\ &=2\int\limits_0^y(1-u)\ln x|_1^e\,du=2\int\limits_0^y(1-u)\,du=2\left(u-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^y=2y-y^2.\end{aligned}$$

Posmatrajmo sada $x\in(1,e]$ i $y\in(0,1]$.

$$\begin{aligned}F_{XY}(x,y)&=\int\limits_1^x\int\limits_0^y\frac{2-2u}{t}\,dtdu=2\int\limits_1^x dt\int\limits_0^y\frac{1-u}{t}\,du=2\int\limits_1^x\frac{1}{t}\left(u-\frac{u^2}{2}\right)\Big|_0^y dt=\\ &=2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\int\limits_1^x\frac{dt}{t}=2\left(y-\frac{y^2}{2}\right)\ln t|_1^x=(2y-y^2)\ln x.\end{aligned}$$

Ako je $x > e$ i $y > 1$ dobija se $F_{XY}(x,y) = \int\limits_1^e \int\limits_0^1 \frac{2-2y}{x} dxdy = 1.$

Sumiranjem prethodnih zaključaka dobijamo funkciju raspodele slučajne promenljive Y

$$F_{XY}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \in (-\infty, 1] \vee y \in (-\infty, 0], \\ 2y \ln x - y^2 \ln x, & (x,y) \in (1,e] \times (0,1], \\ \ln x, & (x,y) \in (1,e] \times (1,\infty), \\ 2y - y^2, & (x,y) \in (e,\infty) \times (0,1], \\ 1, & (x,y) \in (e,\infty) \times (1,\infty). \end{cases}$$

2.4 Transformacije i brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Transformacije slučajnih promenljivih

Neka je X slučajna promenljiva i neka je g funkcija koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$. Tada je $Y = g(X(\omega))$, kraće pišemo $Y = g(X)$, slučajna promenljiva koja je dobijena transformacijom slučajne promenljive X.

Ako je X diskretnog tipa sa zakonom raspodele

$$X : \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m & \dots \\ \mathsf{p}(x_1) & \mathsf{p}(x_2) & \dots & \mathsf{p}(x_m) & \dots \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

tada je očigledno $Y = g(X)$ takođe slučajna promenljiva diskretnog tipa. Neka je $\mathcal{R}_Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, tj.

$$g : \{x_1, x_2, \dots\} \to \{y_1, y_2, \dots\}. \tag{2.38}$$

Sa $\mathsf{p}(y_j)$ označavamo verovatnoću događaja čiji se elementi preslikavaju u y_j, tada je

$$\mathsf{p}(y_j) = \mathsf{P}(Y = y_j) = \sum_{i \,:\, g(x_i)=y_j} \mathsf{p}(x_i) = \sum_{i \,:\, g(x_i)=y_j} \mathsf{P}(X = x_i). \tag{2.39}$$

Tada je zakon raspodele slučajne promenljive Y dobijene transformacijom slučajne promenljive X

$$Y : \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_k & \dots \\ \mathsf{p}(y_1) & \mathsf{p}(y_2) & \dots & \mathsf{p}(y_k) & \dots \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono rastuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.41}$$

$$\varphi_Y(y) = \varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.42}$$

Ako je X neprekidnog tipa, sa funkcijom gustine φ_X i funkcijom raspodele F_X, i g monotono opadajuća neprekidna funkcija, tada je

$$F_Y(y) = 1 - F_X\left(g^{-1}(y)\right), \tag{2.43}$$

$$\varphi_Y(y) = -\varphi_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot (g^{-1}(y))'. \tag{2.44}$$

Ako je (X, Y) dvodimenzionalna slučajna promenljiva diskretnog tipa i $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, tj. $g(x,y) = z$, tada slučajnu promenljivu (X, Y) transformišemo u jednu slučajnu promenljivu, $Z = g(X, Y)$, čiji je skup vrednosti $\mathcal{R}_Z = \{z_1, z_2, \dots\}$, tj.

$$g : \mathcal{R}_{X,Y} \longrightarrow \{z_1, z_2, \dots\}, \tag{2.45}$$

a odgovarajuće verovatnoće

$$\mathsf{p}(z_k) = \mathsf{P}\left(Z = z_k\right) = \sum_{i,j\,:\,g(x_i,y_j)=z_k} \mathsf{p}(x_i, y_j). \tag{2.46}$$

Brojne karakteristike slučajnih promenljivih

Matematičko očekivanje $\mathsf{E}\left(X\right)$ slučajne promenljive X je broj definisan sa

$$\mathsf{E}\left(X\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i\ \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x\ \varphi_X\left(x\right)\ dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.47}$$

pod uslovom da odgovarajući red, odnosno inetegral apsolutno konvergira.
Za matematičko očekivanje važe sledeće osobine

$$\mathsf{E}\left(c\right) = c, \ \text{ gde je } \ c \ \text{ konstanta.} \tag{2.48}$$

$$\mathsf{E}\left(X+Y\right) = \mathsf{E}\left(X\right) + \mathsf{E}\left(Y\right), \text{za sve slučajne promenljive } X \text{ i } Y. \tag{2.49}$$

$$\mathsf{E}\left(cX\right) = c\ \mathsf{E}\left(X\right), \ \text{ gde je } \ c \ \text{ konstanta.} \tag{2.50}$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, tada je

$$\mathsf{E}\left(XY\right) = \mathsf{E}\left(X\right)\ \mathsf{E}\left(Y\right). \tag{2.51}$$

Ako je $Y = g(X)$ transformacija slučajne promenljive X tada je

$$\mathsf{E}\left(Y\right) = \begin{cases} \sum\limits_i g(x_i)\ \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\ \varphi_X\left(x\right)\ dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.52}$$

U specijalnom slučaju, $Y = X^\alpha$ važi

$$\mathsf{E}\left(Y\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^\alpha\ \mathsf{p}(x_i) & , \quad X \text{ diskretna slučajna promenljiva} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^\alpha\ \varphi_X\left(x\right)\ dx & , \quad X \text{ neprekidna slučajna promenljiva} \end{cases}, \tag{2.53}$$

$\mathsf{E}\left(X^k\right)$, $k \in \mathbb{N}$ se nazivaju momenti reda k slučajne promenljive X.
Disperzija $\mathsf{D}\left(X\right)$ slučajne promenljive X je definisana sa

$$\mathsf{D}\left(X\right) = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}\left(X\right))^2\right). \tag{2.54}$$

Često se za nalaženje disperzije koristi izraz

$$\mathsf{D}\left(X\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}\left(X\right)^2. \tag{2.55}$$

Standardno odstupanje slučajne promenljive se definiše kao kvadratni koren disperzije.
Za disperziju važe sledeće osobine

$$\mathsf{D}\left(c\right) = 0, \quad \text{za svaku konstantu } \ c. \tag{2.56}$$

$$\mathsf{D}\left(X\right) \geq 0. \tag{2.57}$$

$$\mathsf{D}\left(cX\right) = c^2\ \mathsf{D}\left(X\right), \ \text{ gde je } \ c \ \text{ konstanta.} \tag{2.58}$$

$$\mathsf{D}\left(X+c\right) = \mathsf{D}\left(X\right), \ \text{ gde je } \ c \ \text{ konstanta.} \tag{2.59}$$

Za nezavisne slučajne promenljive X i Y je: $\mathsf{D}\left(X+Y\right) = \mathsf{D}\left(X\right) + \mathsf{D}\left(Y\right)$. (2.60)

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}\left(X\right) = n\ p, \qquad \mathsf{D}\left(X\right) = n\ p\ q\,. \tag{2.61}$$

Ako slučajna promenljiva X ima Poasonovu $\mathcal{P}(\lambda)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \lambda, \qquad \mathsf{D}(X) = \lambda\,. \tag{2.62}$$

Ako slučajna promenljiva X ima geometrijsku $\mathcal{G}(p)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{p}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{q}{p^2}\,. \tag{2.63}$$

Ako slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(a,b)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{a+b}{2}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{(b-a)^2}{12}\,. \tag{2.64}$$

Ako slučajna promenljiva X ima eksponencijalnu $\mathcal{E}(a)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = \tfrac{1}{a}, \qquad \mathsf{D}(X) = \tfrac{1}{a^2}\,. \tag{2.65}$$

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu tada je

$$\mathsf{E}(X) = m, \qquad \mathsf{D}(X) = \sigma^2\,. \tag{2.66}$$

---

[128] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele* $X : \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.
Neka je $Y = 2X+3$, $\quad Z = X^2 \quad$ *i* $\quad T = X^3 - X^2$.

(a) *Naći zakon raspodele za slučajne promenljive* Y, Z *i* T.

(b) *Izračunati matematičko očekivanje za slučajne promenljive* X, Y, Z *i* T.

(c) *Izračunati disperziju za slučajne promenljive* X, Y, Z *i* T.

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) imamo da je $\mathcal{R}_Y = \{1, 9, 11\}$ skup vrednosti slučajne promenljive $Y = 2X+3$. Korišćenjem (2.39) dobijamo da su tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(Y=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Y=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Y=11) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 11 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1, 9, 16\}$ njen skup vrednosti, pa primenom (2.39) dobijamo da su odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(Z=16) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 9 & 16 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu $T = X^3 - X^2$ imamo da je $\mathcal{R}_T = \{-2, 18, 48\}$, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T=-2) = \mathsf{P}(X=-1) = 0.4, \qquad \mathsf{P}(T=18) = \mathsf{P}(X=3) = 0.5,$

$\mathsf{P}(T=48) = \mathsf{P}(X=4) = 0.1,$

i tražena slučajna promenljiva je $T : \begin{pmatrix} -2 & 18 & 48 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$.

(b) Prvo ćemo izračunati matematičko očekivanje za sve date slučajne promenljive primenom (2.47)

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(X) = -1\cdot 0.4 + 3\cdot 0.5 + 4\cdot 0.1 = 1.5,\\
&\mathsf{E}(Y) = 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 11\cdot 0.1 = 6,\\
&\mathsf{E}(Z) = 1\cdot 0.4 + 9\cdot 0.5 + 16\cdot 0.1 = 6.5,\\
&\mathsf{E}(T) = -2\cdot 0.4 + 18\cdot 0.5 + 48\cdot 0.1 = 13.
\end{aligned}$$

Korišćenjem osobina (2.49), (2.50) i (2.53) matematičkog očekivanja, zadatak možemo uraditi i na drugi način[3]

$$\begin{aligned}
&\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+3) = 2\ \mathsf{E}(X) + 3 = 2\cdot 1.5 + 3 = 6,\\
&\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(X^2\right) = (-1)^2\cdot 0.4 + 3^2\cdot 0.5 + 4^2\cdot 0.1 = 6.5,\\
&\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}\left(X^3 - X^2\right) = \mathsf{E}\left(X^3\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right) =\\
&\qquad = (-1)^3\cdot 0.4 + 3^3\cdot 0.5 + 4^3\cdot 0.1 - 6.5 = 13.
\end{aligned}$$

(c) Korišćenjem (2.55) i (2.53) imamo da je

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 6.5 - 1.5^2 = 4.25,\\
&\mathsf{D}(Y) = \mathsf{E}\left(Y^2\right) - \mathsf{E}(Y)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 11^2\cdot 0.1) - 6^2 = 17,\\
&\mathsf{D}(Z) = \mathsf{E}\left(Z^2\right) - \mathsf{E}(Z)^2 = (1^2\cdot 0.4 + 9^2\cdot 0.5 + 16^2\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25,\\
&\mathsf{D}(T) = \mathsf{E}\left(T^2\right) - \mathsf{E}(T)^2 = ((-2)^2\cdot 0.4 + 18^2\cdot 0.5 + 48^2\cdot 0.1) - 13^2 = 225.
\end{aligned}$$

Za slučajne promenljive Y i Z ćemo izračunati disperziju i na drugi način, koristeći osobine disperzije (2.58) i (2.59) i osobinu matematičkog očekivanja (2.53),

$$\begin{aligned}
&\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+3) = 2^2\ \mathsf{D}(X) = 4\cdot 4.25 = 17,\\
&\mathsf{D}(Z) = \mathsf{D}\left(X^2\right) = \mathsf{E}\left(\left(X^2\right)^2\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 = \mathsf{E}\left(X^4\right) - \mathsf{E}\left(X^2\right)^2 =\\
&= ((-1)^4\cdot 0.4 + 3^4\cdot 0.5 + 4^4\cdot 0.1) - 6.5^2 = 24.25.
\end{aligned}$$

---

[129] *Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0.1 & 0.2 & 0.4 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Izračunati verovatnoće* $\mathsf{P}(X < 0.5)$, $\mathsf{P}(2X + 1 < 3)$, $\mathsf{P}\left(X^2 < 1.2\right)$ *i* $\mathsf{P}(2 - X < -1)$.

(b) *Naći zakon raspodele za slučajnu promenljivu $Y = X^2$ i slučajnu promenljivu $Z = X^2 + 1$.*

(c) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive X, Y i Z.*

[3] Ovaj način je prikladan za izračunavanje matematičkog očekivanja slučajnih promenljivih čije zakone raspodela nemamo, a one su dobijene transformacijom slučajne promenljive čije očekivanje je poznato.

Rešenje:

(a) Tražene verovatnoće su

$\mathsf{P}(X < 0.5) = \mathsf{P}(X = -2) + \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 0) = 0.7,$
$\mathsf{P}(2X + 1 < 3) = \mathsf{P}(X < 1) = \mathsf{P}(X = -2) + \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 0) = 0.7,$
$\mathsf{P}\left(X^2 < 1.2\right) = \mathsf{P}(-1.2 < X < 1.2) =$
$= \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) = 0.8,$
$\mathsf{P}(2 - X < -1) = \mathsf{P}(X > 3) = 0.$

(b) Primenjujući (2.38) dobijamo da je $\mathcal{R}_Y = \{0, 1, 4\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Y, pa primenom (2.39) izračunavamo potrebne verovatnoće

$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X = 0) = 0.4,$
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 1) = 0.2 + 0.2 = 0.4,$
$\mathsf{P}(Y = 4) = \mathsf{P}(X = -2) + \mathsf{P}(X = 2) = 0.1 + 0.1 = 0.2,$

tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$

Analogno, dobijamo da je $\mathcal{R}_Z = \{1, 2, 5\}$ skup vrednosti slučajne promenljive Z, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(Z = 1) = \mathsf{P}(X = 0) = 0.4,$
$\mathsf{P}(Z = 2) = \mathsf{P}(X = -1) + \mathsf{P}(X = 1) = 0.2 + 0.2 = 0.4,$
$\mathsf{P}(Z = 5) = \mathsf{P}(X = -2) + \mathsf{P}(X = 2) = 0.1 + 0.1 = 0.2,$

tako da je zakon raspodele slučajne promenljive $Z : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \end{pmatrix}.$

(c) Primenom (2.47), (2.53) i (2.55) računamo matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promenljive X, Y i Z

$\mathsf{E}(X) = -2 \cdot 0.1 - 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.1 = 0,$
$\mathsf{E}\left(X^2\right) = (-2)^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.2 + 2^2 \cdot 0.1 = 1.2,$
$\mathsf{D}(X) = 1.2 - 0^2 = 1.2,$
$\mathsf{E}(Y) = 0 \cdot 0.4 + 1 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.2 = 1.2,$
$\mathsf{E}\left(Y^2\right) = 0^2 \cdot 0.4 + 1^2 \cdot 0.4 + 4^2 \cdot 0.2 = 3.6,$
$\mathsf{D}(Y) = 3.6 - 1.2^2 = 2.16,$
$\mathsf{E}(Z) = 1 \cdot 0.4 + 2 \cdot 0.4 + 5 \cdot 0.2 = 2.2,$
$\mathsf{E}\left(Z^2\right) = 1^2 \cdot 0.4 + 2^2 \cdot 0.4 + 5^2 \cdot 0.2 = 7,$
$\mathsf{D}(Z) = 7 - 2.2^2 = 2.16.$

Koristeći (2.48), (2.49) i (2.59) matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive Z možemo izračunati i na drugi način

$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(X^2 + 1\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) + 1 = 1.2 + 1 = 2.2,$
$\mathsf{D}(Z) = \mathsf{D}\left(X^2 + 1\right) = \mathsf{D}\left(X^2\right) = \mathsf{D}(Y) = 2.16.$

---

[130] *Slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele* $X : \begin{pmatrix} -\pi & -\frac{\pi}{2} & 0 & \frac{\pi}{2} & \pi \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{2}{8} \end{pmatrix}.$ *Izračunati zakon raspodele, matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = \sin X$.*

Rešenje: Skup vrednosti slučajne promenljive Y je $\mathcal{R}_Y = \{-1, 0, 1\}$, a odgovarajuće verovatnoće računamo primenom (2.39).
$\mathsf{P}(Y = -1) = \mathsf{P}\left(X = -\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}$,
$\mathsf{P}(Y = 0) = \mathsf{P}(X = -\pi) + \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = \pi) = \frac{6}{8}$,
$\mathsf{P}(Y = 1) = \mathsf{P}\left(X = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}$,
tako da je traženi zakon raspodele $Y : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{6}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.
Dalje, imamo da je $\mathsf{E}(Y) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 0$, $\mathsf{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$, $\mathsf{D}(Y) = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$.

---

[131] *Strelac promašuje metu sa verovatnoćom* $\frac{1}{20}$.

(a) *Ako strelac gađa u metu* 100 *puta, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* X *koja predstavlja broj promašaja.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* Y *kojom se može aproksimirati slučajna promenljiva* X *iz ovog zadatka.*

(c) *Ako strelac gađa u metu dok ne promaši, naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive* Z *koja predstavlja broj gađanja.*

(d) *Strelac gađa metu dok ne promaši. Slučajna promenljiva* T *uzima vrednost* 1 *ako je strelac promašio metu u parnom po redu gađanju, a vrednost* -1 *ako je strelac promašio metu u neparnom po redu gađanju. Naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajnu promenljivu* T.

Rešenje: Strelac promašuje metu sa verovatnoćom $p = \frac{1}{20}$, a pogađa sa verovatnoćom $q = \frac{19}{20}$.

(a) Slučajna promenljiva X ima binomnu $\mathcal{B}(100, \frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.61) imamo da je $\mathsf{E}(X) = 100 \cdot \frac{1}{20} = 5$ i $\mathsf{D}(X) = 100 \cdot \frac{1}{20} \cdot \frac{19}{20} = \frac{19}{4}$.

(b) Primenom (2.8) imamo da za $\lambda = 100 \cdot \frac{1}{20} = 5$ slučajna promenljiva Y ima Poasonovu $\mathcal{P}(5)$ raspodelu tako da je (vidi (2.62)) $\mathsf{E}(Y) = 5$ i $\mathsf{D}(Y) = 5$.

(c) Slučajna promenljiva Z ima geometrijsku $\mathcal{G}(\frac{1}{20})$ raspodelu, tako da na osnovu (2.63) sledi da je $\mathsf{E}(Z) = \dfrac{1}{\frac{1}{20}} = 20$ i $\mathsf{D}(Z) = \dfrac{\frac{19}{20}}{\frac{1}{20^2}} = 380$.

(d) Očigledno je $\mathcal{R}_T = \{-1, 1\}$ skup vrednosti slučajne promenljive T, a odgovarajuće verovatnoće su

$\mathsf{P}(T = -1) = \mathsf{P}(Z = 1) + \mathsf{P}(Z = 3) + \mathsf{P}(Z = 5) + \cdots =$
$= \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^2 \cdot \frac{1}{20} + (\frac{19}{20})^4 \cdot \frac{1}{20} + \cdots =$
$= \frac{1}{20} \cdot (1 + (\frac{19}{20})^2 + (\frac{19}{20})^4 + \cdots) = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{1-(\frac{19}{20})^2} = \frac{20}{39}$,

$\mathsf{P}(T = 1) = 1 - \mathsf{P}(T = -1) = \frac{19}{39}$, tako da slučajna promenljiva T ima zakon raspodele $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{20}{39} & \frac{19}{39} \end{pmatrix}$, a tražene numeričke karakteristike su

$\mathsf{E}(T) = -\frac{20}{39} + \frac{19}{39} = -\frac{1}{39}$, $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \frac{20}{39} + \frac{19}{39} = 1$, $\mathsf{D}(X) = 1 - (-\frac{1}{39})^2 = \frac{1520}{1521}$.

---

[132] *Dve mašine nezavisno jedna od druge proizvode istu vrstu proizvoda. Slučajna promenljiva X predstavlja broj škartova u toku jednog dana na prvoj mašini, a slučajna promenljiva Y broj škartova na drugoj mašini. Zakoni raspodela za X i Y su*

$$X : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, \qquad Y : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}.$$

(a) *Naći zakone raspodela za slučajne promenljive $Z = X^2$, $T = 2Y+1$, $U = X+Y$ i $V = XY$.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X, Y, Z, T, U i V.*

Rešenje:

(a) Primenom (2.38) i (2.45) dobijamo da su $\mathcal{R}_Z = \{0,1,4,9\}$, $\mathcal{R}_T = \{1,3,5\}$, $\mathcal{R}_U = \{0,1,2,3,4,5\}$ i $\mathcal{R}_V = \{0,1,2,3,4,6\}$ skupovi vrednosti za slučajne promenljive X, Y, Z, T, U i V, redom.

Za slučajnu promenljivu $Z = X^2$ primenom (2.39) dobijamo odgovarajuće verovatnoće

$\mathsf{P}(Z=0) = \mathsf{P}(X=0) = 0.1$, $\mathsf{P}(Z=1) = \mathsf{P}(X=1) = 0.6$
$\mathsf{P}(Z=4) = \mathsf{P}(X=2) = 0.2$, $\mathsf{P}(Z=9) = \mathsf{P}(X=3) = 0.1$

tako da je traženi zakon raspodele $Z : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}$.

Primenom (2.39) dobijamo da je

$\mathsf{P}(T=1) = \mathsf{P}(Y=0) = 0.5$, $\mathsf{P}(T=3) = \mathsf{P}(Y=1) = 0.3$
$\mathsf{P}(T=5) = \mathsf{P}(Y=2) = 0.2$,

tako da je traženi zakon raspodele $T : \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \end{pmatrix}$.

Kako su X i Y nezavisne slučajne promenljive, primenjujući (2.46) dobijamo tražene verovatnoće

$\mathsf{P}(U=0) = \mathsf{P}(X=0,Y=0) = \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.5 = 0.05$,
$\mathsf{P}(U=1) = \mathsf{P}(X=0,Y=1) + \mathsf{P}(X=1,Y=0) =$
$= \mathsf{P}(X=0)\,\mathsf{P}(Y=1) + \mathsf{P}(X=1)\,\mathsf{P}(Y=0) = 0.1 \cdot 0.3 + 0.6 \cdot 0.5 = 0.33$,
$\mathsf{P}(U=2) = \mathsf{P}(X=0,Y=2) + \mathsf{P}(X=1,Y=1) + \mathsf{P}(X=2,Y=2) =$
$= 0.1 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.2 \cdot 0.5 = 0.3$,
$\mathsf{P}(U=3) = \mathsf{P}(X=1,Y=2) + \mathsf{P}(X=2,Y=1) + \mathsf{P}(X=3,Y=0) =$
$= 0.6 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.23$,
$\mathsf{P}(U=4) = \mathsf{P}(X=2,Y=2) + \mathsf{P}(X=3,Y=1) =$
$= 0.2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.07$,
$\mathsf{P}(U=5) = \mathsf{P}(X=3,Y=2) = 0.1 \cdot 0.2 = 0.02$,

i traženi zakon raspodele je $U : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.05 & 0.33 & 0.3 & 0.23 & 0.07 & 0.02 \end{pmatrix}$.

Analogno, za slučajnu promenljivu V primenom (2.28) dobijamo tražene verovatnoće

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(V=0) &= \mathsf{P}(X=0,Y=0)+\mathsf{P}(X=0,Y=1)+\mathsf{P}(X=0,Y=2)+\\
&\quad+\mathsf{P}(X=1,Y=0)+\mathsf{P}(X=2,Y=0)+\mathsf{P}(X=3,Y=0)=\\
&= 0.1\cdot 0.5+0.1\cdot 0.3+0.1\cdot 0.2+0.6\cdot 0.5+0.2\cdot 0.5+0.1\cdot 0.5=\\
&= 0.55,\\
\mathsf{P}(V=1) &= \mathsf{P}(X=1,Y=1)=0.6\cdot 0.3=0.18,\\
\mathsf{P}(V=2) &= \mathsf{P}(X=1,Y=2)+\mathsf{P}(X=2,Y=1)=0.6\cdot 0.2+0.2\cdot 0.3=0.18,\\
\mathsf{P}(V=3) &= \mathsf{P}(X=3,Y=1)=0.1\cdot 0.3=0.03,\\
\mathsf{P}(V=4) &= \mathsf{P}(X=2,Y=2)=0.2\cdot 0.2=0.04,\\
\mathsf{P}(V=6) &= \mathsf{P}(X=3,Y=2)=0.1\cdot 0.2=0.02,
\end{aligned}$$

i tražen zakon raspodele slučajne promenljive

$$V : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0.55 & 0.18 & 0.18 & 0.03 & 0.04 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

(b) Koristeći (2.47), (2.53) i (2.55) dobijamo tražene numeričke karakteristike

$\mathsf{E}(X) = 0.6+0.4+0.3 = 1.3,$

$\mathsf{E}(X^2) = 0.6+0.8+0.9 = 2.3,$

$\mathsf{E}(Y) = 0.3+0.4 = 0.7,$

$\mathsf{E}(Y^2) = 0.3+0.8 = 1.1,$

$\mathsf{E}(Z) = 0.6+0.8+0.9 = 2.3,$

$\mathsf{E}(Z^2) = 0.6+0.32+0.9 = 1.82,$

$\mathsf{E}(T) = 0.5+0.9+1 = 2.4,$

$\mathsf{E}(T^2) = 0.5+2.7+5 = 8.2,$

$\mathsf{E}(U) = 0.33+0.6+0.69+0.28+0.1 = 2,$

$\mathsf{E}(U^2) = 0.33+1.2+2.07+1.12+0.5 = 5.22,$

$\mathsf{E}(V) = 0.18+0.36+0.09+0.16+0.12 = 0.91,$

$\mathsf{E}(V^2) = 0.18+0.72+0.27+0.64+0.72 = 2.53,$

$\mathsf{D}(X) = 0.61, \quad \mathsf{D}(Y) = 0.61, \quad \mathsf{D}(Z) = 0.61,$

$\mathsf{D}(T) = 2.44, \quad \mathsf{D}(U) = 1.22, \quad \mathsf{D}(V) = 1.7019.$

Primenom osobina (2.48), (2.49), (2.51) i (2.50) matematičkog očekivanja izračunaćemo matematičko očekivanje za slučajne promenljive T, U i V.

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(T) &= \mathsf{E}(2Y+1) = 2\ \mathsf{E}(Y)+1 = 2\cdot 0.7+1 = 2.4,\\
\mathsf{E}(U) &= \mathsf{E}(X+Y) = \mathsf{E}(X)+\mathsf{E}(Y) = 1.3+0.7 = 2,\\
\mathsf{E}(V) &= \mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X)\ \mathsf{E}(Y) = 1.3\cdot 0.7 = 0.91.
\end{aligned}$$

Primenjujući (2.58), (2.59) i (2.60) izračunavamo disperzije za slučajne promenljive T i U.

$$\begin{aligned}
\mathsf{D}(T) &= \mathsf{D}(2Y+1) = 4\ \mathsf{D}(Y) = 4\cdot 0.61 = 2.44,\\
\mathsf{D}(U) &= \mathsf{D}(X+Y) = \mathsf{D}(X)+\mathsf{D}(Y) = 0.61+0.61 = 1.22.
\end{aligned}$$

[133] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0,2], \\ 0, & x \notin [0,2]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 2X + 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Raspodela slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_X(t)\, dt = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele je

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(2X+1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y-1}{2}) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \le 0 \\ \frac{1}{4}\left(\frac{y-1}{2}\right)^2, & 0 < \frac{y-1}{2} \le 2 \\ 1, & \frac{y-1}{2} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 1, \\ \frac{(y-1)^2}{16}, & 1 < y \le 5, \\ 1, & y > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Koristeći (2.47) dobijamo $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^2 x\,\frac{1}{2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$.

Na osnovu (2.53) dobijamo $\mathsf{E}(X^2) = \int\limits_0^2 x^2\frac{1}{2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2$.

Koristeći (2.55) dobijamo $\mathsf{D}(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$.

Iz (2.48) i (2.49) dobija se $\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(2X+1) = 2\,\mathsf{E}(X) + \mathsf{E}(1) = 2 \cdot \frac{4}{3} + 1 = \frac{11}{3}$, a kako je

$$\varphi_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \notin (1,5], \\ \frac{y-1}{8}, & y \in (1,5], \end{cases}$$

i na osnovu (2.53) je

$\mathsf{E}(Y^2) = \int\limits_1^5 y^2 \cdot \frac{y-1}{8}\,dy = \frac{1}{8}\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_1^5 = \frac{1}{8}\left(\frac{625}{4} - \frac{125}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{43}{3}$.

Disperzija slučajne promenljive Y je $\mathsf{D}(Y) = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$.

Do istog rezultata može se doći pomoću osobina disperzije (2.58) i (2.59), tj.

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(2X+1) = \mathsf{D}(2X) = 4\,\mathsf{D}(X) = \frac{8}{9}$.

[134] *Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \in [1,4], \\ 0, & x \notin [1,4]. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći raspodelu slučajne promenljive $Y = 3X - 1$.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo tako da je zadovoljen uslov: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(x)\, dx = 1$.

$$a\int\limits_1^4 (x-1)\,dx = a\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_1^4 = a\left(8 - 4 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{9}{2}a = 1.$$

Dakle $a = \frac{2}{9}$.
Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{(x-1)^2}{9}, & 1 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(3X - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{3}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{3}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{3} \le 1 \\ \frac{(\frac{y+1}{3}-1)^2}{9}, & 1 < \frac{y+1}{3} \le 4 \\ 1, & \frac{y+1}{3} > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \le 2, \\ \frac{(y-2)^2}{81}, & 2 < y \le 11, \\ 1, & y > 11. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) i (2.53) dobijamo
$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^4 x \cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^4 = 3.$
$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_1^4 x^2 \cdot \frac{2}{9}(x-1)\,dx = \frac{2}{9}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^4 = \frac{57}{6} = 9.5.$
Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 9.5 - 3^2 = 0.5$.
Koristeći osobine očekivanja i disperzije, dobijamo
$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(3X-1) = 3\,\mathsf{E}(X) - 1 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$ i
$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(3X-1) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9 \cdot 0.5 = 4.5.$

---

[135] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{3}, & 1 < x \le 8, \\ 1, & x > 8. \end{cases}$$

Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive X.

Rešenje: Funkcija gustine slučajne promenljive X je

$$\varphi_X(x) = F'_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (1,8] \\ \frac{2}{9\sqrt[3]{x}}, & x \in (1,8]. \end{cases}$$

Na osnovu (2.47) i (2.53) dobija se

$$\mathsf{E}(X) = \int_1^8 x \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}\, dx == \frac{2}{9}\left.\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}\right|_1^8 = \frac{2}{15}(\sqrt[3]{8^5} - \sqrt[3]{1^5}) = \frac{62}{15} \quad \text{i}$$

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int_1^8 x^2 \cdot \frac{2}{9} x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{2}{9}\int_1^8 x^{\frac{5}{3}}\, dx == \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8}\left. x^{\frac{8}{3}}\right|_1^8 = \frac{1}{12}(\sqrt[3]{8^8} - 1) = \frac{85}{4} = 21.25.$$

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \frac{85}{4} - \left(\frac{62}{15}\right)^2 \approx 4.165$.

---

[136] *Funkcija raspodele neprekidne slučajne promenljive X je*

$$F_X(x) = \begin{cases} 3a-1 & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(a) *Odrediti konstantu a i naći gustinu slučajne promenljive X.*

(b) *Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive $Y = -3X + 2$.*

Rešenje:

(a) Konstantu a određujemo na osnovu osobine $\lim\limits_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ funkcije raspodele, te dobijamo da je $3a - 1 = 0$, dakle $a = \frac{1}{3}$, a na osnovu (2.14) dobijamo da je gustina slučajne promenljive X

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0,1], \\ 2x, & x \in (0,1]. \end{cases}$$

(b) $\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^1 x \cdot 2x\, dx = 2\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3}$, dok je $\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_0^1 x^2 \cdot 2x\, dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$.

Disperzija slučajne promenljive X je $\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}$.

Matematičko očekivanje i disperzija slučajne promenljive Y su

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(-3X+2) = -3\,\mathsf{E}(X) + 2 = -3\cdot\frac{2}{3} + 2 = 0$ i

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(-3X+2) = 9\,\mathsf{D}(X) = 9\cdot\frac{1}{18} = 0.5$.

---

[137] *Neprekidna slučajna promenljiva X ima gustinu*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [1,e], \\ \ln x, & x \in [1,e]. \end{cases}$$

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive* $Y = eX - 1$.

(b) *Izračunati očekivanje i disperziju za* X *i* Y.

Rešenje:

(a) Prvo ćemo odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive X. Kako važi da je $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi_X(x)\,dx$, za fiksirano $x \in (1, e]$ je

$$F_X(x) = \int_1^x \ln t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija:} \\ u = \ln t \ \text{ i } \ dv = dt \\ du = \frac{dt}{t} \quad v = t \end{array} \right\} =$$

$$= t\ln t|_1^x - \int_1^x dt = x\ln x - t|_1^x = x\ln x - x + 1.$$

Dakle, funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 1 + x\ln\frac{x}{e}, & 1 < x \le e, \\ 1, & x > e. \end{cases}$$

Sada ćemo po definiciji i na osnovu prethodnog rezultata odrediti funkciju raspodele slučajne promenljive Y.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(eX - 1 < y) = \mathsf{P}(X < \tfrac{y+1}{e}) = F_X\left(\tfrac{y+1}{e}\right) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y+1}{e} \le 1 \\ 1 + \frac{y+1}{e}\ln\frac{y+1}{e^2}, & 1 < \frac{y+1}{e} \le e \\ 1, & \frac{y+1}{3} > e \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 0, & y \le e - 1, \\ 1 + \frac{y+1}{e}\ln\frac{y+1}{e^2}, & e - 1 < y \le e^2 - 1, \\ 1, & y > e^2 - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

(b) Na osnovu (2.47) je

$$\mathsf{E}(X) = \int\limits_1^e x \cdot \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \ \text{ i } \ dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int\limits_1^e xdx = \frac{e^2}{2} - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \frac{e^2+1}{4}.$$

Očekivanje za Y možemo izračunati pomoću osobina (2.48) i (2.49)

$\mathsf{E}(Y) = \mathsf{E}(eX - 1) = e\,\mathsf{E}(X) - 1 = e \cdot \frac{e^2+1}{4} - 1 = \frac{e^3+e-4}{4} \approx 4.7.$

Kako je

$$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \int\limits_1^e x^2 \cdot \ln x\,dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{parcijalna integracija :} \\ u = \ln x \ \text{ i } \ dv = x^2dx \\ du = \frac{dx}{x} \quad v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^2 dx = \frac{e^3}{3} - \frac{x^3}{9}\Big|_1^e \approx 4.575,$$

disperzija slučajne promenljive X je

$\mathsf{D}(X) = \mathsf{E}\left(X^2\right) - \mathsf{E}(X)^2 = 4.575 - (2.097)^2 \approx 0.1776.$

Koristeći (2.58) i (2.59) dobijamo

$\mathsf{D}(Y) = \mathsf{D}(eX - 1) = e^2\,\mathsf{D}(X) \approx 1.312.$

---

[138] *Slučajna promenljiva X ima uniformnu $\mathcal{U}(2,4)$ raspodelu. Neka je slučajna promenljiva $Y = -2X + 5$.*

(a) *Naći raspodelu slučajne promenljive Y.*

(b) *Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajnih promenljivih X i Y.*

Rešenje:

(a) Funkcija raspodele slučajne promenljive X je

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ \frac{x-2}{2}, & 2 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Na osnovu prethodne činjenice i definicije funkcije raspodele sledi

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathsf{P}(Y < y) = \mathsf{P}(-2X + 5 < y) = \mathsf{P}(X \geq -\tfrac{y-5}{2}) = \\ &= 1 - F_X\left(-\tfrac{y-5}{2}\right) = 1 - \begin{cases} 0, & -\frac{y-5}{2} \leq 2, \\ \frac{-\frac{y-5}{2}-2}{2}, & 2 < -\frac{y-5}{2} \leq 4, \\ 1, & -\frac{y-5}{2} > 4. \end{cases} \end{aligned}$$

Dakle,

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -3, \\ \frac{y+3}{4}, & -3 < y \leq 1, \\ 1, & y > 1, \end{cases}$$

odnosno slučajna promenljiva Y ima uniformnu raspodelu $Y : \mathcal{U}(-3, 1)$.

(b) Na osnovu (2.64) dobijamo

$\mathsf{E}(X) = \frac{2+4}{2} = 3,\ \ \mathsf{D}(X) = \frac{(4-2)^2}{12} = \frac{1}{3},\ \ \mathsf{E}(Y) = \frac{-3+1}{2} = -1$ i $\mathsf{D}(Y) = \frac{(1+3)^2}{12} = \frac{4}{3}.$

---

[139] *Nezavisne slučajne promenljive X i Y date su gustinama*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1 - x^2), & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}, \quad \varphi_Y(y) = \begin{cases} 2(1 - y), & y \in [0, 1] \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}.$$

(a) *Naći matematičko očekivanje i disperziju za X i Y.*

(b) *Naći očekivanje za $Z = -2X^2 - 3$ i $T = \sqrt{Y} + 2$.*

(c) *Naći očekivanje i disperziju za $X + Y$, XY i $(X + Y)^2$.*

Rešenje:

(a) Na osnovu (2.47) je

$\mathsf{E}(X) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0$

i

$\mathsf{E}(Y) = 2\int\limits_{0}^{1} y(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{3}.$

Koristeći (2.53) dobija se

$\mathsf{E}\left(X^2\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^2(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}$

i

$\mathsf{E}\left(Y^2\right) = 2\int\limits_{0}^{1} y^2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{6}.$

Disperziju izračunavamo na osnovu (2.55) tj.

$\mathsf{D}(X) = \frac{1}{5} - 0^2 = \frac{1}{5}$

i

$\mathsf{D}(Y) = \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$

(b) Na osnovu osobina matematičkog očekivanja (2.48), (2.49) i (2.53) dobija se

$\mathsf{E}(Z) = \mathsf{E}\left(-2X^2 - 3\right) = -2\,\mathsf{E}\left(X^2\right) + \mathsf{E}(-3) = -2 \cdot \frac{1}{5} - 3 = -\frac{17}{5}$

$\mathsf{E}(T) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y} + 2\right) = \mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) + \mathsf{E}(2) = \frac{8}{15} + 2 = \frac{38}{15}$, jer je

$\mathsf{E}\left(\sqrt{Y}\right) = \int\limits_{0}^{1} \sqrt{y} \cdot 2(1-y)\,dy = 2\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{8}{15}.$

(c) $\mathsf{E}(X + Y) = \mathsf{E}(X + Y) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$

Zbog nezavisnosti slučajnih promenljivih X i Y je

$\mathsf{E}(XY) = \mathsf{E}(X) \cdot \mathsf{E}(Y) = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0.$

$\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) = \mathsf{E}\left(X^2\right) + 2\,\mathsf{E}(XY) + \mathsf{E}\left(Y^2\right) = \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}.$

Zbog nezavisnosti X i Y je

$\mathsf{D}(X + Y) = \mathsf{D}(X) + \mathsf{D}(Y) = \frac{1}{5} + \frac{1}{18} = \frac{23}{90}.$

$\mathsf{D}(XY) = \mathsf{E}\left((XY)^2\right) - \mathsf{E}(XY)^2 = \mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right) - (\mathsf{E}(XY))^2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} - 0^2 = \frac{1}{30}.$

Momenti reda tri i četiri slučajnih promenljivih X i Y su

$\mathsf{E}\left(X^3\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^3(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_{-1}^{1} = 0,$

$\mathsf{E}\left(X^4\right) = \frac{3}{4}\int\limits_{-1}^{1} x^4(1-x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{3}{35},$

$\mathsf{E}\left(Y^3\right) = 2\int\limits_0^1 y^3(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{10}$

i

$\mathsf{E}\left(Y^4\right) = 2\int\limits_0^1 y^4(1-y)\,dy = 2\left(\frac{y^5}{5} - \frac{y^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{15}$.

Iz osobina (2.48), (2.49) i nezavisnosti X i Y dobijamo

$\mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) = \mathsf{E}\left(X^4 + 4X^3Y + 6X^2Y^2 + 4XY^3 + Y^4\right) =$

$= \mathsf{E}\left(X^4\right) + 4\,\mathsf{E}\left(X^3\right)\mathsf{E}\left(Y\right) + 6\,\mathsf{E}\left(X^2\right)\mathsf{E}\left(Y^2\right) + 4\,\mathsf{E}\left(X\right)\mathsf{E}\left(Y^3\right) + \mathsf{E}\left(Y^4\right) =$

$= \frac{3}{35} + 4\cdot 0\cdot \frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot 0\cdot\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{37}{105} \approx 0.35.$

Dakle, $\mathsf{D}\left((X+Y)^2\right) = \mathsf{E}\left((X+Y)^4\right) - \left(\mathsf{E}\left((X+Y)^2\right)\right)^2 = \frac{37}{105} - \left(\frac{11}{30}\right)^2 \approx 0.218.$

3 Statistika

U praksi je često potrebno doneti zaključke koji važe za veću grupu ljudi ili objekata. Umesto da ispitujemo celu grupu, koju nazivamo **populacija**, posmatraćemo samo jedan njen podskup koji nazivamo **uzorak**.

Obeležje je numerička karakteristika X elemenata ω populacije Ω. U terminima verovatnoće obeležju odgovara slučajna promenljiva.

Na slučaj se u uzorak bira n elemenata $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Na uzorku se registruju vrednosti obeležja $x_1 = X(\omega_1), x_2 = X(\omega_1), \ldots, x_n = X(\omega_n)$.

Dobijenu n-torku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nazivamo **realizovana vrednost** n-dimenzionalne slučajne promenljive $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Ako su slučajne promenljive $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisne i imaju istu raspodelu kao posmatrano obeležje X (tj. $F_{X_1} = F_{X_2} = \ldots = F_{X_n} = F$) , onda kažemo da je n-dimenzionalna slučajna promenljiva $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ **prost slučajni uzorak obima** n.

Funkcija raspodele prostog slučajnog uzorka za $(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ je

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = F(t_1)F(t_2) \cdots F(t_n).$$

Statistika je funkcija uzorka $Y = g(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

U razmatranju ćemo sretati uzorke obeležja koja odgovaraju **diskretnim** i **neprekidnim** slučajnim promenljivama.

3.1 Deskriptivna statistika

Najčešće korišćene statistike su aritmetička sredina uzorka i uzoračka disperzija.

Aritmetička sredina uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je slučajna promenljiva $\bar{X}_n$ definisana sa

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \, ,$$

a njenu realizovanu vrednost računamo preko realizovane vrednosti prostog slučajnog uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i obeležavamo malim slovom:

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) \, . \tag{3.1}$$

Uzoračka disperzija uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je slučajna promenljiva $\bar{S}_n^2$ definisana sa

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}_n^2 = \frac{1}{n}(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2) - \bar{X}_n^2 \ , \tag{3.2}$$

a njenu realizovanu vrednost obeležavamo malim slovom i računamo

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) - \bar{x}_n^2 \ . \tag{3.3}$$

Korigovana uzoračka disperzija $\hat{S}_n^2$ uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ se definiše

$$\hat{S}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \bar{S}_n^2 \, . \tag{3.4}$$

Uočimo interval $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$ koji sadrži sve vrednosti realizovanog uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Neka je $m_0 < m_1 < \ldots < m_k$ i $a := m_0$ i $b := m_k$. Time je interval $[a, b)$ razbijen na disjunktne intervale $I_1 = [m_0, m_1)$, $I_2 = [m_1, m_2)$, $\ldots$, $I_k = [m_{k-1}, m_k)$, čija je unija jednaka tom intervalu $[a, b)$.

Širine intervala se označavaju sa h_i, pa je $h_i := m_i - m_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
Sredine intervala se označavaju sa x_i, pa je $x_i := \frac{m_{i-1}+m_i}{2}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$.
Frekvencija f_i se definiše kao broj elemenata realizovanog uzorka koji pripadaju intervalu $I_i = [m_{i-1}, m_i)$. Prema tome zbir svih frekvencija nad svim intervalima I_i $i \in \{1, 2, .., k\}$, jednak je obimu uzorka n, to jest $f_1 + f_2 + ... + f_k = n$. **Korigovane frekvencije** dobijamo iz $f' = \dfrac{f_i}{h_i}$.

Intervalni uzorak. Često se u praksi ne čuvaju sve vrednosti uzorka, već samo granice intervala I_i, odnosno deobne tačke m_i, $i = 0, 1, \ldots k$ i frekvencije f_i, $i = 1, 2, \ldots k$. Takav uzorak zovemo **intervalni** uzorak. Intervalni uzorak nastaje grupisanjem elemenata početnog uzorka u intervale I_i. Ako raspolažemo samo intervalnim uzorkom moguća je delimična rekonstrukcija početnog uzorka sredinama intervala, tako što realizovanu vrednost uzorka aproksimiramo sredinom intervala kome pripada ta realizovana vrednost.

Kad se vrši rekonstrukcija intervalnog uzorka, uzima se da je svaki elemenat iz intervala $I_i = [m_{i-1}, m_i)$ jednak vrednosti koja predstavlja baš sredinu tog i-tog intervala koju označavamo sa x_i. **Formule za računanje aritmetičke sredine, uzoračke disperzije i standardne devijacije intervalnog uzorka** sa sredinama x_i, gde $i = 1, 2, \ldots, k$ i frekvencijama f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ su:

aritmetička sredina $$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_k f_k) \tag{3.5}$$

uzoračka disperzija $$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}_n^2 = \frac{1}{n}(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \ldots + x_k^2 f_k) - \bar{x}_n^2 \tag{3.6}$$

standardna devijacija

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}_n^2} = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 f_1 + x_2^2 f_2 + \ldots + x_k^2 f_k) - \bar{x}_n^2} \tag{3.7}$$

gde je $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f_i = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$.

Grafičko predstavljanje realizovanog uzorka obeležja X je veoma koristan način za vizuelno predstavljanje uzorka. U tehnike grafičkog prikazivanja spadaju, između ostalih, histogram i poligon.

Histogram se konstruiše tako što se nad svakim od intervala $I_i = [m_{i-1}, m_i)$ konstruiše pravougaonik čija je visina jednaka $\dfrac{f_i}{h_i}$ za sve $i \in \{1, 2, .., k\}$, gde je f_i frekvencija, a h_i širina i-tog intervala. Primere histograma pogledati u zadacima.

Poligon se konstruiše tako što uočimo još intervale I_0 i I_{k+1}, koji se nalaze redom ispred i iza intervala $I_1, I_2, \ldots, I_k$. Zatim konstruišemo sredine intervala I_0 i

I_{k+1} i sredine gornjih osnovica pravougaonika konstruisanih nad preostalim intervalima čije su visine $\frac{f_i}{h_i}$. Spajanjem redom ovih sredina dobija se izlomljena linija tj. poligon. Drugim rečima, poligon je izlomljena linija koja polazi od tačke $(x_0, 0)$, prolazi kroz tačke $(x_i, \frac{f_i}{h_i})$ i završava u tački $(x_{k+1}, 0)$, gde su x_i sredine intervala $I_i,\ i \in \{0, 1, \ldots, k, k+1\}$. Primere poligona pogledati u zadacima.

Empirijska (uzoračka) funkcija raspodele F_n^* obeležja X je funkcija definisana za svako x na sledeći način:

$$F_n^*(x) = \frac{N_x}{n}$$

gde N_x predstavlja broj elemenata uzorka koji imaju vrednost obeležja manju od x, a n je obim realizovanog uzorka. Ako je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ realizovana vrednost uzorka, tada ćemo permutaciju te n-torke čije su komponente u neopadajućem poretku obeležavati sa $(x_{(1)}, x_{(2)}, ..., x_{(n)})$. **Realizovana empirijska funkcija raspodele** f_n^* je tada data sa:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x \le x_{(1)} \\ \frac{n_{x_i}}{n} & \text{za} \quad x_{(i)} < x \le x_{(i+1)} \quad i \in \{1, 2, \ldots, n-1\} \\ 1 & \text{za} \quad x > x_{(n)} \end{cases}$$

gde n_{x_i} predstavlja realizovanu vrednost promenljive N_x na uzorku $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ako imamo intervalni uzorak tada će realizovana empirijska funkcija raspodele biti:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad x \le x_1 \\ \frac{n_{x_i}}{n} & \text{za} \quad x_i < x \le x_{i+1} \quad i \in \{1, 2, \ldots, k-1\} \\ 1 & \text{za} \quad x > x_k \end{cases}$$

gde sada $x_1, x_2, ..., x_k$ predstavljaju sredine postavljenih intervala $I_i = [m_{i-1}, m_i)$, $n_{x_i} = \sum_{j=1}^{i} f_j = f_1 + f_2 + \ldots + f_i$ odnosno $n_{x_{i+1}} = n_{x_i} + f_{i+1}$ gde je $n_{x_1} = f_1$ i $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Prilikom zapisa realizovane empirijske funkcije raspodele treba voditi računa da $x_1, x_2, ..., x_k$ predstavljaju sredine intervala.

Modus označavamo sa Mo. Kod *prostog* uzorka, modus predstavlja vrednost obeležja koje ima najveću frekvenciju. Drugim rečima to je vrednost obeležja koje se realizuje najveći broj puta. Sa grafika histograma i poligona lako uočavamo koja je od realizovanih vrednosti uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ najfrekventnija (koja se najviše puta ponavlja).

Ako je uzorak *intervalni* onda se modus nalazi na sledeći način

$$Mo = m_{s-1} + h_s \frac{r_1}{r_1 + r_2}. \tag{3.8}$$

Ako su širine svih intervala iste onda je interval sa najvećom frekvencijom modalni interval, a ako su širine intervala različite onda je interval sa najvećom korigovanom frekvencijom modalni interval. Sa $I_s = (m_{s-1}, m_s)$ predstavljamo modalni interval, $h_s = m_s - m_{s-1}$ je širina modalnog intervala, $r_1 = f_s - f_{s-1}$ predstavlja razliku između frekvencije modalnog (najfrekventnijeg) intervala f_s i frekvencije intervala koji prethodi modalnom f_{s-1}, $r_2 = f_s - f_{s+1}$ predstavlja razliku između frekvencije modalnog intervala f_s i frekvencije intervala posle modalnog f_{s+1}.

Obeležje može imati jedan ili više modusa. Različito grupisanje istih podataka može dati različite vrednosti modusa.

Medijana, koju označavamo sa Me, je broj koji uzorak deli na dva jednaka dela, tako da se levo i desno nalazi isti broj $x_{(i)}$-ova, odnosno u jednom delu se nalaze svi elementi koji imaju vrednost obeležja manju ili istu kao medijana, a u drugom svi elementi čija je vrednost obeležja veća ili jednaka medijani.

Kod *prostog* uzorka, nakon što elemente uzorka poređamo po veličini u neopadajući niz, medijanu računamo na sledeći način

$$Me = \begin{cases} x_{(\frac{n+1}{2})}, & n \text{ neparno} \\ \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}), & n \text{ parno} \end{cases} . \tag{3.9}$$

Ako je uzorak *intervalni*, bilo da su širine intervala jednake ili različite, a obim uzorka veličine n, onda se medijana računa na sledeći način

$$Me = m_{l-1} + h_l \frac{\frac{n}{2} - n_{x_{l-1}}}{f_l} \tag{3.10}$$

gde $I_l = (m_{l-1}, m_l)$ predstavlja medijalni interval. Medijalni interval I_l je interval sa najmanjom kumulativnom frekvencijom većom od $\frac{n}{2}$, f_l predstavlja frekvenciju medijalnog intervala, $h_l = m_l - m_{l-1}$ je širina medijalnog intervala, $n_{x_{l-1}} = \sum_{i=1}^{l-1} f_i$ predstavlja kumulativnu frekvenciju intervala I_{l-1} koji prethodi medijalnom intervalu I_l.

---

[140] *U domu zdravlja je vršeno merenje krvnog pritiska u mmHg kod 20 pacijenata. Dobijen je uzorak:*

87	103	130	160	180	195	132	145	211	105
145	153	152	138	87	99	93	119	129	145

(a) Odrediti modus i medijanu.

(b) Izračunati aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju.

Rešenje: Poređajmo vrednosti iz uzorka u neopadajući niz:

87	87	93	99	103	105	119	129	130	132
138	145	145	145	152	153	160	180	195	211

(a) Iz uzorka vidimo da je modus 145, jer je to vrednost sa najvećom frekvencijom $x_{(12)} = x_{(13)} = x_{(14)} = 145$.

S obzirom da je $n = 20$ (paran broj) medijanu nalazimo po formuli (3.9).

$$\frac{1}{2}(x_{(10)} + x_{(11)}) = \frac{1}{2}(132 + 138) = 135.$$

Dakle, medijana je 135.

(b) Aritmetičku sredinu uzorka računamo po formuli (3.1)

$$\bar{x}_{20} = \frac{1}{20}(87 + 87 + 93 + \ldots + 195 + 211) = \frac{2708}{20} = 135.4 \ .$$

Uzoračka disperzija se izračunava po formuli (3.3)

$$\bar{s}_{20}^2 = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i^2 - \bar{x}_{20}^2 = \frac{1}{20}389526 - 135.4^2 = 1143.14 \ .$$

Napomena: Za računanje aritmetičke sredine i uzoračke disperzije uzorak ne mora biti poređan u neopadajući niz.

---

[141] *U velikom marketu kod 13 slučajno odabranih kupaca koji su kupili sok u limenci izbrojan je broj komada limenki koje su kupci kupili odjednom: 2, 1, 5, 6, 8, 6, 3, 6, 7, 4, 2, 6, 3.*

(a) Odrediti medijanu i modus.

(b) Izračunati aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju.

Rešenje:

(a) Vrednosti iz uzorka poređamo u neopadajući niz:

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad \mathbf{5} \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8$$

Obim $n = 13$ (neparan broj), pa medijanu nalazimo po formuli (3.9).

$$Me = x_{(\frac{13+1}{2})} = x_{(7)} = 5 \ .$$

Iz uzorka vidimo da je modus $Mo = 6$, jer je to vrednost sa najvećom frekvencijom $x_{(8)} = x_{(9)} = x_{(10)} = x_{(11)} = 6$.

(b) Aritmetičku sredinu uzorka računamo po formuli (3.1)

$$\bar{x}_{20} = \frac{1}{13}(1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 + 6 + 6 + 7 + 8) = \frac{59}{13} = 4.538 \ .$$

Uzoračka disperzija se izračunava po formuli (3.3)

$$\bar{s}_{13}^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i^2 - \bar{x}_{13}^2 = \frac{1}{13}(1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2) - 4.538^2$$
$$= 25 - 20.5934 = 4.4066 \ .$$

[142] *Anketirano je 14 ljudi sa pitanjem koliko su telefonskih razgovora obavili prethodnog dana. Rezultati ankete su sledeći: 8, 3, 4, 6, 4, 3, 6, 8, 6, 4, 8, 2, 7, 5. Naći medijanu i modus.*

Rešenje: Vrednosti iz uzorka poređajmo u neopadajući niz:

$$2 \quad 3 \quad 3 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad \mathbf{5} \quad \mathbf{6} \quad 6 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 8 \quad 8$$

Obim $n = 14$ (paran broj), pa medijanu nalazimo po formuli (3.9).

$$Me = \frac{1}{2}(x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n}{2}+1)}) = \frac{1}{2}(x_{(\frac{14}{2})} + x_{(\frac{14}{2}+1)}) = \frac{1}{2}(x_{(7)} + x_{(8)}) = \frac{1}{2}(5+6) = 5.5 \ .$$

Iz uzorka vidimo da je modus $Mo_1 = 4$, $Mo_2 = 6$ i $Mo_3 = 8$ jer su to vrednosti sa najvećom frekvencijom $x_{(4)} = x_{(5)} = x_{(6)} = 4$, $x_{(8)} = x_{(9)} = x_{(10)} = 6$, $x_{(12)} = x_{(13)} = x_{(14)} = 8$.

---

[143] *Nakon merenja mase* 100 *učenika, rezultati merenja su grupisani u intervale* $[60, 62)$, $[62, 64)$, $[64, 66)$, $[66, 68)$, $[68, 70)$. *U tabeli su prikazani dobijeni podaci.*

masa [kg] I_i	$[60,62)$	$[62,64)$	$[64,66)$	$[66,68)$	$[68,70)$
broj učenika (frekvencija) f_i	5	18	42	27	8

(a) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.

(b) Odrediti modus i medijanu.

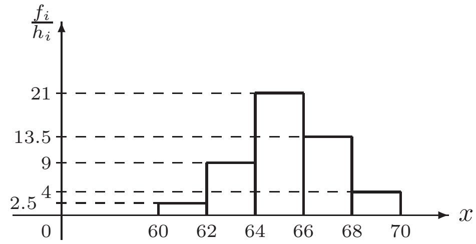
(c) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

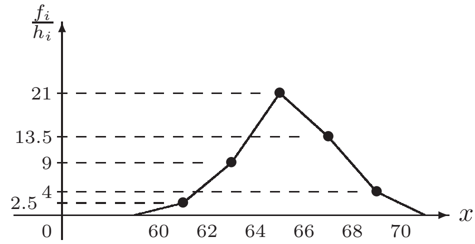
Rešenje:

(a) Dobijeni rezultati merenja učenika grupisani su u 5 intervala. Svi intervali su iste širine: $h_i = 2$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Izračunavanjem sredina intervala, po formuli $x_i = \frac{m_{i-1}+m_i}{2}$, $i \in \{1, \ldots, k\}$, dobijamo vrednosti $x_1 = 61$, $x_2 = 63$, $x_3 = 65$, $x_4 = 67$, $x_5 = 69$. Empirijsku funkciju raspodele označićemo sa $f_n^* = \frac{n_{x_i}}{n}$ gde je $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Svi dobijeni rezultati prikazani su u tabeli.

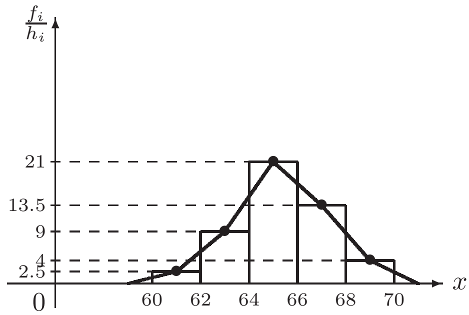
masa $[kg]$ I_k	$[60,62)$	$[62,64)$	$[64,66)$	$[66,68)$	$[68,70)$
broj učenika (frekvencija) f_i	5	18	42	27	8
sredina intervala x_i	61	63	65	67	69
$\frac{f_i}{h_i} = \frac{f_i}{2}$	2.5	9	21	13.5	4
kumulativna frekvencija n_{x_i}	5	23	65	92	100
$f_n^* = \frac{n_{x_i}}{n} = \frac{n_{x_i}}{100}$	0.05	0.23	0.65	0.92	1

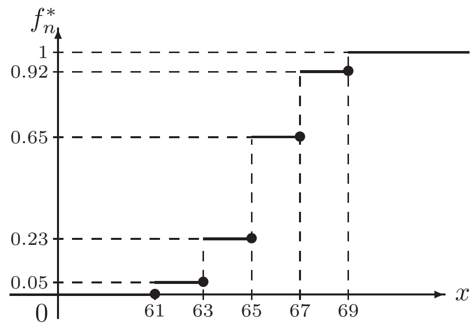
Sad možemo nacrtati histogram i poligon frekvencija.





Ako imamo nacrtan histogram, poligon frekvencija se lako dobija spajanjem sredina poklopaca stubova u histogramu. Radi jasnoće predstavićemo histogram i poligon na istom crtežu. Desno je grafikon empirijske funkcije raspodele.





Analitički zapis realizovane empirijske funkcije raspodele je

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 61 \\ 0.05, & \text{za} \quad 61 < x \leq 63 \\ 0.23, & \text{za} \quad 63 < x \leq 65 \\ 0.65, & \text{za} \quad 65 < x \leq 67 \\ 0.92, & \text{za} \quad 67 < x \leq 69 \\ 1, & \text{za} \quad x > 69 \end{cases} .$$

Pri zapisu realizovane empirijske funkcije raspodele voditi računa da su $61, 63, 65, 67, 69$ sredine datih intervala.

(b) Modus intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.8). Kako je interval sa najvećom frekvencijom modalni interval $[64, 66)$, $h = 2$, $r_1 = 42 - 18 = 24$, $r_2 = 42 - 27 = 15$. Tada je

$$Mo = 64 + 2\frac{24}{24 + 15} = 65.23 \ kg.$$

Medijana intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.10), gde je $n = 5 +$

$18+42+27+8=100$. Najmanja kumulativna frekvencija veća od $\frac{n}{2}=50$ je $n_{x_3}=65$, pa je medijalni interval $I_3=[64,66)$, njegov redni broj je $l=3$, širina mu je $h_l=66-64=2$, $k_{l-1}=23$, $f_l=42$. Tada je

$$Me=64+2\,\frac{50-23}{42}=65.29\ \ kg.$$

(c) Aritmetičku sredinu uzorka izračunavamo po formuli (3.5)

$$\bar{x}_{100}=\frac{1}{100}(61\cdot 5+63\cdot 18+65\cdot 42+67\cdot 27+69\cdot 8)=65.30\ \ kg.$$

Uzoračka disperzija je po formuli (3.6)

$$\bar{s}^2_{100}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{5}x_i^2f_i-\bar{x}^2_{100}=\frac{1}{100}(61^2\cdot 5+63^2\cdot 18+65^2\cdot 42+67^2\cdot 27+69^2\cdot 8)-$$
$$65.30^2=\frac{1}{100}426788-65.30^2=3.79\ \ .$$

---

[144] *Visine 40 učenika jednog razreda u centimetrima iznose*

150	*125*	*147*	*156*	*132*	*135*	*135*	*173*
136	*164*	*138*	*140*	*135*	*142*	*142*	*142*
143	*144*	*145*	*144*	*140*	*146*	*144*	*148*
149	*138*	*127*	*152*	*126*	*150*	*119*	*157*
158	*161*	*163*	*154*	*153*	*168*	*173*	*163*

(a) Formirati raspodelu frekvencija sa šest klasa čije su širine $9cm$.

(b) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.

(c) Odrediti modus i medijanu.

(d) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

Rešenje:

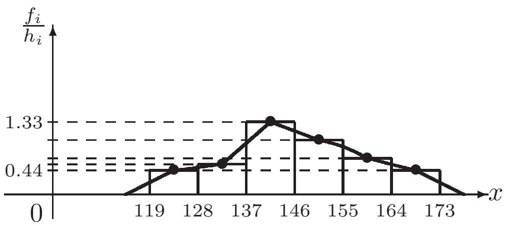
(a) Najmanja visina je 119. Polazeći od nje pravimo jednake intervale širine 9. Tako dobijamo tačke $m_0=119$, $m_1=128$, $m_2=137$, $m_3=146$, $m_4=155$, $m_5=164$, $m_6=173$. Broj intervala koji uključuju sve visine je $k=6$, jer je najveća visina 173. Potom prebrojimo koliko elemenata uzorka je upalo u koji interval i dobijemo frekvencije. To se lakše uradi ako se elementi uzorka sortiraju u neopadajući niz.

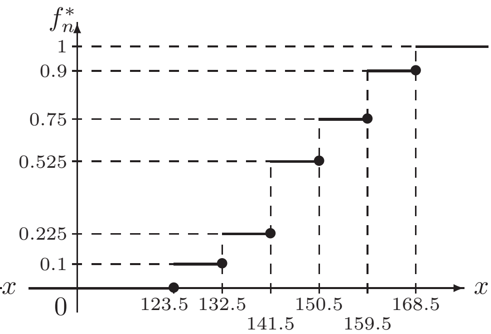
119	125	126	127 |	132	135	135	135
136 |	138	138	140	140	142	142	142
143	144	144	144	145 |	146	147	148
149	150	150	152	153	154 |	156	157
158	161	163	163 |	164	168	173	173

Napravićemo tabelu i u nju uneti potrebne veličine.

I_i	[119, 128)	[128,137)	[137, 146)	[146,155)	[155,164)	[164,173)
f_i	4	5	12	9	6	4
x_i	123.5	132.5	141.5	150.5	159.5	168.5
$\frac{f_i}{h_i}$	0.44	0.56	1.33	1.00	0.67	0.44
n_{x_i}	4	9	21	30	36	40
$f_n^* = \frac{n_{x_i}}{40}$	0.1	0.225	0.525	0.75	0.9	1

(b) Sad je lako nacrtati histogram i poligon frekvencija. Predstavićemo ih na istom crtežu. Crtamo i empirijsku funkciju raspodele.





Analitički zapis realizovane empirijske funkcije raspodele je

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 123.5 \\ 0.1, & \text{za} \quad 123.5 < x \leq 132.5 \\ 0.225, & \text{za} \quad 132.5 < x \leq 141.5 \\ 0.525, & \text{za} \quad 141.5 < x \leq 150.5 \\ 0.75, & \text{za} \quad 150.5 < x \leq 159.5 \\ 0.9, & \text{za} \quad 159.5 < x \leq 168.5 \\ 1, & \text{za} \quad x > 168.5 \ . \end{cases}$$

(c) Iz polaznog uzorka vidimo da je modus $Mo_1 = 135$, $Mo_2 = 142$ i $Mo_3 = 144$ dok se u ovom slučaju medijana izračunava po formuli (3.9)

$$Me = \frac{x_{(20)} + x_{(21)}}{2} = \frac{144 + 145}{2} = 144,5.$$

S obzirom da smo od polaznog uzorka napravili intervalni uzorak modus i medijana se mogu računati i na drugi način.
Iz intervalnog uzorka vidimo da je modalni interval $[137, 146)$ jer je kod njega najveća frekvencija (12). Modus izračunavamo pomoću formule (3.8), gde je

$h = 9$, $r_1 = 12 - 5 = 7$, $r_2 = 12 - 9 = 3$.

$$Mo = 137 + 9\frac{7}{7+3} = 143.3 \ .$$

U ovom slučaju medijalni interval je $[137, 146)$ (jer je 21 najmanja kumulativna frekvencija veći od $\frac{40}{2}$). Medijanu izračunavamo po formuli (3.10), gde je $h = 7$, $n_{x_{l-1}} = 9$, $f_l = 12$.

$$Me = 137 + 9\frac{20-9}{12} = 145.25 \ .$$

Uočimo razliku dobijenih rezultata. U praksi se koristi prvi način ako raspolažemo svim vrednostima uzorka.

(d) Aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju nalazimo kao u prethodnom zadatku:

$$\bar{x}_{40} = \frac{5840}{40} = 146, \qquad \bar{s}^2_{40} = \frac{859120}{40} - 146^2 = 162 \ .$$

---

[145] *Pet novčića se bacaju istovremeno 1000 puta. Pri svakom bacanju uočen je broj pojavljivanja glava. Rezultati su sređeni u tabeli.*

broj glava	0	1	2	3	4	5
broj bacanja	38	144	342	287	164	25

(a) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.

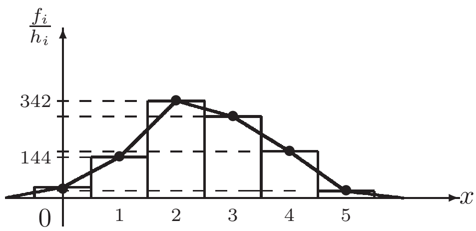
(b) Odrediti modus i medijanu.

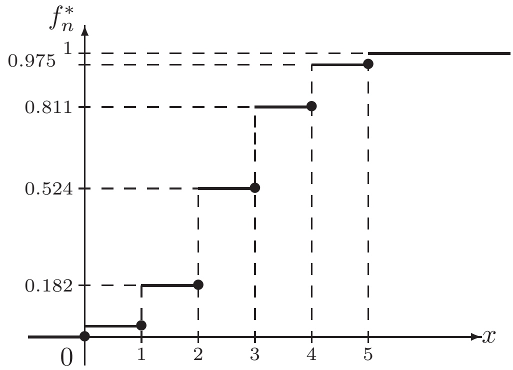
(c) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

Rešenje: Ovde imamo uzorak diskretnog obeležja. Stoga nam nisu dati intervali vrednosti obeležja već same vrednosti. Postupamo kao da su date vrednosti 0, 1, 2, 3, 4, 5 koje predstavljaju sredine intervala. Onda bi granice intervala bile u tačkama: -0.5, 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5. Širine intervala su $h_i = 1$, pa su korigovane frekvencije jednake frekvencijama.

(a) Napravićemo tabelu u koju ćemo uneti potrebne veličine.

I_i	[-0.5, 0.5)	[0.5, 1.5)	[1.5, 2.5)	[2.5, 3.5)	[3.5, 4.5)	[4.5, 5.5)
x_i	0	1	2	3	4	5
f_i	38	144	342	287	164	25
$\frac{f_i}{h_i}$	38	144	342	287	164	25
n_{x_i}	38	182	524	811	975	1000
$f_n^* = \frac{n_{x_i}}{1000}$	0.038	0.182	0.524	0.811	0.975	1





Analitički zapis realizovane empirijske funkcije raspodele je

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 0 \\ 0.038, & \text{za} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0.182, & \text{za} \quad 1 < x \leq 2 \\ 0.524, & \text{za} \quad 2 < x \leq 3 \\ 0.811, & \text{za} \quad 3 < x \leq 4 \\ 0.975, & \text{za} \quad 4 < x \leq 5 \\ 1, & \text{za} \quad x > 5 \end{cases} .$$

(b) $Mo = 2$, jer se najveći broj (to jest 342) puta desilo da se pri bacanju glava okrenula na tačno dva novčića.
$Me = \frac{x_{(500)}+x_{(501)}}{2} = \frac{2+2}{2} = 2$

(c) $\bar{x}_{1000} = \frac{144+2\cdot342+3\cdot287+4\cdot164+5\cdot25}{1000} = \frac{2470}{1000} = 2.47$

$$\bar{s}^2_{1000} = \frac{1}{1000}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 f_i - \bar{x}^2_{1000} = \frac{7344}{1000} - 2.47^2 = 1.2431 \ .$$

---

[146] *Izabrano je 80 vozača. Među izabranim vozačima merimo njihovu dnevnu potrošnju benzina izraženu u litrama. U tabeli su dati rezultati merenja.*

potrošnja benzina [l]	$[0,3)$	$[3,6)$	$[6,9)$	$[9,12)$	$[12,15)$
broj vozača	12	13	25	18	12

(a) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.

(b) Odrediti modus i medijanu.

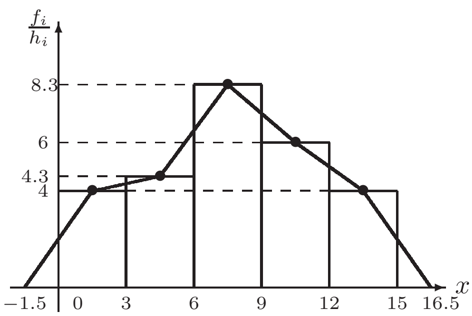
(c) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

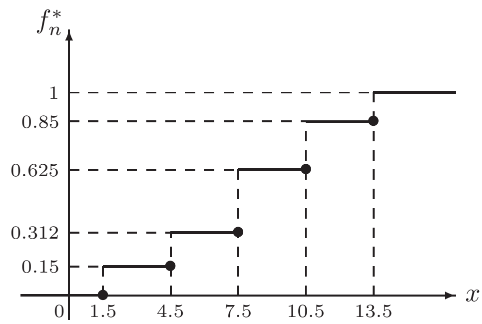
Rešenje:

(a)

potrošnja benzina $[l]$	$[0,3)$	$[3,6)$	$[6,9)$	$[9,12)$	$[12,15)$
broj vozača (frekvencija) f_i	12	13	25	18	12
sredina intervala x_i	1.5	4.5	7.5	10.5	13.5
$\frac{f_i}{h_i} = \frac{f_i}{3}$	4	4.33	8.33	6	4
kumulativna frekvencija n_{x_i}	12	25	50	68	80
$f_n^* = \frac{n_{x_i}}{n} = \frac{n_{x_i}}{80}$	0.15	0.312	0.625	0.85	1

Sad možemo nacrtati histogram i poligon frekvencija.





Analitički zapis realizovane empirijske funkcije raspodele je

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq 1.5 \\ 0.15, & \text{za} \quad 1.5 < x \leq 4.5 \\ 0.312, & \text{za} \quad 4.5 < x \leq 7.5 \\ 0.625, & \text{za} \quad 7.5 < x \leq 10.5 \\ 0.85, & \text{za} \quad 10.5 < x \leq 13.5 \\ 1, & \text{za} \quad x > 13.5 \end{cases}.$$

(b) Modus intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.8), gde je modalni interval $[6,9)$, $h = 3$, $r_1 = 25 - 13 = 12$, $r_2 = 25 - 18 = 7$. Tada je

$$Mo = 6 + 3\frac{12}{12+7} = 7.8947 \ \ l.$$

Medijana intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.10), gde je $n = 12 + 13 + 25 + 18 + 12 = 80$. Najmanja kumulativna frekvencija veća od $\frac{n}{2} = 40$ je $n_{x_3} = 50$, pa je medijalni interval $I_3 = [6,9)$, njegov redni broj je $l = 3$, širina mu je $h_l = 9 - 6 = 3$, $n_{x_{l-1}} = 25$, $f_l = 25$, te je $Me = 6 + 3 \cdot \frac{40-25}{25} = 7.8 \ \ l$.

(c) Aritmetičku sredinu uzorka izračunavamo po formuli (3.5)

$$\bar{x}_{80} = \frac{1}{80}(1.5 \cdot 12 + 4.5 \cdot 13 + 7.5 \cdot 25 + 10.5 \cdot 18 + 13.5 \cdot 12) = \frac{615}{80} = 7.6875 \ \ l.$$

Uzoračku disperziju izračunavamo po formuli (3.6)

$\bar{s}_{80}^2 = \dfrac{1}{80}(1.5^2 \cdot 12 + 4.5^2 \cdot 13 + 7.5^2 \cdot 25 + 10.5^2 \cdot 18 + 13.5^2 \cdot 12) - 7.6875^2 = \dfrac{1}{80} \cdot 5868 - 7.6875^2 = 73.35 - 59.0976 = 14.2524$.

---

[147] *U jednom gradu tokom 100 dana merena je najviša dnevna temperatura izražena u $^\circ C$. Dobijeni su sledeći rezultati merenja:*

temperatura u $^\circ C$	$[-2,0)$	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$
broj dana f_i	12	16	18	20	18	16

(a) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.

(b) Odrediti modus i medijanu.

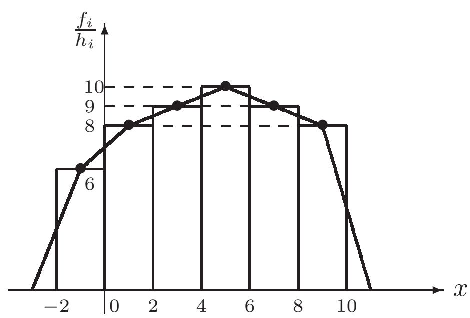
(c) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

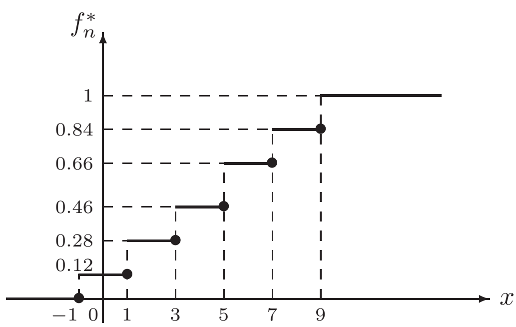
Rešenje:

(a)

temperatura u $^\circ C$	$[-2,0)$	$[0,2)$	$[2,4)$	$[4,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$
broj dana f_i	12	16	18	20	18	16
sredina intervala x_i	-1	1	3	5	7	9
$\frac{f_i}{h_i} = \frac{f_i}{2}$	6	8	9	10	9	8
kumulativna frekvencija n_{x_i}	12	28	46	66	84	100
$f_n^* = \frac{n_{x_i}}{n} = \frac{n_{x_i}}{100}$	0.12	0.28	0.46	0.66	0.84	1

Sad je lako nacrtati histogram i poligon frekvencija.





Analitički zapis realizovane empirijske funkcije raspodele je

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{za} \quad x \leq -1 \\ 0.12, & \text{za} \quad -1 < x \leq 1 \\ 0.28, & \text{za} \quad 1 < x \leq 3 \\ 0.46, & \text{za} \quad 3 < x \leq 5 \\ 0.66, & \text{za} \quad 5 < x \leq 7 \\ 0.84, & \text{za} \quad 7 < x \leq 9 \\ 1, & \text{za} \quad x > 9 \end{cases} .$$

(b) Modus intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.8), gde je modalni interval $[4, 6)$, $h = 2$, $r_1 = 20 - 18 = 2$, $r_2 = 20 - 18 = 2$. Tada je $Mo = 4 + 2\frac{2}{2+2} = 5$. Medijana intervalnog uzorka se izračunava po formuli (3.10), gde je $n = 12 + 16 + 18 + 20 + 18 + 16 = 100$. Najmanja kumulativna frekvencija veća od $\frac{n}{2} = 50$ je $n_{x_4} = 66$, pa je medijalni interval $I_4 = [4, 6)$, njegov redni broj je $l = 4$, širina mu je $h_l = 6 - 4 = 2$, $n_{x_{l-1}} = 46$, $f_l = 20$. Tada je $Me = 4 + 2 \cdot \frac{50-46}{20} = 4.4$.

(c) Aritmetičku sredinu uzorka izračunavamo po formuli (3.5)

$$\bar{x}_{100} = \frac{1}{100}(-1 \cdot 12 + 1 \cdot 16 + 3 \cdot 18 + 5 \cdot 20 + 7 \cdot 18 + 9 \cdot 16) = 4.28°C \ .$$

Uzoračku disperziju izračunavamo po formuli (3.6)

$$\bar{s}_{100}^2 = \frac{1}{100}((-1)^2 \cdot 12 + 1^2 \cdot 16 + 3^2 \cdot 18 + 5^2 \cdot 20 + 7^2 \cdot 18 + 9^2 \cdot 16) - 4.28^2 = \frac{1}{100}2868 - 4.28^2 = 10.3616.$$

---

[148] *Odstupanja merenja otpadnih parčadi žice u fabrici kablova u [cm] prikazana su u tabeli*

odstupanje	$[0, 2)$	$[2, 3)$	$[3, 4)$	$[4, 5)$	$[5, 6)$	$[6, 9)$
broj merenja	3	10	22	27	21	17

(a) Prikazati date podatke histogramom i poligonom frekvencija.

(b) Odrediti modus i medijanu.

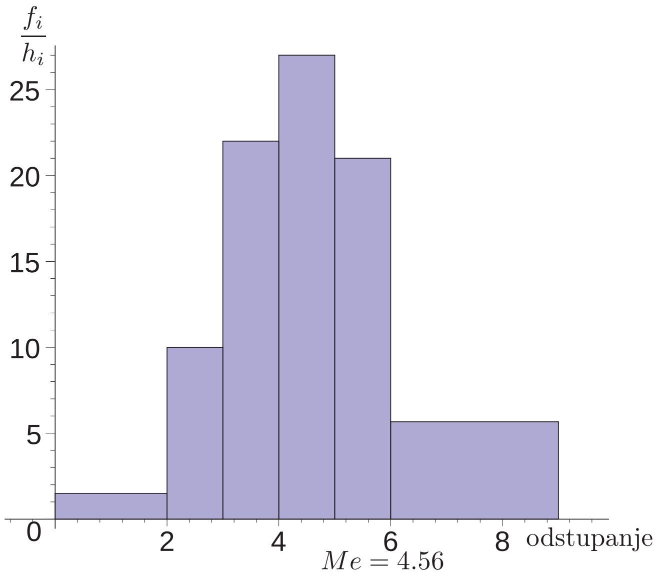
(c) Izračunati aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju.

Rešenje:

Uzorak je sređen po intervalima koji nisu jednake širine.

(a) Da bi smo olakšali račun napravićemo tablicu u koju ćemo uneti širine intervala h_i, kumulativne frekvencije $\sum f_i$ do posmatranog intervala i korigovane frekvencije $\frac{f_i}{h_i}$ koje nam služe da odredimo visine stubića u histogramu. Na istom crtežu ćemo spojiti sredine poklopaca stubića i dobiti poligon frekvencija.

odstupanje	$[0,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,9)$
f_i	3	10	22	27	21	17
x_i	1.0	2.5	3.5	4.5	5.5	7.5
h_i	2	1	1	1	1	3
$\frac{f_i}{h_i}$	1.5	10	22	27	21	5.67
n_{x_i}	3	13	35	62	83	100



(b) Modus intervalnog uzorka kod koga se širine intervala razlikuju izračunavamo po formuli (3.8), modalni interval je $[4,5)$ jer ima najveću korigovanu frekvenciju $\frac{f_i}{h_i} = 27$, $h = 1$, $r_1 = 27 - 22 = 5$, $r_2 = 27 - 21 = 6$. Tada je $Mo = 4 + 1\frac{5}{5+6} = 4.4545$.
Medijanu ćemo izračunati po formuli (3.10). Medijalni interval je $[4,5)$, jer njegova kumulativna frekvencija 62 prva prelazi preko $\frac{n}{2} = 50$. Ako se u tački medijane na histogramu postavi vertikalna prava, onda ona deli histogram na dva dela jednake površine. $Me = 4 + 1 \cdot \frac{50-35}{27} = 4.5556$.

(c) Aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju ćemo izračunati po formulama (3.5) i (3.6).

$$\bar{x}_n = \frac{1}{100}(1.0 \cdot 3 + 2.5 \cdot 10 + \cdots + 7.5 \cdot 17) = 4.695,$$

$$\begin{aligned} \bar{s}_n^2 &= \frac{1}{100}(1.0^2 \cdot 3 + 2.5^2 \cdot 10 + \cdots + 7.5^2 \cdot 17) - 4.695^2 \\ &= 24.7325 - 4.695^2 = 2.6895 \ . \end{aligned}$$

---

[149] *Dati su podaci anketiranih putnika GSP-a o tome koliko dugo su čekali autobus. Podaci o čekanju autobusa iskazani su u minutima.*

minuta	*[0, 2)*	*[2, 3)*	*[3, 4)*	*[4, 5)*	*[5, 6)*	*[6, 9)*	*[9, 17)*
putnika	*30*	*10*	*8*	*6*	*4*	*8*	*9*

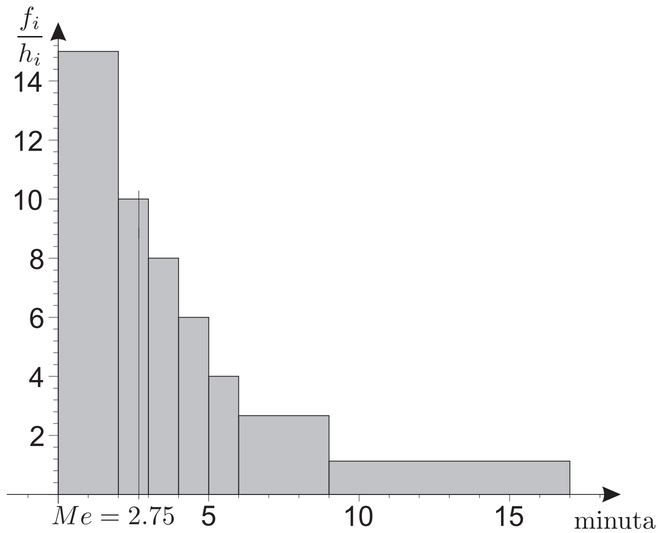
(a) Prikazati podatke histogramom.

(b) Izračunati modus, medijanu, aritmetičku sredinu, standardnu devijaciju.

Rešenje: Napravićemo tablicu sa potrebnim podacima.

(a)

I_i	[0, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 9)	[9, 17)
f_i	30	10	8	6	4	8	9
x_i	1	2.5	3.5	4.5	5.5	7.5	13
$\frac{f_i}{h_i}$	15	10	8	6	4	2.67	1.125
n_{x_i}	30	40	48	54	58	66	75



(b) Modus intervalnog uzorka kod koga se širine intervala razlikuju izračunavamo po formuli (3.8), modalni interval je $[0, 2)$ jer ima najveću korigovanu frekvenciju $\frac{f_i}{h_i} = 15$, $h = 2$, $r_1 = 30 - 0 = 30$, $r_2 = 30 - 10 = 20$. Tada je

$$Mo = 0 + 2\frac{30}{30 + 20} = 1.2\, min.$$

Medijalni interval je $[2, 3)$, jer njegova kumulativna frekvencija 40 prva prelazi preko $\frac{n}{2} = 37.5$. Medijana je $Me = 2 + 1 \cdot \frac{37.5-30}{10} = 2.75\, min.$

Aritmetička sredina je

$$\bar{x}_n = \tfrac{1}{75}(1 \cdot 30 + 2.5 \cdot 10 + \cdots + 13 \cdot 9) = 4.12\, min.$$

Standardna devijacija je

$$\bar{s}_n = \sqrt{\tfrac{1}{75}(1^2 \cdot 30 + 2.5^2 \cdot 10 + \cdots + 13^2 \cdot 9) - 4.12^2} = 3.8832\, min.$$

[150] *Kockica je bačena 30 puta i zabeleženi su pali brojevi.*

6	2	3	6	4	1	1	5	2	4
1	3	5	5	1	4	6	2	2	3
6	6	2	2	1	3	4	5	4	2

(a) Nacrtati poligon i empirijsku funkciju raspodele.

(b) Nacrtati stubičasti dijagram i pitu.

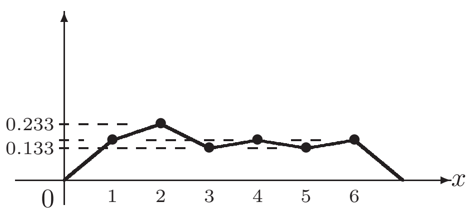
(c) Odrediti modus i medijanu.

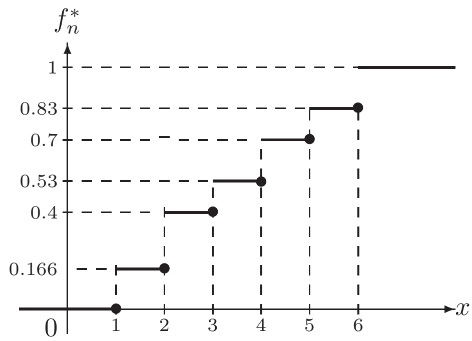
(d) Izračunati aritmetičku sredinu i uzoračku disperziju.

Rešenje:

(a) Poligon i empirijska funkcija raspodele

broj x_i	1	2	3	4	5	6
frekvencija f_i	5	7	4	5	4	5
$\frac{f_i}{n}$	0.166	0.233	0.133	0.166	0.133	0.166



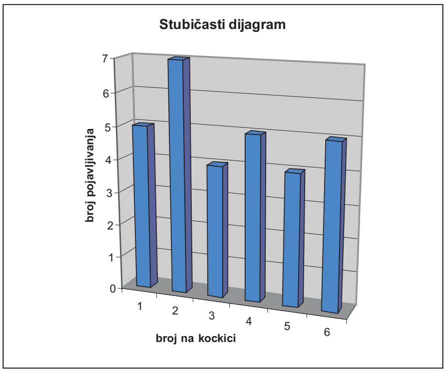


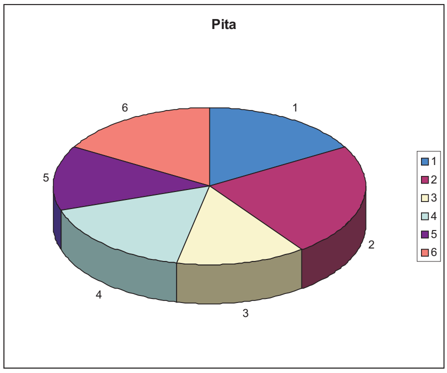
(b) Uzorak diskretnog obeležja koje nema mnogo različitih vrednosti grafički se predstavlja jednostavnim stubičastim dijagramom (engl. *bar chart*). Ako su vrednosti numeričke, onda se na x-osi iznad x_i nacrta stubić čija visina je jednaka frekvenciji f_i. Stubići se ne moraju dodirivati kao kod histograma i svi su iste širine.

Sa uzorkom diskretnog obeležja u kome ima mnogo različitih vrednosti možemo raditi kao da je obeležje neprekidno.

Ako su vrednosti statističkog eksperimenta deskriptivne, onda se kodiraju brojevima. Predstavljanje stubičastim dijagramom može se izvršiti i bez kodiranja, jednostavnim ređanjem stubića, čije su visine proporcionalne frekvencijama, jedan pored drugog. Različitim bojama ili labelama se može označiti kojoj vrednosti odgovara neki stubić.

Često je predstavljanje diskretnih podataka bolje ako se podaci predstave pomoću kružnog grafikona koji zovemo **pita** (engl. *pie chart*). Dužina luka (i površina) kružnog isečka proporcionalno odgovara frekvenciji vrednosti koju predstavlja.





(c) medijana: $\frac{x_{(15)}+x_{(16)}}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$ modus: 2

$\bar{x}_{30} = \frac{101}{30} = 3.366$ $\bar{s}_{30}^2 = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} x_i^2 - \bar{x}_{30}^2 = \frac{429}{30} - 3.366^2 = 2.971$

3.2 Teorija ocena

Teorija ocena je deo statistike koji se bavi ocenom parametara raspodele verovatnoće obeležja osnovne populacije pomoću uzorka. Posmatra se obeležje X sa raspodelom $F(x,\theta)$, gde je θ nepoznati parametar koji figuriše u datoj raspodeli F. Pomoću realizovanih vrednosti uzorka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ treba oceniti parametar θ ili njegovu funkciju $\tau(\theta)$.

Koriste se dve vrste ocena:

- **tačkaste ocene**, u kojima neka statistika $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ daje vrednost blisku nepoznatom parametru θ,
- **intervalne ocene**, koje koriste dve statistike $U_1 = u_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ i $U_2 = u_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ takve da je $U_1 \le U_2$ i da je $\mathsf{P}(U_1 < \theta < U_2) = \beta$, gde je β unapred zadata verovatnoća koju zovemo **nivo poverenja**. Slučajni interval (U_1, U_2) zovemo $100 \cdot \beta$ procentni **interval poverenja**.

3.2.1 Tačkaste ocene

Običan momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje slučajne promenljive X^k i označava se sa $m_k = E(X^k)$. Matematičko očekivanje je momenat reda 1.
Centralni momenat reda k slučajne promenljive X je matematičko očekivanje od $(X - \mathsf{E}(X))^k$ i označava se sa $s_k = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}(X))^k\right)$. Disperzija je centralni momenat reda 2.
Neki od načina određivanja tačkastih ocena su:

1. **Metod momenata**

Uzorački momenat reda k, $\overline{M_n^k}$ definišemo sa $\overline{M_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$, a njegova realizovana vrednost je $\overline{m_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k = \dfrac{1}{n}(x_1^k + x_2^k \ldots + x_n^k)$.

Primetimo da je uzoračka aritmetička sredina uzorački momenat prvog reda ($k = 1$).

Uzorački centralni momenat reda k je $\overline{S_n^k} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^k$.

Primetimo da je uzoračka disperzija uzorački centralni momenat drugog reda ($k = 2$).

Metod momenata se sastoji u izjednačavanju uzoračkog momenta $\overline{m_n^k}$ sa odgovarajućim običnim momentom m_k. Za ocenjivanje nepoznatog parametra θ najčešće ćemo koristiti jednakost momenata prvog reda i uzoračkog momenta prvog reda, to jest $\mathsf{E}(X) = \overline{X}_n$. Ako imamo više nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \ldots$ u raspodeli $\mathsf{F}_X(x, \theta_1, \theta_2, \ldots)$ obeležja X, onda obično koristimo onoliko jednačina koliki je broj nepoznatih parametara: $m_1 = \overline{m_n^1}, m_2 = \overline{m_n^2}, \ldots$

Rešavanjem sistema jednačina dobijamo vrednosti nepoznatih parametara. Sistem jednačina je često jednostavan za rešavanje te je metod momenata rasprostranjen u praksi.

Parametar θ će biti "dobro" ocenjen pomoću realizovane vrednosti statistike $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ ako je $\mathsf{E}(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$. Ovu osobinu zovemo centriranost ocene, to jest, ocena $\theta = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je **centrirana** ako je $\mathsf{E}(u(X_1, X_2, \ldots, X_n)) = \theta$.

Centriranu ocenu matematičkog očekivanja računamo rešavanjem jednačine $\overline{m_n^1} = \bar{x}_n$.

Korigovana uzoračka disperzija uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ je $\hat{S}_n^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{S}_n^2$, tako da centriranu ocenu disperzije računamo iz jednačine $\bar{\sigma}^2 = \hat{s}_n^2 = \dfrac{n}{n-1}\bar{s}_n^2$.

2. **Metod maksimalne verodostojnosti** je jedan od najčešće korišćenih metoda za dobijanje tačkastih ocena kod realizovanih uzoraka.

Neka je $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ uzorak obima n iz raspodele $F(x, \theta)$ obeležja X. **Funkcija verodostojnosti** je $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \ldots f(x_n, \theta)$, to jest

$$L(x_1, \ldots, x_n; \theta) = \begin{cases} \mathsf{p}(x_1, \theta)\mathsf{p}(x_2, \theta) \ldots \mathsf{p}(x_n, \theta), & \text{diskretno obeležje} \\ \varphi(x_1, \theta)\, \varphi(x_2, \theta) \ldots \varphi(x_n, \theta), & \text{neprekidno obeležje.} \end{cases} \tag{3.11}$$

Principom maksimalne verodostojnosti za ocenu nepoznatog parametra θ se uzima statistika za koju $L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)$ pri fiksnim, odnosno konkretnim vrednostima $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dostiže svoju najveću vrednost (maksimum). Ocena parametara pomoću metoda maksimalne verodostojnosti dobija se rešavanjem jednačine

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \ .$$

Međutim, jednostavnije je raditi sa logaritamskom funkcijom verodostojnosti

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \theta)}{\partial \theta} = 0 \tag{3.12}$$

koja, zbog monotonosti logaritamske funkcije, dostiže ekstremne vrednosti za iste vrednosti parametra θ za koje to postiže i funkcija L.
Ako u raspodeli obeležja X figuriše više nepoznatih parametara $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ postupak je analogan. Traži se maksimum funkcije $L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)$ i tada se jednačina verodostojnosti svodi na rešavanje sistema jednačina

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_n; \theta_1, \ldots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \ \text{ za } \ i = 1, \ldots, k.$$

---

[151] *Merenje prečnika sfere izraženo je u* [*cm*]. *Dobijen uzorak od pet merenja je*

$$6.33, \ 6.37, \ 6.36, \ 6.32, \ 6.37 \ .$$

Odrediti centrirane ocene matematičkog očekivanja i disperzije obeležja.

Rešenje: $\bar{m} = \bar{x}_5 = \frac{1}{5}(6.33 + 6.37 + 6.36 + 6.32 + 6.37) = 6.35$,

$\bar{\sigma}^2 = \hat{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}_n^2 = \frac{n}{n-1}\Big(\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i^2 - \bar{x}_5^2\Big) = \frac{5}{4}\Big(\frac{1}{5}(6.33^2 + 6.37^2 + 6.36^2 + 6.32^2 + 6.37^2) - 6.35^2\Big) = 0.00055$.

---

[152] *Anketiranjem* 100 *vozača automobila iz Novog Sada dobijene su prosečne dnevne potrošnje benzina* (*u litrima*).

potrošnja	2	4	5	6	8	10	11	12	13	14
broj vozača	5	10	10	12	18	12	8	10	9	6

Odrediti centrirane ocene matematičkog očekivanja i disperzije potrošnje benzina jednog vozača u Novom Sadu.

Rešenje: $\bar{x}_{100} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i f_i = \frac{1}{100}(2\cdot 5 + 4\cdot 10 + \ldots + 14\cdot 6) = 8.45$

$\bar{s}_{100}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}_{100}^2 = \frac{1}{100}(2^2\cdot 5 + 4^2\cdot 10 + \ldots + 14^2\cdot 6) - 8.45^2 = 11.7876$

Centrirana ocena matematičkog očekivanja je $\bar{m} = 8.45$.
Centrirana ocena disperzije je $\bar{\sigma}^2 = \frac{100}{99}\cdot \bar{s}_n^2 = 11.9066$.

---

[153] *Obeležje X date populacije ima raspodelu*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 7 \\ \frac{\theta}{5} & \frac{\theta}{5} & 1-\frac{2\theta}{5} \end{pmatrix}.$$

(a) *Metodom momenata naći ocenu nepoznatog parametra θ na osnovu uzorka $(0,-2,7,-2)$.*

(b) *Na osnovu istog uzorka naći ocenu nepoznatog parametra θ metodom maksimalne verodostojnosti.*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -2\cdot\frac{\theta}{5} + 0\cdot\frac{\theta}{5} + 7(1-\frac{2\theta}{5}) = 7 - \frac{16\theta}{5}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_4 = \bar{m}_4 = \frac{3}{4}$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_4$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $7 - \frac{16\theta}{5} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{25}{4} = \frac{16\theta}{5} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{125}{64} = 1.953125$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1,x_2,x_3,x_4;\theta) = \mathsf{P}(X=0)\cdot\mathsf{P}(X=-2)\cdot\mathsf{P}(X=7)\cdot\mathsf{P}(X=-2) =$
$\frac{\theta}{5}\cdot\frac{\theta}{5}\cdot(1-\frac{2\theta}{5})\cdot\frac{\theta}{5} = (\frac{\theta}{5})^3\cdot(1-\frac{2\theta}{5})$.
Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1,x_2,x_3,x_4;\theta) = 3\cdot\ln\frac{\theta}{5} + \ln(1-\frac{2\theta}{5})$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je

$$\frac{\partial \ln L(x_1,x_2,x_3,x_4;\theta)}{\partial\theta} = 3\cdot\frac{1}{\frac{\theta}{5}}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{(1-\frac{2\theta}{5})}\cdot(-\frac{2}{5}) = \frac{3}{\theta} - \frac{2}{5-2\theta} = \frac{15-8\theta}{\theta(5-2\theta)}\ .$$

Dalje, iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_4;\theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $15-8\theta=0$ odnosno $\tilde{\theta} = \frac{15}{8} = 1.875$.

---

[154] *Obeležje X date populacije ima raspodelu*

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{3} & 1-\theta & \frac{\theta}{3} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu uzorka $(1,1,0,0,0,-1,-1,2,2,2,2,-1,0)$ *naći ocenu nepoznatog parametra θ.*

(a) *Metodom momenata.*

(b) *Metodom maksimalne verodostojnosti.*

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -1\cdot\frac{\theta}{3} - 0\cdot\frac{\theta}{3} + 1\cdot(1-\theta) + 2\cdot\frac{\theta}{3} = 1 - \frac{2\theta}{3}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{13} = \bar{m}_{13} = \frac{7}{13}$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_{13}$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $1 - \frac{2\theta}{3} = \frac{7}{13} \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{9}{13} = 0.692$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta) = \mathsf{P}(X = -1)^3 \cdot \mathsf{P}(X = 0)^4 \cdot \mathsf{P}(X = 1)^2 \cdot \mathsf{P}(X = 2)^4 =$
$\left(\frac{\theta}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{\theta}{3}\right)^4 \cdot (1-\theta)^2 \cdot \left(\frac{\theta}{3}\right)^4 = \left(\frac{\theta}{3}\right)^{11}(1-\theta)^2$.
Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta) = 11 \cdot \ln\frac{\theta}{3} + 2\ln(1-\theta)$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je

$$\frac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta)}{\partial \theta} = 11 \cdot \frac{1}{\frac{\theta}{3}} \cdot \frac{1}{3} + 2\frac{1}{1-\theta}(-1) = \frac{11}{\theta} - \frac{2}{1-\theta} = \frac{11-13\theta}{\theta(1-\theta)} \quad .$$

Dalje, iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{13}; \theta)}{\partial \theta} = 0$ sledi da je $\dfrac{11-13\theta}{\theta(1-\theta)} = 0$ odnosno
$11 - 13\theta = 0 \Rightarrow \tilde{\theta} = \frac{11}{13} = 0.84615$.

---

[155] *Obeležje X date populacije ima raspodelu*

$$X : \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{\theta}{4} & \frac{\theta}{3} & \frac{\theta}{4} & 1 - \frac{5\theta}{6} \end{pmatrix}.$$

Na osnovu uzorka $(-2, -2, -1, 2, -2, 1, -2, -2, -2, -2)$ naći ocenu nepoznatog parametra θ.

(a) Metodom momenata.

(b) Metodom maksimalne verodostojnosti.

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Matematičko očekivanje obeležja je $\mathsf{E}(X) = -2\frac{\theta}{4} - \frac{\theta}{3} + \frac{\theta}{4} + 2(1 - 5\frac{\theta}{6}) = 2 - \frac{9\theta}{4}$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{10} = \bar{m}_{10} = -\frac{12}{10} = -1.2$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{m}_{10}$ dobijamo jednačinu iz koje izračunavamo nepoznati parametar θ: $2 - \frac{9\theta}{4} = -1.2 \Rightarrow \bar{\theta} = \frac{12.8}{9} = 1.422$.

(b) Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta) = \mathsf{P}(X = -2)^7 \cdot \mathsf{P}(X = -1) \cdot \mathsf{P}(X = 1) \cdot \mathsf{P}(X = 2) =$
$\left(\frac{\theta}{4}\right)^7 \cdot \frac{\theta}{3} \cdot \frac{\theta}{4} \cdot (1 - \frac{5\theta}{6}) = \left(\frac{\theta}{4}\right)^8 \cdot \frac{\theta}{3} \cdot (1 - \frac{5\theta}{6})$.

Logaritmovanjem gornje jednakosti dobijamo
$\ln L(x_1,\ldots,x_{10};\theta) = 8\cdot\ln\frac{\theta}{4} + \ln\frac{\theta}{3} + \ln(1-\frac{5\theta}{6})$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je
$\dfrac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_{10};\theta)}{\partial\theta} = 8\cdot\dfrac{1}{\frac{\theta}{4}}\cdot\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{\frac{\theta}{3}}\cdot\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{(1-\frac{5\theta}{6})}\cdot\left(-\dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{9}{\theta} - \dfrac{5}{6-5\theta} =$
$\dfrac{54-50\theta}{\theta(6-5\theta)}$.

Dalje, iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_{10};\theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $\dfrac{54-50\theta}{\theta(6-5\theta)} = 0$ odnosno
$\tilde{\theta} = \dfrac{54}{50} = 1.08.$

---

[156] *Broj poziva u minuti na informacijama autobuske stanice ima Poissonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$. Na slučajan način je izabrano 10 minuta u toku dana i zabeležen broj poziva $(2,3,3,2,0,3,2,1,3,1)$. Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra λ.*

Rešenje:

Obeležje X ima Poissonovu raspodelu $\mathcal{P}(\lambda)$, gde je $\mathsf{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0,1,\ldots$
Metod momenata:
Poznato je da je matematičko očekivanje $\mathsf{E}(X) = \lambda$.
Aritmetička sredina realizovanog uzorka je $\bar{x}_{10} = \frac{20}{10} = 2$.
Izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_n$ sledi da je nepoznati parametar $\bar{\lambda} = 2$.

Metod maksimalne verodostojnosti:
$L(x_1,\ldots,x_{10};\lambda) = \mathsf{P}(X=0)\cdot\mathsf{P}(X=1)^2\cdot\mathsf{P}(X=2)^3\cdot\mathsf{P}(X=3)^4 =$
$\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}\cdot(\frac{\lambda^1}{1!}e^{-\lambda})^2\cdot(\frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda})^3\cdot(\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda})^4 = \frac{\lambda^{20}}{2!3!}e^{-10\lambda}$
$\ln L(x_1,\ldots,x_{10};\lambda) = 20\ln\lambda - \ln 12 - 10\lambda$, a parcijalni izvod od $\ln L$ po λ je
$\dfrac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_{10},\lambda)}{\partial\lambda} = \dfrac{20}{\lambda} - 10$.
Dalje, iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_{10};\lambda)}{\partial\lambda} = 0$ sledi da je $\frac{20}{\lambda} - 10 = 0 \Rightarrow \tilde{\lambda} = 2$.

---

[157] *Reakcija oka na jednu vrstu nadražaja ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(a)$. Eksperiment je izvršen deset puta i dobijeni su rezultati (izraženi u nano sekundama):*

1.41, 1.28, 2.49, 0.95, 0.26, 3.83, 1.56, 3.87, 0.83, 3.37

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra a.

Rešenje:

Data je eksponencijalna raspodela $\mathcal{E}(a)$, njena funkcija gustine je

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}.$$

Metod momenata:
Poznato je da je matematičko očekivanje kod eksponencijalne raspodele $\mathsf{E}(X) = \dfrac{1}{a}$.

Ocenjujemo $\mathsf{E}(X)$ vrednošću $\bar{X}_n$. Dobijamo da je $\dfrac{1}{a} = \bar{x}_n \Rightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{19.85}{10} = 1.985$. Dakle, $\bar{a} = \frac{1}{1.985} \approx 0.504$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{10}; a) = \varphi(1.41) \cdot \varphi(1.28) \cdot \varphi(2.49) \cdot \ldots \cdot \varphi(3.37) = a^{10} e^{-a(1.41+1.28+2.49+\ldots+3.37)} = a^{10} e^{-19.85a}$, dok je
$\ln L(x_1, \ldots, x_{10}; a) = 10 \ln a - 19.85a$, a kako je $\dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; a)}{\partial a} = 10\dfrac{1}{a} - 19.85$,
iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; a)}{\partial a} = 0$ sledi da je $\dfrac{1}{a} = 1.985 \Rightarrow \tilde{a} = 0.504$.

---

[158] *Neka obeležje X ima gustinu*

$$\varphi_X(\theta, x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & x \in [0,1] \\ 0, & x \notin [0,1] \end{cases}, \theta > -1$$

Na slučajan način izabran je uzorak

0.92 0.79 0.9 0.65 0.86 0.47 0.73 0.97 0.94 0.77

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ.

Rešenje:
Metod momenata:
Za datu neprekidnu slučajnu promenljivu
$\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^1 x(\theta+1)x^\theta dx = (\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1} dx = \frac{\theta+1}{\theta+2} x^{\theta+2}\Big|_0^1 = \frac{\theta+1}{\theta+2}$.
Kako je $\bar{x}_n = \frac{8}{10} = 0.8$, izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_{10}$ dobijamo jednačinu $\dfrac{\theta+1}{\theta+2} = 0.8$, odakle je $\bar{\theta} = 3$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
Funkcija verodostojnosti je
$L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta) = \varphi(0.92) \cdot \varphi(0.79) \cdot \varphi(0.9) \cdot \varphi(0.65) \cdot \varphi(0.86) \cdot \varphi(0.47) \cdot \varphi(0.73) \cdot \varphi(0.97) \cdot \varphi(0.94) \cdot \varphi(0.77) = (\theta+1)^{10}(0.92 \cdot 0.79 \cdot 0.9 \cdot 0.65 \cdot 0.86 \cdot 0.47 \cdot 0.73 \cdot 0.97 \cdot 0.94 \cdot 0.77)^\theta = (\theta+1)^{10}(0.0880806)^\theta$, logaritmovanjem funkcije verodostojnosti L dobijamo
$\ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta) = 10 \ln(\theta+1) + \theta \ln 0.0880806$ i kako je
$\dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta)}{\partial \theta} = 10\dfrac{1}{\theta+1} + \ln 0.0880806$.
Iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1, \ldots, x_{10}; \theta)}{\partial \theta} = 0$ sledi da je $10\dfrac{1}{\theta+1} - 2.4295029 = 0$, odnosno $\tilde{\theta} = 3.116$.

---

[159] *Obeležje X ima gustinu raspodele:*

$$\varphi_X(\theta, x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \qquad \theta > 0$$

(a) Na slučajan način izabran je uzorak

$$1.2 \;\; 2.3 \;\; 1.3 \;\; 1.4 \;\; 1.6 \;\; 1.2 \;\; 2.1$$

Metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatog parametra θ.

(b) Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu parametra θ (za uzorak obima n)

Rešenje:

(a) Metod momenata:
Za datu neprekidnu slučajnu promenljivu
$\mathsf{E}(X) = \int\limits_0^\infty x\frac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\int\limits_0^\infty xe^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx$ ovaj integral rešićemo parcijalnom integracijom, gde je $u = x$ a $dv = e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx$, odakle je $du = dx$ i $v = -\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}$.
Dalje je $\mathsf{E}(X) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\Big(\big(-x\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\big)\Big|_0^\infty + \sqrt{\theta}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx\Big) = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\big(\sqrt{\theta}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx\big) = \int\limits_0^\infty e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}dx = -\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\Big|_0^\infty = \sqrt{\theta}$, jer je $\big(-x\sqrt{\theta}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}}\big)\Big|_0^\infty = 0$.
Kako je $\bar{x}_7 = \frac{11.1}{7} = 1.5857$, izjednačavanjem $\mathsf{E}(X)$ sa $\bar{x}_7$ dobijamo jednačinu $\sqrt{\theta} = 1.5857 \Rightarrow \bar{\theta} = 2.5145$.
Metod maksimalne verodostojnosti:
$L(x_1,\ldots,x_7;\theta) = \varphi(1.2)\cdot\varphi(2.3)\cdot\varphi(1.3)\cdot\varphi(1.4)\cdot\varphi(1.6)\cdot\varphi(1.2)\cdot\varphi(2.1) = \dfrac{1}{(\sqrt{\theta})^7}e^{-\frac{1.2+2.3+1.3+1.4+1.6+1.2+2.1}{\sqrt{\theta}}} = \dfrac{1}{\theta^{\frac{7}{2}}}e^{-\frac{11.1}{\sqrt{\theta}}}$. Kako je
$\ln L(x_1,\ldots,x_7;\theta) = -\dfrac{7}{2}\ln\theta - \dfrac{11.1}{\sqrt{\theta}}$, parcijalni izvod od $\ln L$ po θ je
$$\frac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_5;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{11.1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}} = \frac{-7\sqrt{\theta}+11.1}{2\theta\sqrt{\theta}} = 0.$$
Iz jednačine $\dfrac{\partial \ln L(x_1,\ldots,x_7;\theta)}{\partial\theta} = 0$ sledi da je $-7\sqrt{\theta} + 11.1 = 0$ to jest $\tilde{\theta} = 2.5145$.

(b) Funkcija verodostojnosti za uzorak obima n je

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{\theta}}e^{-\frac{x}{\sqrt{\theta}}} = \theta^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum\limits_{i=1}^n x_i},$$

$$\ln L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \ln\theta^{-\frac{n}{2}} + \ln e^{-\frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum\limits_{i=1}^n x_i} = -\frac{n}{2}\ln\theta - \frac{1}{\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Tražimo maksimum funkcije $\ln L$ po θ :

$$\frac{\partial \ln(x_1,\ldots,x_n;\theta)}{\partial\theta} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\theta} + \frac{1}{2}\theta^{-\frac{3}{2}}\sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \frac{-n\theta^{\frac{1}{2}} + \sum\limits_{i=1}^n x_i}{2\theta\sqrt{\theta}} = 0 \Rightarrow$$

$$-n\theta^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^n x_i = 0 \Rightarrow \sqrt{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \sqrt{\theta} = \overline{x}_n \Rightarrow \hat{\theta} = \overline{x}_n^2.$$

[160] *Neka obeležje X ima normalnu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu*

$$\varphi_{X(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na slučajan način izabran je uzorak od 100 *studenata. Bodovi koje su studenti osvojili na ispitu prikazani su u tabeli.*

osvojeni bodovi I_i	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
broj studenata (frekvencija) f_i	5	17	42	27	9

Metodom momenata naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Rešenje:

osvojeni bodovi I_i	$[0,20)$	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100]$
broj studenata (frekvencija) f_i	5	17	42	27	9
sredine intervala x_i	10	30	50	70	90

Kako je $\bar{x}_{100} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5} x_i f_i = \frac{1}{100}(10\cdot 5 + 30\cdot 17 + 50\cdot 42 + 70\cdot 27 + 90\cdot 9) = 53.6$ i $\bar{s}^2_{100} = \frac{1}{100}(10^2\cdot 5 + 30^2\cdot 17 + 50^2\cdot 42 + 70^2\cdot 27 + 90^2\cdot 9) - 53.6^2 = 3260 - 2872.96 = 387.04$, i kako kod normalne $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodele znamo da je $\mathsf{E}(X) = m$, a $\mathsf{D}(X) = \sigma^2$, metodom momenata ocenjujemo nepoznate parametre rešavanjem jednačina $m = \bar{x}_{100}$ i $\sigma^2 = \frac{n}{n-1}\bar{s}^2_{100}$, odakle dobijamo da je $m = 53.6$, a $\sigma^2 = \frac{100}{99}\cdot 387.04 = 390.9494$.

---

[161] *Neka obeležje X ima normalnu (Gausovu) $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelu*

$$\varphi_{X(x)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Na slučajan način izabran je uzorak

$$0 \;\; 2 \;\; 1 \;\; 2 \;\; 0 \;\; 1$$

Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Rešenje: Funkcija verodostojnosti je

$L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma) = \varphi(0)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(1)\cdot\varphi(2)\cdot\varphi(0)\cdot\varphi(1) =$

$$\frac{1}{\sigma^6(\sqrt{2\pi})^6} e^{-\frac{0^2+2^2+1^2+2^2+0^2+1^2-2(0+2+1+2+0+1)m+6m^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma^6(2\pi)^3} e^{-\frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2}}.$$

$$\ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma) = -\ln\sigma^6 2^3\pi^3 - \frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2} = -6\ln\sigma - 3\ln 2\pi - \frac{10-12m+6m^2}{2\sigma^2}.$$

S obzirom da imamo dva nepoznata parametra, radimo prvo izvod po nepoznatom parametru m, a zatim po nepoznatom parametru σ.

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma)}{\partial m} = -\frac{1}{2\sigma^2}(-12+12m) = 0 \Rightarrow -12+12m = 0.$$

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_6;m,\sigma)}{\partial \sigma} = -6\frac{1}{\sigma} - \frac{(10-12m+6m^2)}{2}(-2\sigma^{-3}) = \frac{-6\sigma^2+10-12m+6m^2}{\sigma^3} \Rightarrow$$
$-6\sigma^2+10-12m+6m^2 = 0.$

Rešavanjem sistema jednačina $-12+12m=0$ i $-6\sigma^2+10-12m+6m^2=0$, dobijamo da je $m=1$ i $\sigma^2=\frac{2}{3}$.

---

[162] *Neka je dat uzorak $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ iz normalne $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodele, gde su m i σ nepoznati parametri.*

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Metodom maksimalne verodostojnosti naći ocenu nepoznatih parametara m i σ.

Rešenje:

Funkcija verodostojnosti je

$$L(x_1,\dots,x_n;m,\sigma) = \varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)\cdot\ldots\cdot\varphi(x_n) = \frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{2\sigma^2}} \quad .$$

$$\ln L(x_1,\dots,x_n;m,\sigma) = -\ln\sigma^n(2\pi)^{\frac{n}{2}} - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{2\sigma^2} = -\frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{n}{2}\ln 2\pi - \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)^2}{2\sigma^2}.$$

S obzirom da imamo dva nepoznata parametra, radimo prvo izvod po nepoznatom parametru m, a zatim po nepoznatom parametru σ. Jednačine verodostojnosti su

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_n;m,\sigma)}{\partial m} = -2\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)}{2\sigma^2}\cdot(-1) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-m)}{\sigma^2} = 0 \Rightarrow$$
$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-m) = 0 \Rightarrow x_1-m+x_2-m+\ldots+x_n-m = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}x_i - nm = 0 \Rightarrow$$
$$m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \ .$$

Kako je σ pozitivan broj sledi da je maksimum izraza koji zavisi od σ isti kao da tražimo maksimum po σ^2.

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\dots,x_n;m,\sigma)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2(-\sigma^2)^{-2} =$$
$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = 0 \Rightarrow -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-m)^2 \ .$$

Rešavanjem sistema jednačina, dobili smo nepoznate parametre

$m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i = \bar{x}_n$ i $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x}_n)^2.$

3.2.2 Intervalne ocene

Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje m obeležja sa normalnom $\mathcal{N}(m,\sigma)$ raspodelom

- Ako je standardna devijacija σ obeležja poznata

$$\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

  gde je $\bar{X}_n$ aritmetička sredina uzorka, n obim uzorka, β zadati nivo poverenja a vrednost a se pronalazi u tablici normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele po obrascu $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

- Ako je standardna devijacija σ nepoznata,

$$\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + a\frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}\right),$$

  gde je $\bar{S}_n$ uzoračka standardna devijacija. Ako je obim uzorka $n \geq 30$, možemo primeniti centralnu graničnu teoremu i tada je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$. Ukoliko je $n < 30$, tada je $a = t_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}$ iz tablice Studentove raspodele.

Interval poverenja za nepoznatu disperziju σ^2 obeležja sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m,\sigma)$

$$\textbf{dvostrani: } \mathbf{I} = \left(\frac{n\bar{S}_n^2}{a}, \frac{n\bar{S}_n^2}{b}\right), \quad \textbf{jednostrani: } \mathbf{I} = \left(0, \frac{n\bar{S}_n^2}{c}\right)$$

U prethodnim izrazima n je obim uzorka, $\bar{S}_n^2$ je uzoračka disperzija, a vrednosti a, b i c čitamo iz tablice Pirsonove χ^2 raspodele, sa $n-1$ stepenom slobode:

$$a = \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}, \quad b = \chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}, \quad c = \chi^2_{n-1,\beta}.$$

Jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju ima za donju granicu broj 0, zato što disperzija ne može imati negativnu vrednost. Koristi se kod testiranja parametarskih hipoteza.

Interval poverenja za nepoznatu proporciju p obeležja sa binomnom $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelom

Proporcija p predstavlja verovatnoću uspešne realizacije obeležja sa binomnom raspodelom i ocenjuje se intervalom

$$\mathbf{I} = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}, p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right).$$

U prethodnom izrazu $p = \frac{K}{n}$, gde je K broj uspešnih realizacija u uzorku obima n, $q = 1-p$, a $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$.

Pomoću ovog intervala možemo oceniti i **nepoznat broj pozitivnih realizacija** obeležja sa binomnom $\mathcal{B}(n,p)$ raspodelom **u populaciji obima** N tako što ćemo obe granice intervala za proporciju pomnožiti obimom populacije N tj.

$$\mathbf{I} = \left(N(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}), N(p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}) \right).$$

---

[163] *Dati su podaci o visini u centimetrima 36 slučajno odabranih sportista jednog kluba. Naći 90% interval poverenja za srednju vrednost visine sportista ako je poznata standardna devijacija* $\sigma = 10cm$.

183.7,	*185.9,*	*178.0,*	*185.5,*	*185.1,*	*184.4,*	*184.3,*	*183.3,*	*184.4,*
165.2,	*178.9,*	*173.9,*	*173.7,*	*194.3,*	*186.3,*	*183.8,*	*173.4,*	*176.2,*
176.5,	*180.4,*	*177.1,*	*174.3,*	*187.6,*	*198.8,*	*188.1,*	*180.1,*	*187.1,*
164.9,	*172.6,*	*185.5,*	*167.9,*	*165.1,*	*199.2,*	*168.4,*	*169.1,*	*175.3*

Rešenje: Pretpostavljamo da obeležje koje posmatramo, visina sportiste, ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m,\sigma)$ (vidi napomenu). Srednja vrednost nekog obeležja je upravo matematičko očekivanje, pa zadatak rešavamo nalazeći interval poverenja za nepoznato očekivanje m sa poznatom devijacijom σ: $\mathbf{I} = \left(\bar{X}_n - a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + a\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.
Obim datog uzorka je $n = 36$, aritmetička sredina iznosi $\bar{x}_n = \frac{1}{36}(183.7 + 185.9 + \cdots + 175.3) = 179.9528$, a kako je zadati nivo poverenja $\beta = 0.90$, iz tablice Gausove raspodele čitamo da je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.90}{2}\right) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$.
Uvrštavanjem izračunatih vrednosti u formulu dobijamo da je

$$I = \left(179.9528 - 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}}, 179.9528 + 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{36}}\right).$$

Interval poverenja za srednju vrednost visine sportista posmatranog kluba, sa nivoom poverenja od 90%, je

$$(177.211cm, 182.694cm).$$

Napomena. Pretpostavka da posmatrano obeležje ima normalnu raspodelu ne važi uvek u praksi. Ali, centralna granična teorema nam garantuje da će za dovoljno veliko n rezultati dobijeni pomoću gornjih formula približno važiti za srednju vrednost posmatranog obeležja ako to obeležje ima raspodelu koja zadovoljava uslove centralne granične teoreme.
Napomena. U literaturi i kompjuterskim programima se često uvodi veličina $se(\bar{x}_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ koju nazivamo **standardna greška**, (engl. *standard error*). Takođe se u literaturi sa $z = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$ obeležava takozvana z**-vrednost** (engl. z*-value*). Sa tim oznakama formulu za interval poverenja pišemo $(\bar{x}_n - z \cdot se(\bar{x}_n), \bar{x}_n + z \cdot se(\bar{x}_n))$.

---

[164] *Aparat za merenje krvnog pritiska u mmHg je testiran na slučajno odabranim zdravim regrutima na regrutaciji. Izmerene vrednosti su: 118, 100, 119, 122, 113, 115,*

113, 131, 119, 118, 116, 136, 128, 114, 123, 125, 136, 119, 115, 124, 125, 120, 121, 128, 124, 102. Naći 99% interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta.

Rešenje: U ovom zadatku standardna devijacija obeležja nije poznata, pa koristimo interval poverenja za nepoznato očekivanje m sa nepoznatom devijacijom σ : $\mathbf{I} = (\bar{X}_n - a \cdot \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}}, \bar{X}_n + a \cdot \frac{\bar{S}_n}{\sqrt{n-1}})$.
Uzorak sadrži $n = 26$ elemenata, $\bar{x}_n = (118 + 100 + \cdots + 102)/26 = 120.154$, $\bar{s}_n = \sqrt{(118^2 + 100^2 + \cdots + 102^2)/26 - 120.154^2} = 8.3006$. Pošto je obim uzorka manji od 30, vrednost a nalazimo iz tablice Studentove raspodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.99$, $a = t_{26-1,\frac{1+0.99}{2}} = t_{25,0.995} = 2.787$.

Traženi interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta je

$$I = (120.154 - \frac{2.787 \times 8.30057}{\sqrt{25}}, 120.154 + \frac{2.787 \times 8.30057}{\sqrt{25}}) = (115.527, 124.781).$$

---

[165] *U tabeli*

ocena	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
broj đaka	*5*	*9*	*4*	*5*	*5*

su prikazane ocene na pismenom ispitu u slučajno odabranom odeljenju petog razreda. Poznato je da se ocene ponašaju u skladu sa Normalnom raspodelom. Proceniti 95%-im intervalom poverenja srednju ocenu na pismenom u petim razredima, ako

(a) je poznato da standardno odstupanje ocena na pismenom iznosi $\sigma = 1.4$.

(b) standardno odstupanje ocena na pismenom nije poznato.

Rešenje: Deo zadatka pod (a) rešavamo pomoću intervala poverenja za nepoznato m sa poznatim σ. Podaci su dati u vidu grupisanog uzorka, tako da je obim uzorka $n = 5 + 9 + 4 + 5 + 5 = 28$ i $\bar{x}_n = \frac{1}{28}(1 \cdot 5 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 5) = 2.8571$.
Za $\beta = 0.95$, $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$.
Interval poverenja za srednju ocenu je

$$(2.8571 - 1.96\frac{1.4}{\sqrt{28}}, 2.8571 + 1.96\frac{1.4}{\sqrt{28}}) = (2.3385, 3.3757).$$

Kako u zadatku pod (b) standardna devijacija (odstupanje) nije poznata, koristimo interval poverenja za nepoznato m sa nepoznatim σ. Nepoznatu standardnu devijaciju ocenjujemo uzoračkom standardnom devijacijom

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{1}{28}(1^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 9 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 5 + 5^2 \cdot 5) - 2.8571^2} = \sqrt{1.9084} = 1.4073.$$

Obim uzorka je manji od 30, tako da je $a = t_{28-1,\frac{1+0.95}{2}} = t_{27,0.975} = 2.052$.
Interval poverenja za srednju ocenu u ovom slučaju je

$$(2.8571 - 2.052\frac{1.4073}{\sqrt{27}}, 2.8571 + 2.052\frac{1.4073}{\sqrt{27}}) = (2.3014, 3.4128).$$

Napomena. U većini slučajeva, pa tako i ovde, možemo uočiti da poznavanje standardne devijacije obeležja smanjuje interval poverenja, odnosno povećava preciznost ocene nepoznatog očekivanja. Međutim, ovaj podatak u praksi najčešće nije poznat.

---

[166] *Kontrola kvaliteta u fabrici za proizvodnju deterdženta je izmerila masu pojedinačnih pakovanja iz slučajno odabranog uzorka. Rezultati su dati u tabeli.*

masa [g]	*[4800, 4900)*	*[4900, 4950)*	*[4950, 5000)*	*[5000, 5050)*	*[5050, 5100)*	*[5100, 5200]*
f_i	*8*	*31*	*96*	*109*	*48*	*8*

(a) Naći 95% interval poverenja za prosečnu masu deterdženta u jednom pakovanju.

(b) Naći 99% interval poverenja za prosečnu masu deterdženta u jednom pakovanju.

Rešenje: Standardna devijacija posmatranog obeležja (masa deterdženta) nije poznata, i zato koristimo formulu za interval poverenja za matematičko očekivanje sa nepoznatim σ. Uzorak je intervalni, pa potrebne vrednosti računamo na sledeći način: $n = \sum f_i = 8 + 31 + ... + 8 = 300$,

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum(x_i f_i) = \frac{1}{300}(48508 \cdot 8 + 4925 \cdot 31 + ... + 5150 \cdot 8) = 5005.33,$$

$$\bar{s}_n = \sqrt{\frac{1}{300}(4850^2 \cdot 8 + 4925^2 \cdot 31 + ... + 5150^2 \cdot 8) - 5005.33^2} = 55.7965.$$

Obim uzorka je veći od 30, pa za određivanje vrednosti koristimo tablicu Gausove raspodele. U delu zadatka pod (a) je $a_1 = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$, dok je u delu pod (b) $a_2 = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.99}{2}\right) = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$.
Uvrštavanjem izračunatih vrednosti dobijamo intervale poverenja za očekivanu masu deterdženta:

$$(a)\ I_{95\%} = (5005.33 - 1.96\frac{55.7965}{\sqrt{299}}, 5005.33 + 1.96\frac{55.7965}{\sqrt{299}}) = (4999.01, 5011.65),$$

$$(b)\ I_{99\%} = (5005.33 - 2.576\frac{55.7965}{\sqrt{299}}, 5005.33 + 2.576\frac{55.7965}{\sqrt{299}}) = (4997.02, 5013.64).$$

Napomena. Uočavamo da se povećanjem nivoa poverenja povećava i odgovarajući interval poverenja. Ovo oslikava zakonitost koja važi kod svih statističkih ispitivanja - veća pouzdanost vodi do manje preciznosti i obrnuto. Zbog ove zakonitosti ne možemo birati prevelike nivoe poverenja (npr. 0.999 i slično) jer bi odgovarajući intervali poverenja bili previše široki i stoga praktično neupotrebljivi.

---

[167] *Od 1000 novorođenčadi u jednom porodilištu 517 su bili dečaci. Naći 90% interval poverenja za procenat dečaka.*

Rešenje: Nepoznati procenat dečaka ćemo oceniti pomoću intervala poverenja za nepoznatu proporciju p: $\mathbf{I} = \left(p - a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}, p + a\sqrt{\frac{pq}{n-1}}\right)$.
Posmatrani uzorak je obima $n = 1000$ i u njemu je bilo $k = 517$ uspešnih realizacija, tako da je realizovana proporcija $\bar{p} = \frac{517}{1000} = 0.517$ i $\bar{q} = 1 - 0.517 = 0.483$. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.9$, tablična vrednost $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.9}{2}\right) = \phi^{-1}(0.95) = 1.645$.
Traženi interval poverenja je

$$\left(0.517 - 1.645\sqrt{\frac{0.517 \cdot 0.483}{999}}, 0.517 + 1.645\sqrt{\frac{0.517 \cdot 0.483}{999}}\right) = (0.491, 0.543),$$

odnosno sa nivoom poverenja 90% možemo tvrditi da će biti između 49.1% i 54.3% dečaka.

---

[168] *Kontrola kvaliteta iz zadatka* [166] *treba da utvrdi 95% interval poverenja za proporciju pakovanja čija je masa van dozvoljenog odstupanja tj. ispod* 4900 g *ili preko* 5100 g. *Ako se godišnje proizvede 350000 pakovanja deterdženta, odrediti 95% interval poverenja za broj pakovanja koja su nepropisne mase.*

Rešenje: Iz tablice date u zadatku [166] vidimo da je broj pakovanja iz kontrolnog uzorka koji imaju manje od 4900 g jednak 8, isto kao i broj onih koji imaju više od 5100 g. Stoga je broj uspešnih realizacija $k = 8 + 8 = 16$ (pod uspehom uvek podrazumevamo ono što je od interesa u zadatku, u ovom konkretnom slučaju uspeh je kada je pakovanje nepropisne mase). Obim uzorka $n = 300$, pa je $\bar{p} = \frac{16}{300} = 0.053$ i $\bar{q} = 1 - 0.053 = 0.947$. Tablična vrednost $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = 1.96$.
Uvrštavanjem dobijenih rezultata u obrazac za interval poverenja za nepoznatu proporciju, dobijamo

$$\left(0.053 - 1.96\sqrt{\frac{0.053 \cdot 0.947}{299}}, 0.053 + 1.96\sqrt{\frac{0.053 \cdot 0.947}{299}}\right) = (0.0276, 0.0783).$$

Kako je obim cele populacije jednak godišnjoj proizvodnji $N = 350000$, dobijamo da je 95% interval poverenja za broj pakovanja koja su nepropisne mase

$$(350000 \cdot 0.0276, 350000 \cdot 0.0783) = (9660, 27405).$$

---

[169] *Na jednoj kontrolnoj tački puta izmerena je brzina slučajno odabranih automobila i rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

brzina [km/h]	*[60, 80]*	*(80, 90]*	*(90, 100]*	*(100, 110]*	*(110, 120]*	*(120, 140]*
f_i	*5*	*20*	*36*	*23*	*15*	*1*

(a) *Naći 95% interval poverenja za prosečnu brzinu automobila na toj kontrolnoj tački.*

(b) *Naći 99% interval poverenja za prosečnu brzinu automobila na toj kontrolnoj tački, ako je poznata standardna devijacija $\sigma = 11.2$.*

(c) *Ako je najveća dozvoljena brzina na tom delu puta 90 km/h, odrediti 90% interval poverenja za procenat automobila koji se kreću nedozvoljenom brzinom.*

(d) *Ako u toku jednog dana tim putem prođe 1200 automobila, i ako je kazna za prekoračenje brzine 1500 RSD, odrediti 90% interval poverenja za iznos novca koji bi sakupila saobraćajna policija ako bi naplatila kaznu svima koji su tog dana i na tom mestu prekoračili brzinu.*

Rešenje:

(a) Vrednosti potrebnih statistika su $n = 100$, $\bar{x}_n = 97.4$, $\bar{s}_n = 11.863$, tablična vrednost je $a = 1.96$, pa je odgovarajući interval poverenja

$$I = (95.063 km/h,\ 99.737 km/h).$$

(b) Vrednosti potrebnih statistika su $n = 100$, $\bar{x}_n = 97.4$, $\sigma = 11.2$, tablična vrednost je $a = 2.576$, pa je odgovarajući interval poverenja

$$I = (94.515 km/h,\ 100.285 km/h).$$

(c) Obim uzorka je $n = 100$, uzoračka proporcija je $\bar{p} = 0.75$, $\bar{q} = 0.25$, a tablična vrednost $a = 1.645$. Sledi da je

$$I = (67.8\%,\ 82.2\%).$$

(d) Interval poverenja dobijamo množenjem granica prethodnog intervala $I = (1200 \cdot 1500 \cdot 0.678, 1200 \cdot 1500 \cdot 0.822) = (1220400\ RSD,\ 1479600\ RSD)$.

---

[170] *Iz obeležja sa normalnom raspodelom uzet je uzorak obima $n = 27$. Izračunata je uzoračka disperzija $\bar{s}^2_{27} = 9.7344$. Naći dvostrani i jednostrani interval poverenja za disperziju sa nivoom poverenja $\beta = 0.95$.*

Rešenje: Intervale poverenja za nepoznatu disperziju obeležja sa normalnom raspodelom nalazimo pomoću sledećih formula: $\mathbf{I} = \left(\frac{n\bar{S}^2_n}{a}, \frac{n\bar{S}^2_n}{b}\right)$, i $\mathbf{I} = \left(0, \frac{n\bar{S}^2_n}{c}\right)$.
Obim uzorka i uzoračka disperzija su poznati: $n = 27$ i $\bar{s}^2_{27} = 9.7344$, tako da još treba odrediti tablične vrenosti iz tablice χ^2 rapodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.95$, imamo da je
$a = \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{27-1,\frac{1+0.95}{2}} = \chi^2_{26,0.975} = 41.9$, $b = \chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{27-1,\frac{1-0.95}{2}} = \chi^2_{26,0.025} = 13.8$, $c = \chi^2_{26,0.95} = 38.9$.
Dakle, dvostrani interval je

$$I = \left(\frac{27 \times 9.7344}{41.9}, \frac{27 \times 9.7344}{13.8}\right) = (6.27, 19.05),$$

a jednostrani

$$I = \left(0, \frac{n\bar{S}_n^2}{c}\right) = \left(0, \frac{27 \times 9.7344}{38.9}\right) = (0, 6.76).$$

---

[171] *Uz pretpostavku da obeležje „masa pakovanja" iz zadatka* [166] *ima normalnu raspodelu, izračunati 98-procentni dvostrani i jednostrani interval poverenja za nepoznatu disperziju uzorka.*

Rešenje: Iz zadatka [166] imamo $\bar{s}_n^2 = 3113.25$, $n = 300$. Za $\beta = 0.98$ nemamo vrednost za dato n u tablicama. Ipak, vrednosti a i b možemo približno izračunati koristeći centralnu graničnu teoremu.

Očekivanje za slučajnu promenljivu sa χ_n^2 raspodelom je n, a disperzija $2n$. Za naš interval poverenja koristimo slučajnu promenljivu sa χ_{n-1}^2 raspodelom.

$$\mathsf{P}\left(\chi_{n-1}^2 < b\right) = \mathsf{P}\left(\frac{\chi_{n-1}^2 - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} < \frac{b-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\right) = 0.99\,.$$

Iz centralne granične teoreme sledi da je $\frac{b-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \approx \phi^{-1}(0.99) = 2.33$.

Odatle dobijamo $b \approx 299 + 2.33\sqrt{2 \cdot 299} = 355.978$.

Slično iz

$$\mathsf{P}\left(a < \chi_{n-1}^2\right) = \mathsf{P}\left(\frac{a-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} < \frac{\chi_{n-1}^2 - (n-1)}{\sqrt{2(n-1)}}\right) = 0.99$$

sledi da je $\frac{a-(n-1)}{\sqrt{2(n-1)}} \approx -\phi^{-1}(0.99) \approx -2.33$. Odatle $a \approx 299 - 2.33\sqrt{2 \cdot 299} = 242.111$.

Kako je $\mathsf{P}\left(a < \chi_{n-1}^2 < b\right) \approx 0.98$, dobijamo 98-procentni interval poverenja za σ^2:

$$\sigma^2 \in \left(\frac{300\bar{s}_n^2}{b}, \frac{300\bar{s}_n^2}{a}\right) = \left(\frac{300 \times 3113.25}{355.978}, \frac{300 \times 3113.25}{242.111}\right) = (2623.69, 3857.63)\,.$$

3.3 Statistički testovi

Ako znamo realizovane vrednosti prostog slučajnog uzorka obeležja X, možemo postaviti neke pretpostavke o raspodeli obeležja X, takozvane **statističke hipoteze**. Ako se hipoteza odnosi na vrednost parametra poznatog oblika raspodele, tada je u pitanju **parametarska hipoteza**, a ako se pretpostavka odnosi na funkciju raspodele, onda je to **neparametarska hipoteza**.

Provera hipoteze se naziva **statistički test**. Kod svakog statističkog testa unapred je definisan **prag značajnosti** α, koji predstavlja najveću dozvoljenu verovatnoću greške I vrste tj. verovatnoću da smo nultu hipotezu odbacili iako je zapravo tačna.

Obradićemo nekoliko parametarskih i neparametarskih testova.

3.3.1 Parametarski testovi

Zajednička karakteristika svih parametarskih testova je da unapred znamo raspodelu obeležja, a testom proveravamo pretpostavljene vrednosti pojedinih parametara te raspodele (npr. m ili σ kod normalne raspodele, p kod binomne raspodele, itd...). Razlikujemo dve osnovne kategorije ovih testova:

- parametarske testove jednog uzorka;
- parametarske testove dva uzorka.

Kod parametarskih testova **jednog uzorka** nulta hipoteza je oblika $H_0(\theta = \theta_0)$, gde je θ nepoznati parametar raspodele obeležja, a θ_0 njegova pretpostavljena vrednost. Osnovni način provere ovakvih hipoteza je pomoću **statističkog testa značajnosti**, koji se sastoji u tome da odaberemo odgovarajuću statistiku $U = u(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ u kojoj figuriše nepoznati parametar θ i čija raspodela nam je poznata. Uz pretpostavku da je $\theta = \theta_0$, dobićemo konkretnu vrednost statistike $U = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ako je α^*, verovatnoća odstupanja statistike U od realizovane vrednosti, manja od unapred zadatog praga značajnosti α, hipotezu odbacujemo, u protivnom je ne odbacujemo. Alternativni način provere parametarskih hipoteza jednog uzorka je pomoću **intervala poverenja**. Za zadati prag značajnosti α napravimo interval poverenja $\mathbf{I}$ za traženi parametar θ, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha$. Ako pretpostavljena vrednost $\theta_0 \in \mathbf{I}$, nultu hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α. U protivnom je odbacujemo.

Kod parametarskih testova **dva uzorka** cilj je da utvrdimo da li dva uzorka pripadaju istoj populaciji tj. da li imaju iste vrednosti parametara raspodele. Zbog toga je nulta hipoteza oblika $H_0(\theta_1 = \theta_2)$.

I **Test jednakosti srednjih vrednosti dva uzorka sa normalnom raspodelom**

Nulta hipoteza je oblika $H_0(m_1 = m_2)$. Ovaj test se koristi samo kada se standardne devijacije mogu smatrati jednakim. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, $\bar{X}_1$ i $\bar{X}_2$ aritmetičke sredine, a $\bar{S}_1^2$ i $\bar{S}_2^2$ uzoračke disperzije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$.

- Ako je $n_1 + n_2 \geq 30$, možemo koristiti aproksimaciju standardizovanom normalnom raspodelom. Tada pravimo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{\bar{S}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{S}_2^2}{n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako realizovana vrednost $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

- Ako je $n_1 + n_2 < 30$, korististimo Studentovu raspodelu. Tada pravimo statistiku

$$T_0 = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}, \quad Se(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \sqrt{\frac{(n_1 - 1)\bar{S}_1^2 + (n_2 - 1)\bar{S}_2^2}{n_1 + n_2 - 2} \cdot \frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $t_0 \in (-a, a)$, gde je $a = t_{n_1+n_2-2,\frac{1+\beta}{2}}$, a u protivnom je odbacujemo.

II **Test jednakosti proporcija dva uzorka sa binomnom raspodelom**
Nulta hipoteza je oblika $H_0(p_1 = p_2)$. Neka su n_1 i n_2 obimi uzoraka, k_1 i k_2 brojevi pozitivnih realizacija u uzorcima, a $\bar{p}_1 = \frac{k_1}{n_1}$ i $\bar{p}_2 = \frac{k_2}{n_2}$ realizovane uzoračke proporcije. Neka je $\beta = 1 - \alpha$. Formiramo statistiku

$$Z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{Se(p_1 - p_2)}, \quad Se(p_1 - p_2) = \sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}, \ \ p = \frac{k_1 + k_2}{n_1 + n_2}, \ \ q = 1 - p.$$

Hipotezu prihvatamo sa pragom značajnosti α ako $z_0 \in (-a, a)$, gde je $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+\beta}{2}\right)$, a u protivnom je odbacujemo.

Navedeni postupci se odnose na tzv. **dvostrane** testove, u kojima je alternativna hipoteza oblika $H_1(\theta \neq \theta_0)$ tj. $H_1(\theta_1 \neq \theta_2)$. Osim ovih, postoje i tzv. **jednostrani** testovi, u kojima kao alternativu nultoj hipotezi postavljamo nepotpunu negaciju polaznog tvrđenja (npr. $H_1(\theta > \theta_0)$ ili $H_1(\theta_1 < \theta_2)$).

---

[172] *Kocka za igru je na slučajan način bačena 1000 puta. Šestica je pala 200 puta. Testirati hipotezu da je kocka ispravna sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$.

Rešenje: **I način**: Pošto je verovatnoća da na ispravnoj kocki padne šestica jednaka $\frac{1}{6}$, zadatak ćemo rešiti tako što ćemo testirati hipotezu da je proporcija šestica u svim bacanjima jednak $p_0 = \frac{1}{6}$. Dakle, nulta hipoteza je $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$, a alternativna $H_1(p_0 \neq \frac{1}{6})$. Po Moavr-Laplasovoj teoremi za slučajnu promenljivu sa Binomnom raspodelom $K : \mathcal{B}(n, p)$ važi

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{K}{n} - p_0\right| \geq \left|\frac{k}{n} - p_0\right|\right) = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|k - np_0|}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)\right) = \alpha^* \,.$$

Obratiti pažnju na malo i veliko slovo k (i K) u prethodnoj formuli. K je oznaka za slučajnu promenljivu a k za realizovanu vrednost te slučajne promenljive, u ovom slučaju ceo broj. Imamo

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|200 - 1000 \cdot \frac{1}{6}|}{\sqrt{1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot (1 - \frac{1}{6})}}\right)\right) = 2(1 - \phi\,(2.83)) = 2(1 - 0.9977) = 0.0046 \,.$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Zaključujemo da je kocka neispravna.
II način: Testiramo nultu hipotezu $H_0(p_0 = \frac{1}{6})$. Napravićemo interval poverenja za nepoznatu proporciju, sa nivoom poverenja $\beta = 1 - \alpha = 1 - 0.01 = 0.99$ i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $p_0 = \frac{1}{6} = 0.167$ u njemu nalazi. Iz datih podataka zaključujemo da je $n = 1000$, $k = 200$, $\bar{p} = \frac{200}{1000} = 0.2$, $\bar{q} = 1 - 0.2 = 0.8$ i $a = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$, pa je

$$I = \left(0.2 - 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}, 0.2 + 2.576 \cdot \sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{999}}\right) = (0.168, 0.232).$$

Pošto $p_0 \notin (0.168, 0.232)$, hipotezu ne prihvatamo sa ovim pragom značajnosti.

Napomena. Kada je pretpostavljena vrednost blizu granice prihvatanja tj. kada je α^* blisko vrednosti α, promena praga značajnosti bi mogla promeniti zaključak. Međutim, smanjenjem verovatnoće greške I vrste dolazi do povećanja verovatnoće **greške II vrste**, koju činimo ako prihvatimo nultu hipotezu a ona je u stvari netačna. Verovatnoća greške druge vrste se samo za neke testove može izračunati. Zbog toga se u praksi retko uzima prag značajnosti manji od 0.01.
Optimalno rešenje u ovakvim situacijama je ponavljanje ispitivanja, sa povećanjem obima uzorka.

---

[173] *Prema ranijim ispitivanjima, 15% zaposlenih u bankama smatra svoj posao visoko stresnim. Od 120 slučajno odabranih radnika banke X, 44 njih smatra svoj posao visoko stresnim. Testirati da li procenat prisutnosti stresa u banci X odgovara prosečnom procentu u bankama, sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H(p_0 = 0.15)$ pomoću 95%-og intervala poverenja za proporciju. Realizovana proporcija je $\bar{p} = \frac{44}{120} = 0.37$, $\bar{q} = 0.63$, $n = 120$ i $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$.

$$I = \left(0.37 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}, 0.37 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.37 \cdot 0.63}{119}}\right) = (0.283, 0.457).$$

Pošto $p_0 \notin (0.283, 0.457)$, hipotezu ne prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 tj. zaključujemo da nivo stresa u banci X ne odgovara proseku.

---

[174] *Za ocene na pismenom ispitu u slučajnom uzorku đaka petih razreda iz zadatka broj* [165] *testirati hipotezu da je srednja ocena na pismenom ispitu jednaka* $m_0 = 3.50$ *sa pragom značajnosti*

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.01$

(Sa poznatim standardnim odstupanjem ocena na pismenom $\sigma = 1.4$.*)*

Rešenje: Testiranje nulte hipoteze $H_0(m = m_0)$ se može svesti na jednostavnu proveru da li data vrednost m_0 upada u interval poverenja širine $\beta = 1 - \alpha$. Kako smo u zadatku [165] pronašli interval poverenja za $\beta = 0.95$: $I = (2.3385, 3.3757)$, i kako naša vrednost 3.50 ne upada u njega, zaključujemo da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje.

Rešimo zadatak pod (b) pomoću testa značajnosti. Naime, kad se α smanji na 0.01, to je ekvivalentno sa tim da se β poveća na 0.99, odnosno, da se interval poverenja proširi. Verovatnoću α^* moramo izračunati, jer se interval poverenja proširio pa možda zadata vrednost upadne u njega.

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(|\bar{X}_n - m_0| \geq |\bar{x}_n - m_0|\right) = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right|\right)$$

Upotrebićemo podatke $n = 30$ i $\bar{x}_n = 2.8$ iz zadatka [165]

$$\alpha^* = 2\left(1 - \phi\left(\frac{|\bar{x}_n - m_0|}{\sigma}\sqrt{n}\right)\right) = 2(1 - \phi(2.74)) = 2(1 - 0.9969) = 0.00614\,.$$

Kako je $\alpha^* < \alpha$, i pod (b) odbacujemo nultu hipotezu, odnosno, zaključujemo da srednja vrednost nije jednaka 3.50.

Napomena. Da smo prvo rešili pod (b), automatski bi imali da se nulta hipoteza pod (a) odbacuje, jer je pod (a) veći prag značajnosti nego pod (b).

---

[175] *Poznato je da standardna vrednost visine krvnog pritiska kod zdravih osoba iznosi* $m_0 = 115\,mmHg$. *Za podatke iz zadatka* [164] *testirati da li je srednja vrednost krvnog pritiska zdravih regruta jednaka standardnoj sa pragom značajnosti* 5%.

Rešenje: Testiramo nultu hipotezu $H_0(m = 115)$. Ne možemo iskoristiti interval poverenja dobijen u zadatku [164] zbog promenjenog nivoa poverenja (sada je $\beta = 1 - 0.05 = 0.95$). Ostale podatke, međutim, možemo iskoristiti: $n = 26$, $\bar{x}_n = 120.154$ i $\bar{s}_n = 8.3006$. Obim uzorka je manji od 30, pa vrednost a nalazimo iz tablice Studentove raspodele. Za zadati nivo poverenja $\beta = 0.95$, $a = t_{26-1,\frac{1+0.95}{2}} = t_{25,0.975} = 2.06$.

Traženi interval poverenja za prosečni krvni pritisak zdravih regruta je

$$I = (120.154 - 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}, 120.154 + 2.06 \cdot \frac{8.3006}{\sqrt{25}}) = (116.734, 123.574).$$

Pošto $115 \notin (116.734, 123.574)$, hipotezu odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da srednja vrednost pritiska zdravih regruta nije jednaka srednjoj visini pritiska zdravih osoba.

---

[176] *Dati su podaci anketiranih putnika GSP-a o tome koliko dugo su čekali autobus:*

vreme čekanja [min]	*[0,3)*	*[3,4)*	*[4,5)*	*[5,6)*	*[6,7)*	*[7,9)*	*[9,17]*
broj putnika	*20*	*15*	*12*	*8*	*5*	*6*	*9*

Testirati hipotezu da je srednja vrednost čekanja jednaka 5 minuta i 45 sekundi, sa pragom značajnosti

(a) $\alpha = 0.05$ *(b)* $\alpha = 0.10$.

Rešenje: **I način**: Napravićemo odgovarajuće intervale poverenja, sa nivoima poverenja 95% i 90%, i ustanoviti da li se pretpostavljena vrednost $m_0 = 5min\ 45s = 5.75min$ nalazi u nekom od njih. Iz intervalno datog uzorka računamo potrebne veličine:

$$n = \sum f_i = 75, \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum x_i f_i = (1.5 \cdot 20 + \cdots + 13.0 \cdot 9)/75 = 5.04,$$

$$\bar{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum x_i^2 f_i - \bar{x}_n^2 = (1.5^2 \cdot 20 + \cdots + 13.0^2 \cdot 9)/75 - 5.04^2 = 12.3317, \quad \bar{s}_n = 3.512.$$

Pošto je obim uzorka veći od 30, tablične vrednosti čitamo iz tablice normalne raspodele: $a_{95\%} = 1.96$ i $a_{90\%} = 1.64$.

$$I_{95\%} = (5.04 - 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.96\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.24, 5.84),$$

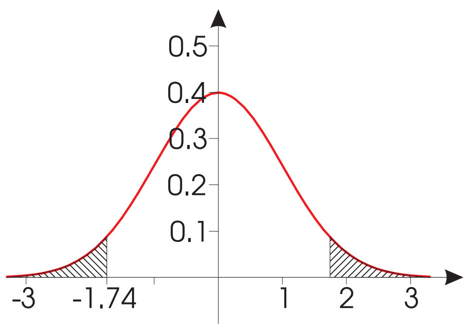
$$I_{90\%} = (5.04 - 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}, 5.04 + 1.64\frac{3.512}{\sqrt{74}}) = (4.37, 5.71).$$

Zaključujemo da pod (a) hipotezu $H(m_0 = 5.75)$ možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.05 jer $5.75 \in I_{95\%}$, ali da je, pod (b), ne možemo prihvatiti sa pragom značajnosti 0.10, zato što $5.75 \notin I_{90\%}$. Budući da se zaključak menja u zavisnosti od nivoa značajnosti, on nije pouzdan i preporučuje se ponovno ispitivanje, po mogućnosti sa većim brojem ispitanika.

II način: Predstavićemo posmatrane intervale aritmetičkim sredinama leve i desne granice.

x_i	1.5	3.5	4.5	5.5	6.5	8.0	13.0
f_i	20	15	12	8	5	6	9

Obeležje „dužina čekanja autobusa" možda i nema normalnu raspodelu, ali, na osnovu centralne granične teoreme, možemo na srednju vrednost posmatranog obeležja primeniti testiranje hipoteze o matematičkom očekivanju m normalne raspodele kad σ nije poznato. Dakle, koristićemo slučajnu promenljivu sa Studentovom t_{n-1} raspodelom $Z = \frac{\bar{X}_n - m}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}$. Potrebna deskriptivno statistička obeležja uzorka $n = 75$, $\bar{x}_n = 5.04$ i $\bar{s}_n = 3.51166$ su izračunata u prvom načinu rešavanja zadatka.



Pretvorimo 5 minuta i 45 sekundi u 5.75 minuta. Ako je nulta hipoteza tačna, za realizovanu vrednost Studentove statistike dobijamo

$$z = \frac{5.04 - 5.75}{3.51166}\sqrt{74} = -1.74\,.$$

Verovatnoća α^* odstupanja srednje vrednosti od zadate $m_0 = 5.75$ koja se računa po formuli

$$\alpha^* = \mathsf{P}\left(\left|\frac{\bar{X}_n - m_0}{\bar{S}_n}\sqrt{n-1}\right| \geq \left|\frac{\bar{x}_n - m_0}{\bar{s}_n}\sqrt{n-1}\right|\right)$$

predstavlja na slici šrafiranu oblast. Ali, nju nije lako odrediti pomoću tablica kojima raspolažemo. Umesto toga, mi ćemo uporediti da li je ta verovatnoća manja ili veća od datog praga značajnosti.

Iz tablica sa kraja knjige možemo očitati vrednosti broja a takvog da je površina ispod krive gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka zadatoj verovatnoći.

Pod (a) ćemo naći a za verovatnoću $1 - \alpha/2 = 0.975$. Pošto $n = 75$ nema u tablicama, uzimamo a za najbližu vrednost $n = 60$. Očitavamo $a = 2.000$. Kako je taj broj veći od apsolutne vrednosti $|z| = 1.74$, to je ekvivalentno sa tim da je $\alpha^* > \alpha$, odnosno, da se nulta hipoteza ne odbacuje.

Pod (b) dobijamo za $1 - \alpha/2 = 1 - 0.10/2 = 0.95$ (i najbliže $n = 60$) $a = 1.671$. Pošto je $|z| = 1.74 > a = 1.671$, odbacujemo nultu hipotezu.

Da bismo lakše pamtili, napravićemo tabelu.

$\lvert z\rvert < a$	$\alpha^* > \alpha$	H_0 se ne odbacuje
$\lvert z\rvert > a$	$\alpha^* < \alpha$	H_0 se odbacuje

Broj a se čita iz tablice tako da je integral (površina) gustine Studentove raspodele od $-\infty$ do a jednaka $1 - \alpha/2$ (za jednostrani test), odnosno jednaka $1 - \alpha$ (za dvostrani test) gde je α je zadati prag značajnosti.

---

[177] *Fabrika deterdženata je otvorila novu liniju za pakovanje. Nova linija je izrađena po tehnologiji za koju se tvrdi da ima disperziju mase deterdženta u pakovanju istu kao i prethodna linija tj. $\sigma_0^2 = 55.8$. Iz slučajno odabranog uzorka $n = 30$ pakovanja je izračunata uzoračka disperzija i utvrđeno je da ona iznosi $\bar{s}_n^2 = 65.2$. Testirati datu tvrdnju sa pragom značajnosti $\alpha = 0.1$.*

Rešenje: Nulta hipoteza glasi $H_0(\sigma^2 = \sigma_0^2)$ i testiraćemo je pomoću jednostranog intervala poverenja za nepoznatu disperziju.
Poznato je da je $n = 30$, $\bar{s}_n^2 = 65.2$. Za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.1$, odgovarajući nivo poverenja je $\beta = 1 - \alpha = 0.9$, pa je vrednost c iz tablice Pirsonove raspodele $c = \chi^2_{n-1,\beta} = \chi^2_{29,0.9} = 39.1$. Jednostrani interval poverenja je:

$$I = \left(0, \frac{n\bar{s}_n^2}{c}\right) = \left(0, \frac{29 \times 65.2}{39.1}\right) = (0, 48.36).$$

Pošto $\sigma_0^2 = 55.8 \notin (0, 48.36)$, hipotezu o pretpostavljenoj vrednosti disperzije odbacujemo sa pragom značajnosti 0.1.

Napomena: U ovom slučaju, disperzija nove linije je statistički značajno manja od disperzije prethodne, što je po pravilu dobra osobina.

---

[178] *U dve smene jednog industrijskog pogona je tokom 10 radnih dana praćen učinak (izražen brojem proizvedenih artikala) i rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

I smena	*43*	*41*	*40*	*45*	*39*	*44*	*42*	*46*	*44*	*45*
II smena	*40*	*37*	*40*	*42*	*41*	*39*	*41*	*38*	*40*	*39*

može li se sa pragom značajnosti 0.05 smatrati da se učinak smena razlikuje?

Rešenje: Ovaj zadatak se odnosi na testiranje jednakosti parametara raspodele kod dva uzorka. U ovom slučaju učinak je izražen brojem proizvedenih artikala, pa ćemo zato testirati da li postoji razlika među prosečnim vrednostima tog obeležja. Nulta hipoteza se, bez obzira na cilj testiranja, uvek postavlja u formi jednakosti, dakle

$H_0(m_1 = m_2)$.
Iz prostog uzorka računamo sledeće numeričke karakteristike: obimi uzoraka su $n_1 = n_2 = 10$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = 42.9$, $\bar{x}_2 = 39.7$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = 4.89$, $\bar{s}_2^2 = 2.01$.
Pošto je zbir obima manji od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike T_0:

$$t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)\bar{s}_1^2+(n_2-1)\bar{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}} = \frac{42.9 - 39.7}{\sqrt{\frac{9\cdot 4.89+9\cdot 2.01}{18} \cdot \frac{20}{100}}} = 4.64.$$

Ovu vrednost upoređujemo sa tabličnom vrednošću iz tablice Studentove raspodele, koja za zadati prag značajnosti $\alpha = 0.05$ iznosi $t_{10+10-2;\frac{1+0.95}{2}} = t_{18;0.975} = 2.101$. Vidimo da $4.64 \notin (-2.101, 2.101)$, pa hipotezu H_0 odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se učinak smena razlikuje.

---

[179] *U fabrici iz prethodnog zadatka je testirana i preciznost rada u dve smene. U I smeni je provereno 150 slučajno odabranih proizvoda i utvrđena je neispravnost kod 5. U II smeni je provereno 90 slučajno odabranih proizvoda i pronađena su 2 neispravna. Proveriti sa pragom značajnosti 0.01 da li obe smene rade istom preciznošću.*

Rešenje: Zadatak ćemo rešiti tako što ćemo proveriti da li je proporcija neispravnih proizvoda jednaka u obe smene, stoga će nulta hipoteza glasiti $H_0(p_1 = p_2)$.
U prvoj smeni, obim uzorka je $n_1 = 150$ i bilo je 5 uspešnih realizacija provere neispravnosti, pa je u ovoj smeni uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 5/150 = 0.033$. Analogno, uzoračka proporcija u drugoj smeni je $\bar{p}_2 = 2/90 = 0.022$. Test statistika zahteva i računanje zajedničke proporcije $p = \frac{5+2}{150+90} = 0.029$ i vrednosti $q = 1 - 0.029 = 0.971$. Sada možemo izračunati realizovanu vrednost:

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.033 - 0.022}{\sqrt{0.029 \cdot 0.971(\frac{1}{150} + \frac{1}{90})}} = 0.49.$$

Tablična vrednost $a = \phi^{-1}(0.995) = 2.576$. $0.49 \in (-2.576, 2.576)$ pa hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.01 i zaključujemo da ne postoji statistički značajna razlika u preciznosti rada između dve smene.

---

[180] *Učenici 2 odeljenja su ostvarili sledeći opšti uspeh na kraju školske godine:*

I odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	5	8	6	10

II odeljenje

uspeh	*[1,2.5)*	*[2.5,3.5)*	*[3.5,4.5)*	*[4.5, 5]*
broj đaka	2	12	10	3

(a) *Sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da se srednje ocene u ova dva razreda ne razlikuju.*

(b) *Sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da se procenat "odlikaša"u ova dva razreda razlikuje.*

Rešenje: U delu zadatka pod (a) testiramo hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti posmatranog obeležja, pa je nulta hipoteza $H_0(m_1 = m_2)$.
Iz intervalno datog uzorka računamo numeričke karakteristike koje su potrebne za računanje test-statistike. Obimi uzoraka su $n_1 = 29$, $n_2 = 27$, aritmetičke sredine su $\bar{x}_1 = \frac{1}{29}(1.75{\cdot}5{+}3{\cdot}8{+}4{\cdot}6{+}4.75{\cdot}10) = 3.59$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{27}(1.75{\cdot}2{+}3{\cdot}12{+}4{\cdot}10{+}4.75{\cdot}3) = 3.47$, a uzoračke disperzije iznose $\bar{s}_1^2 = \frac{1}{29}(1.75^2\cdot 5 + 3^2\cdot 8 + 4^2\cdot 6 + 4.75^2\cdot 10) - 3.59^2 = 1.21$ i $\bar{s}_2^2 = \frac{1}{27}(1.75^2\cdot 2 + 3^2\cdot 12 + 4^2\cdot 10 + 4.75^2\cdot 3) - 3.47^2 = 0.62$.
Pošto je zbir obima $29 + 27 = 56$ veći od 30 računamo realizovanu vrednost test-statistike Z_0:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{3.59 - 3.47}{\sqrt{\frac{1.21}{29} + \frac{0.62}{27}}} = 0.48.$$

Tablična vrednost iz tablice Gausove raspodele iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Vidimo da $0.48 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečne ocene posmatranih odeljenja ne razlikuju statistički značajno.

Iako je cilj dela zadatka pod (b) da testira postojanje razlike u proporciji učenika sa odličnim uspehom među odeljenjima, nulta hipoteza je $H_0(p_1 = p_2)$, a alternativna je $H_1(p_1 \neq p_2)$.
U prvom odeljenju, obim uzorka je $n_1 = 29$ i bilo je 10 uspešnih realizacija (tj. odlikaša), pa je u ovom odeljenju uzoračka proporcija $\bar{p}_1 = 10/29 = 0.345$. Analogno, uzoračka proporcija u drugom odeljenju je $\bar{p}_2 = 3/27 = 0.111$. Zajednička proporcija je $p = \frac{10+3}{29+27} = 0.232$ a $q = 1 - 0.232 = 0.768$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 je:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.345 - 0.111}{\sqrt{0.232\cdot 0.768(\frac{1}{29} + \frac{1}{27})}} = 2.07.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $2.07 \notin (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05 i prihvatamo hipotezu H_1 tj. zaključujemo da se odeljenja statistički značajno razlikuju po proporciji odličnih učenika.

---

[181] *Ispitivanje iz Zadatka* [176] *o vremenu čekanja autobusa je ponovljeno. U novom ispitivanju, anketirano je ukupno 120 putnika GSP-a. Utvrđeno je da je prosečno vreme čekanja 4.52 minuta, sa disperzijom od 10.67 minuta. Pritom, 42 ispitanika su čekala autobus bar 5 minuta. Sa pragom značajnosti 0.05 proveriti da li se kod ovog i prethodnog ispitivanja*

(a) razlikuje prosečno vreme čekanja autobusa;

(b) razlikuje proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta.

Rešenje: (a) Nulta hipoteza je $H_0(m_1 = m_2)$.
U zadatku [176] su izračunate relevantne vrednosti za prvo ispitivanje: $n_1 = 75$, $\bar{x}_1 = 5.04$ i $\bar{s}_1^2 = 12.33$. Dati podaci za drugo ispitivanje su: $n_2 = 120$, $\bar{x}_2 = 4.52$ i

$\bar{s}_2^2 = 10.67$. Ukupan obim uzoraka $75 + 120 = 195$ je veći od 30, tako da koristimo sledeću statistiku:

$$z_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2}}} = \frac{5.04 - 4.52}{\sqrt{\frac{12.33}{75} + \frac{10.67}{120}}} = 1.03.$$

Odgovarajuća tablična vrednost iznosi $a = \phi^{-1}\left(\frac{1+0.95}{2}\right) = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Izračunata vrednost $1.03 \in (-1.96, 1.96)$, pa hipotezu H_0 ne odbacujemo tj. sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da se prosečna vremena čekanja autobusa u dva ispitivanja ne razlikuju statistički značajno.
(b) U ovom slučaju je nulta hipoteza $H_0(p_1 = p_2)$.
Iz tabele iz zadatka [176] možemo videti da je broj ispitanika koji su čekali 5 ili više minuta $k_1 = 8 + 5 + 6 + 9 = 28$, pa za prvo ispitivanje uzoračka proporcija ima vrednost $\bar{p}_1 = 28/75 = 0.373$. Kod ponovljenog ispitivanja, uzoračka proporcija je $\bar{p}_2 = 42/120 = 0.35$. Zajednička proporcija je $p = \frac{28+42}{75+120} = 0.359$ pa je $q = 1 - 0.359 = 0.641$.
Realizovana vrednost statistike Z_0 iznosi:

$$z_0 = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sqrt{pq(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0.373 - 0.35}{\sqrt{0.359 \cdot 0.641(\frac{1}{75} + \frac{1}{120})}} = 0.32.$$

Tablična vrednost za dati prag značajnosti je $a = \phi^{-1}(0.975) = 1.96$. Pošto $0.32 \in (-1.96, 1.96)$ hipotezu H_0 prihvatamo sa pragom značajnosti 0.05 i zaključujemo da se proporcija putnika koji su čekali autobus bar 5 minuta ne razlikuje statistički značajno između dva ispitivanja.

---

[182] *Proizvođač lekova tvrdi da novi lek pomaže u barem 80% slučajeva. U slučajnom uzorku od 80 bolesnika poboljšanje je osetilo 56. Testirati tvrdnju proizvođača sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Realizovana proporcija izlečenih je $\frac{k}{n} = \frac{56}{80} = 0.70 = 70\%$. Tvrdnja proizvođača ne bi ni bila dovedena u pitanje da je bilo više od 80% izlečenih. Tako da ćemo sad testirati hipotezu $H_0(p = p_0)$ protiv alternativne $H_1(p < p_0)$. To je takozvani jednostrani test. Ako je H_0 tačna, onda je verovatnoća da je odstupanje od zadate proporcije veće od realizovane vrednosti odstupanja

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = \mathsf{P}\left(\frac{K}{n} - p_0 \leq \frac{k}{n} - p_0\right) =$$

(Množimo sa $\sqrt{\frac{n}{p_0(1-p_0)}}$.)

$$= \mathsf{P}\left(\frac{K - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \leq \frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \alpha^* .$$

Izračunajmo α^* približno pomoću Moavr-Laplasove teoreme

$$\alpha^* \approx \phi\left(\frac{k - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right) = \phi\left(\frac{56 - 80 \times 0.80}{\sqrt{80 \times 0.80 \times (1 - 0.80)}}\right) = \phi(-2.23607) .$$

U tablicama normalne $\mathcal{N}(0,1)$ raspodele očitavamo $\alpha^* \approx \phi(-2.24) = 1 - \phi(2.24) = 1 - 0.9875 = 0.0125$.

Kako je $\alpha^* < \alpha$, odbacujemo nultu hipotezu. Proizvođač nije u pravu. Napomenimo da nultu hipotezu ne bismo mogli odbaciti da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.01$.

Razlog upotrebe Moavr-Laplasove teoreme za računanje tražene verovatnoće je u problemima sa računanjem verovatnoće u binomnoj raspodeli. Naime, za veliko n teško je izračunati binomne koeficijente. Ako se, pak, mogu izračunati veći binomni koeficijenti, tražena verovatnoća se može i direktno izračunati.

Direktnom primenom binomnih koeficijenata, odnosno, definicije verovatnoće u binomnoj raspodeli dobijamo

$$\mathsf{P}\left(p_0 - \frac{K}{n} \geq p_0 - \frac{k}{n}\right) = 1 - \mathsf{P}(K > k) = 1 - \sum_{m=k+1}^{n} \binom{n}{m} p_0^m (1-p_0)^{n-m}$$

Poslednju verovatnoću možemo izračunati na kompjuteru pomoću programa koji koristi algebru dvostruke preciznosti. Dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \binom{80}{57} 0.8^{57} 0.2^{23} - \binom{80}{58} 0.8^{58} 0.2^{22} - \cdots - 0.8^{80} = 0.0217\,.$$

Vidimo da je dobijena verovatnoća različita od one dobijene pomoću Moavr-Laplasove teoreme, ali je rezultat isti: nulta hipoteze se odbacuje, jer je i dalje $\alpha^* = 0.0217 < 0.05 = \alpha$.

---

[183] *Poznato je da je masa dečaka od deset godina starosti raspoređena po normalnoj raspodeli sa srednjom vrednošću $m_0 = 37kg$ i standardnim odstupanjem $\sigma = 10kg$. U jednoj školi je merena masa $n = 36$ dečaka i dobijena je aritmetička sredina mase $\bar{x}_n = 40kg$. Testirati hipotezu da posmatrana deca imaju masu veću od srednje vrednosti m_0, sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.*

Rešenje: Nulta hipoteza $H_0(m = m_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(m > m_0)$.

Ovo je jednostrani test. Interesuje nas verovatnoća

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \mathsf{P}\left(\bar{X}_n - m_0 \geq \bar{x}_n - m_0\right) = 1 - \mathsf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \\ &= 1 - \phi\left(\frac{\bar{x}_n - m_0}{\sigma}\sqrt{n}\right)\,. \end{aligned}$$

Kad uvrstimo naše podatke i iz tablice za normalnu $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelu očitamo vrednost Laplasove funkcije ϕ, dobijamo

$$\alpha^* = 1 - \phi\left(\frac{40-37}{10}\sqrt{36}\right) = 1 - \phi(1.8) = 1 - 0.9641 = 0.0359\,.$$

Kako je dobijena verovatnoća veća od praga značajnosti, ne odbacujemo nultu hipotezu da masa dece odgovara standardu.

Napomena. Da je prag značajnosti bio $\alpha = 0.05$, odnosno, da smo imali dozvolu da grešimo pri konstataciji povećane mase u do 5% slučajeva, odbacili bismo nultu hipotezu i zaključili da deca imaju masu veću od srednje vrednosti.

3.3.2 Neparametarski testovi

Neparametarske testove primenjujemo kada nam nije poznata raspodela obeležja, već upravo testiramo hipotezu da posmatrano obeležje ima datu funkciju raspodele. Nulta hipoteza je oblika $H_0(F = F_0)$.

λ-test Kolmogorova

Ovaj test se primenjuje kad obeležje ima neprekidnu raspodelu.
Za statistiku $D_n = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} |F_n^*(x) - F(x)|$ važi da je

$$\lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sqrt{n} D_n < \lambda\right) = Q(\lambda)\,.$$

Za unapred dat prag značajnosti α nalazimo (iz tablica sa kraja knjige) vrednost λ_α za koju je $Q(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$.
Za realizovanu vrednost uzorka pod pretpostvakom $F = F_0$ nalazimo

$$d_n = \sup_{x \in (-\infty, \infty)} |f_n^*(x) - F_0(x)|$$

$\sqrt{n} d_n < \lambda_\alpha$	$H_0(F = F_0)$ ne odbacujemo
$\sqrt{n} d_n > \lambda_\alpha$	$H_0(F = F_0)$ odbacujemo

Pirsonov χ^2-test

χ^2-test se može primeniti za testiranje svih raspodela, ako je obim uzorka bar 50. Skup realnih brojeva $(-\infty, +\infty)$ podelimo na k disjunktnih intervala $I_m = [a_m, b_m)$, $m = 1, 2, \ldots k$, tako da u svakom intervalu bude barem pet elemenata realizovanog uzorka (ako neki interval sadrži manje od 5 elemenata, spajamo ga sa nekim od susednih intervala, tako da broj spajanja bude minimalan). Slučajna promenljiva $N_m, m = 1, 2, \ldots k$, predstavlja broj slučajnih promenljivih iz uzorka $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ koje pripadaju intervalu I_m. Teorijska verovatnoća pripadanja intervalu I_m je $p_m = F_0(b_m) - F_0(a_m)$, pa je teorijski (pretpostavljeni) broj elemenata u intervalu I_m jednak np_m. Statistika

$$Z = \sum_{m=1}^{k} \frac{(N_m - np_m)^2}{np_m}$$

meri ukupno odstupanje teorijskih od empirijskih frekvencija. Ako je nulta hipoteza tačna tj. ako ispitivano obeležje ima raspodelu F_0, realizovana vrednost statistike z ne bi trebala biti velika tj. trebala bi biti u granicama dozvoljenog odstupanja.

Za dovoljno veliko n raspodela statistike Z se može aproksimirati χ^2_{k-1} raspodelom, tako da je za zadati prag značajnosti α najveća dozvoljena vrednost ove statistike $\chi^2_{1-\alpha,k-1-s}$ koja se čita iz tablice χ^2 raspodele (s ovde predstavlja broj nepoznatih parametara raspodele, koje smo morali da prethodno ocenimo).
Zaključujemo:

$z < \chi^2_{1-\alpha,k-1-s}$	$H_0(F = F_0)$ ne odbacujemo
$z \geq \chi^2_{1-\alpha,k-1-s}$	$H_0(F = F_0)$ odbacujemo

- Ako je testirana raspodela obeležja diskretnog tipa, u svakoj klasi se nalazi najčešće po jedna vrednost i_m i tada je $p_m = \mathsf{P}\,(X = i_m)$. U opštem slučaju klasa I_m sadrži konačan skup vrednosti $\{i_1, i_2, ..., i_{l_m}\}$ pa je $p_m = \sum \mathsf{P}\,(X = i_j)\,,\ \ j = 1, 2, \ldots l_m$.

Tabele kontingencije

Određena forma χ^2-testa može da se koristi i za **testiranje nezavisnosti dva diskretna obeležja** i tada govorimo o *tabelama kontingencije*. Posmatramo dva obeležja X i Y i označimo sa k ukupan broj mogućih vrednosti obeležja X, a sa r ukupan broj mogućih vrednosti obeležja Y (k i r su mali brojevi, najčešće 2,3...). Nulta hipoteza je da su ova obeležja **nezavisna**.
Hipotezu proveravamo na uzorku obima n tako što evidentiramo koliko elemenata uzorka pripada svakoj od $k \times r$ mogućih kombinacija vrednosti obeležja X i Y. Ove frekvencije obeležavamo sa $f_{ij},\ i = 1, ..., k,\ j = 1, ..., r$ i prikazujemo ih tabelarno. U poslednju kolonu i poslednju vrstu tabele unosimo tzv. *marginalne frekvencije* koje predstavljaju broj elemenata uzorka koji imaju određenu vrednost obeležja X, odnosno Y. Marginalne frekvencije za X obeležavamo sa $f_{i\star},\ i = 1, ..., k$ i računamo ih kao zbir svih frekvencija u i-toj vrsti. Analogno, marginalne frekvencije za Y obeležavamo sa $f_{\star j},\ j = 1, ..., r$ i računamo ih kao zbir svih frekvencija u j-toj koloni. Zbir marginalnih frekvencija i po vrsti i po koloni daje ukupan obim uzorka. Dakle:

$$f_{i\star} = \sum_{j=1}^{r} f_{ij},\ \ f_{\star j} = \sum_{i=1}^{k} f_{ij},\ \ n = \sum_{i=1}^{k} f_{i\star} = \sum_{j=1}^{r} f_{\star j}.$$

X/Y	y_1	y_2	...	y_r	$marg.fr.\ za\ X$
x_1	f_{11}	f_{12}	...	f_{1r}	$f_{1\star}$
x_2	f_{21}	f_{22}	...	f_{2r}	$f_{2\star}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	f_{k1}	f_{k2}	...	f_{kr}	$f_{k\star}$
$marg.fr.\ za\ Y$	$f_{\star 1}$	$f_{\star 2}$	...	$f_{\star r}$	n

Ukoliko je naša hipoteza tačna tj. ukoliko su obeležja X i Y nezavisna, važilo bi sledeće:

$$p_{ij} = p(i)p(j) \Leftrightarrow \frac{f_{ij}}{n} = \frac{f_{i\star}}{n} \cdot \frac{f_{\star j}}{n},$$

odakle dobijamo *teorijske frekvencije* f'_{ij} za svako polje u tabeli:

$$f'_{ij} = \frac{f_{i\star} \cdot f_{\star j}}{n}.$$

Kao i u χ^2-testu za ispitivanje raspodele, ukupno odstupanje empirijskih od teorijskih frekvencija se meri test-statistikom

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{(f'_{ij} - f_{ij})^2}{f'_{ij}},$$

i hipotezu o nezavisnosti obeležja X i Y prihvatamo sa pragom značajnosti α ako je realizovana vrednost $z < \chi^2_{1-\alpha,(k-1)\times(r-1)}$, dok je u protivnom odbacujemo.
Napomena: Osnovni preduslovi za primenu ovog testa su, kao i kod prethodnog χ^2-testa: (i) uzorak mora sadržati bar 50 elemenata i (ii) svako polje u tabeli mora sadržati bar 5 elemenata uzorka.

---

[184] *Rešiti zadatak* [187] *primenom* λ*-testa Kolmogorova.*

Rešenje: U zadatku [99] smo dobili funkciju raspodele posmatranog obeležja:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Slično kao u prethodnom zadatku, napravićemo tabelu:

k	x_k	n_{x_k}	$F_n^*(x_k)$	$F(x_k)$	$\lvert F_n^*(x_k) - F(x_k)\rvert$
1	0.5	5	0.0666	0.0625	0.0041
2	1.0	19	0.2533	0.2500	0.0033
3	1.5	41	0.5466	0.5625	**0.0158**
4	2.0	75	1.0000	1.0000	0.0000

Imamo $d_n = d_{75} = 0.0158$, $\sqrt{n}d_n = \sqrt{75} \cdot 0.0158 = 0.1368$, a ta vrednost je manja od tablične $\lambda = 1.36$ koja odgovara pragu značajnosti $\alpha = 0.05$.
Nultu hipotezu da dati uzorak odgovara datoj raspodeli ne odbacujemo.

---

[185] *Testom Kolmogorova testirati hipotezu da je uzorak (0.0790, 0.2672, 0.1474, 0.3613, 0.0933, 0.0784, 0.1522, 0.0810, 0.3003, 0.0705, 0.0072, 0.0066, 0.0084, 0.1250, 0.2174, 0.0108) saglasan sa eksponencijalnom raspodelom* $\mathcal{E}(5)$*, sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$.

Rešenje: Sortiramo uzorak i dobijemo 0.0066, 0.0072, 0.0084, 0.0108, 0.0705, 0.0784, 0.0790, 0.0810, 0.0933, 0.1250, 0.1474, 0.1522, 0.2174, 0.2672, 0.3003, 0.3613.

Empirijska funkcija raspodele glasi

$$f^*_{16}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0.0066 \\ 1/16, & 0.0066 < x \le 0.0072 \\ 2/16, & 0.0072 < x \le 0.0084 \\ & \dots \\ 15/16, & 0.3003 < x \le 0.3613 \\ 1, & x > 0.3613 \end{cases}$$

Empirijska funkcija raspodele predstavlja proporciju elemenata uzorka koji su manji od broja x: $f_{16}^*(x) = n_x/n$, gde je n_x broj elemenata uzorka koji su manji od x.

Funkcija raspodele za eksponencijalnu raspodelu: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-5x}, & x > 0 \end{cases}$.

Uporedićemo vrednost empirijske i teorijske funkcije raspodele u tačkama uzorka. Izračunaćemo $F(x_k)$ u tačkama uzorka x_k.

Sve te brojeve ćemo uneti u tablicu:

x_k	.0066	.0072	.0084	.0108	.0705	.0784	.0790	.0810
	.0933	.1250	.1474	.1522	.2174	.2672	.3003	.3613
$f_{16}^*(x)$	.0625	.1250	.1875	.2500	.3125	.3750	.4375	.5000
	.5625	.6250	.6875	.7500	.8125	.8750	.9375	1.0000
$F(x_k)$	.0325	.0354	.0411	.0526	.2971	.3243	.3263	.3330
	.3728	.4647	.5215	.5328	.6628	.7371	.7772	.8358
$\lvert f_{16}^*(x) - F(x_k)\rvert$	.0300	.0896	.1464	.1974	.0154	.0507	.1112	.1670
	.1897	.1603	.1660	**.2172**	.1497	.1379	.1603	.1642

Dobijamo $d_n = d_{16} = 0.2172$, $\sqrt{n}d_n = \sqrt{16} \cdot 0.2172 = 0.8688$, a ta vrednost je manja od tablične $\lambda = 1.63$ koja odgovara pragu značajnosti $\alpha = 0.01$. (Pogledati tablice na kraju knjige: za $Q(\lambda) = 1 - 0.01 = 0.99 \approx 0.9902$ očitavamo $\lambda = 1.63$.)

Dakle, nultu hipotezu ne odbacujemo, odnosno, zaključujemo da uzorak ne protivreči hipotezi da obeležje ima eksponencijalnu raspodelu $\mathcal{E}(5)$.

---

[186] *Na uzorku od* 100 *četvoročlanih porodica posmatrana je dnevna potrošnja mleka i dobijeni rezultati su prikazani u tabeli:*

potrošnja mleka (ℓ)	$[0, 0.5)$	$[0.5, 1)$	$[1, 1.5)$	$[1.5, 2]$
broj porodica	35	35	18	12

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ *na osnovu datog uzorka* χ^2 *testom testirati hipotezu da prosečna potrošnja mleka ima raspodelu datu funkcijom raspodele*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ x - \frac{1}{4}x^2 & , \ 0 < x \leq 2 \\ 1 & , \ x > 2 \end{cases}$$

Rešenje:

Neka je X obeležje koje predstavlja dnevnu potrošnju mleka jedne četvoročlane porodice. Obim uzorka je: $n = 35 + 35 + 18 + 12 = 100$, broj intervala $k = 4$, raspodela obeležja je potpuno definisana tj. nema nepoznatih parametara pa je $s = 0$.

Teorijske verovatnoće (verovatnoće po hipotezi) obeležja X nalazimo na sledeći način:

$p_1 = \mathsf{P}(X \in [0, 0.5)) = F_X(0.5) - F_X(0) = \frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16} = 0.4375,$

$p_2 = \mathsf{P}(X \in [0.5, 1)) = F_X(1) - F_X(0.5) = \frac{3}{4} - \frac{7}{16} = \frac{5}{16} = 0.3125,$

$p_3 = \mathsf{P}(X \in [1, 1.5)) = F_X(1.5) - F_X(1) = \frac{15}{16} - \frac{3}{4} = \frac{3}{16} = 0.1875,$

$p_4 = \mathsf{P}(X \in [1.5, 2]) = F_X(2) - F_X(1.5) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} = 0.0625.$

Vrednost statistike $z = \sum\limits_{i=1}^{4} \frac{(n_i - 100 \cdot p_i)^2}{100 \cdot p_i} =$
$= \frac{\left(35 - 100 \cdot \frac{7}{16}\right)^2}{100 \cdot \frac{7}{16}} + \frac{\left(35 - 100 \cdot \frac{5}{16}\right)^2}{100 \cdot \frac{5}{16}} + \frac{\left(18 - 100 \cdot \frac{3}{16}\right)^2}{100 \cdot \frac{3}{16}} + \frac{\left(12 - 100 \cdot \frac{1}{16}\right)^2}{100 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{188}{25} = 7.52.$ U ovom slučaju, najveće dozvoljeno odstupanje je $\chi^2_{1-0.05;4-1-0} = \chi^2_{0.95;3} = 7.81$. Kako je $z = 7.52 < 7.81$, zaključujemo da sa pragom značajnosti 0.05 ne odbacujemo hipotezu da obeležje X ima pretpostavljenu raspodelu.

---

[187] *U jednoj biblioteci je ispitivana dužina izdavanja knjige u čitaonici u satima. Broj knjiga i vreme na koje su bile izdate u nekom slučajno odabranom uzorku dat je u tabeli*

vreme [h]	*< 0.5*	*0.5 - 1*	*1 - 1.5*	*> 1.5*
broj izdavanja	*5*	*14*	*22*	*34*

.

Sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$ *testirati hipotezu da dužina izdavanja knjige ima raspodelu datu gustinom*

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Rešenje: Testiraćemo χ^2-testom nultu hipotezu da raspodela posmatranog obeležja ima gustinu $\varphi_X(x)$. Smatramo da je skup realnih brojeva već podeljen na intervale $(0, 0.5)$, $(0.5, 1)$, $(1, 1.5)$, $(1.5, 2)$ koji sadrže dovoljno elemenata, pa je broj intervala $k = 4$. Obim uzorka je $n = 75$ a s je ponovo 0, zato što nema nepoznatih parametara.

Verovatnoće pripadanja pojedinim intervalima obeležja „dužina izdavanja knjige" računamo pomoću odgovarajuće funkcije raspodele (koja je već određena u zadatku [99]):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \frac{1}{4}x^2, & 0 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Imamo $p_i = F_X(b_i) - F_X(a_i)$. Izračunaćemo verovatnoće p_i za $i = 1, 2, 3, 4$ i upisati u tabelu. Na primer $p_1 = F_X(0.5) - F_X(-\infty) = \frac{1}{4}0.5^2 - 0 = \frac{1}{16} = 0.0625$.

Da bismo lakše izračunali vrednost statistike

$$Z = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N_i - np_i)^2}{np_i}$$

u tabelu ćemo upisati i vrednosti np_i i $\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$.

i	1	2	3	4
(a_i, b_i)	$(0, 0.5)$	$(0.5, 1)$	$(1, 1.5)$	$(1.5, 2)$
n_i	5	14	22	34
p_i	0.0625	0.1875	0.3125	0.4375
np_i	4.6875	14.0625	23.4375	32.8125
$\frac{(n_i-np_i)^2}{np_i}$	0.02083	0.00028	0.08817	0.04298

Zbir brojeva iz poslednje vrste nam daje vrednost statistike $z = 0.15$, koju upoređujemo sa tabličnom vrednošću $\chi^2_{1-0.01;4-1-0} = \chi^2_{0.99;3} = 11.3$. Kako je vrednost izračunate statistike z (0.15) manja od tablične (11.3), ne odbacujemo nultu hipotezu sa pragom značajnosti 0.01.

---

[188] *Data je gustina obeležja* X: $\varphi_X(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}$, $x > 0$. χ^2 *testom testirati saglasnost uzorka*

I_i	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 4]$	$(4, 6]$	$(6, +\infty)$
n_i	24	12	8	4	2

sa datim obeležjem sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Funkcija raspodele slučajne promenljive X je:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \leq 0 \\ \int\limits_0^x \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-\sqrt{x}}dx & , \; x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & , \; x \leq 0 \\ 1 - e^{-\sqrt{x}} & , \; x > 0 \end{cases},$$

a u tablici spajamo poslednja dva intervala da bi u svakom intervalu bilo najmanje 5 elemenata. Obim uzorka $n = 24+12+8+6 = 50$. Odgovarajuće teorijske verovatnoće p_i dobijamo na sledeći način:

$p_i = \mathsf{P}(X \in (a_i, b_i]) = F_X(b_i) - F_X(a_i)$.

Prema tome, χ^2 test primenjujemo na sledeće podatke:

$(a_i, b_i]$	$(0, 1]$	$(1, 2]$	$(2, 4]$	$(4, +\infty)$
n_i	24	12	8	6
p_i	0.6321	0.1248	0.1078	0.1353
np_i	31.606	6.238	5.389	6.767

Sada dobijamo:

$$z = \sum_{i=1}^{4} \frac{(np_i - n_i)^2}{np_i} = 8.51 > \chi^2_{3;0.95} = 7.81,$$

što znači da hipotezu odbacujemo sa datim pragom značajnosti.

Napomena: Da smo odabrali prag značajnosti 0.01, tj. smanjili verovatnoću greške I vrste, hipotezu ne bismo odbacili jer bi tablična vrednost bila $\chi^2_{3;0.99} = 11.3$. Bez menjanja praga značajnosti, preciznost se može povećati usitnjavanjem intervala podele, tj. povećavanjem broja k, što se može zaključiti i posmatranjem tablice χ^2-raspodele u kojoj vrednosti u istoj koloni rastu uporedo sa povećanjem stepena slobode.

---

[189] *Na jednoj autobuskoj liniji je ispitivano koliko minuta je putnik čekao autobus. Anketirano je* 50 *slučajno odabranih putnika i rezultati su dati u tabeli:*

I_i	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
n_i	15	10	9	12	4

χ^2 *testom sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da vreme čekanja autobusa ima uniformnu raspodelu* $\mathcal{U}(0,5)$.

Rešenje: Pošto poslednji interval sadrži samo 4 elementa iz uzorka, njega ćemo spojiti sa pretposlednjim intervalom:

I_i	$[0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,5]$
n_i	15	10	9	16

Dakle, $k = 4$, $n = 50$ i $s = 0$.
Teorijske verovatnoće računamo pomoću funkcije raspodele za uniformnu raspodelu i one iznose:

$p_1 = F_X(1) - F_X(0) = \frac{1-0}{5-0} - \frac{0-0}{5-0} = \frac{1}{5}$,
$p_2 = F_X(2) - F_X(1) = \frac{2-0}{5-0} - \frac{1-0}{5-0} = \frac{1}{5}$,
$p_3 = F_X(3) - F_X(2) = \frac{3-0}{5-0} - \frac{2-0}{5-0} = \frac{1}{5}$,
$p_4 = F_X(5) - F_X(3) = \frac{5-0}{5-0} - \frac{3-0}{5-0} = \frac{2}{5}$.

Ako je naša hipoteza tačna, tada za realizovane vrednosti $n_1 = 15$, $n_2 = 10$, $n_3 = 9$, $n_4 = 16$ slučajne promenljive X, vrednost statistike

$$z = \sum_{i=1}^{4} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \frac{(15-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(16-20)^2}{20} = 3.4$$

treba da predstavlja realizaciju slučajne promenljive sa približno χ^2_3 raspodelom. Iz tablica za χ^2 raspodelu za prag značajnosti $\alpha = 0.05$ nalazimo da je $\chi^2_{0.95;3} = 7.81$. Pošto je $3.4 < 7.81$, ne odbacujemo (sa pragom značajnosti 0.05) hipotezu da vreme čekanja autobusa ima $\mathcal{U}(0,5)$ raspodelu.

---

[190] *Ispitati sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$ *da li su sledeći podaci u skladu sa Poasonovom* $\mathcal{P}(3)$ *raspodelom.*

x_i	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
n_i	*2*	*4*	*12*	*32*	*15*	*3*	*0*	*2*

Rešenje: Opservacijom podataka uočavamo da pojedine grupe imaju manje od 5 elemenata, pa moramo na početku izvršiti spajanje grupa. Poslednji interval ćemo proširiti kako bi obuhvatio sve moguće vrednosti Poasonove raspodele.

x_i	0, 1	2	3	4	5,6,...
n_i	6	12	32	15	5

Vidimo da je $n = 70$, $k = 5$ a broj ocenjenih parametara $s = 0$. Teorijske verovatnoće računamo po formuli: $\mathsf{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$. Dakle:

$p_1 = \mathsf{P}(X=0) + \mathsf{P}(X=1) = \dfrac{3^0}{0!}e^{-3} + \dfrac{3^1}{1!}e^{-3} = 0.199,$

$p_2 = \mathsf{P}(X=2) = \dfrac{3^2}{2!}e^{-3} = 0.224.$

Slično, dobijamo i $p_3 = 0.224$ i $p_4 = 0.168$, a poslednju teorijsku verovatnoću najjednostavnije računamo na sledeći način: $p_5 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4) = 0.185$.
Vrednost test-statistike Z je

$$z = \frac{(6 - 70 \cdot 0.199)^2}{70 \cdot 0.199} + ... + \frac{(5 - 70 \cdot 0.185)^2}{70 \cdot 0.185} = 28.137.$$

Kako je ova vrednost veća od najvećeg dozvoljenog odstupanja $\chi^2_{1-0.01,5-1-0} = 13.27$, sa pragom značajnosti 0.01 zaključujemo da podaci nisu u skladu sa $\mathcal{P}(3)$ raspodelom.

Napomena: Ako pretpostavljena raspodela ima beskonačan skup vrednosti, teorijska verovatnoća pripadanja poslednjem intervalu $p_k = F_X(\infty) - F_X(a_k)$ se u praksi računa na sledeći način:

$$p_k = 1 - (p_1 + p_2 + ... + p_{k-1}).$$

---

[191] *Fabrika sijalica je testirala dužinu trajanja na 80 slučajno odabranih sijalica i dobila rezultate.*

dužina trajanja [h]	*0 - 50*	*50 - 100*	*100 - 200*	*200 - 400*	*400 - 700*	*700 - 1100*
broj sijalica	*17*	*16*	*20*	*17*	*5*	*5*

Testirati hipotezu da posmatrani uzorak ima eksponencijalnu raspodelu sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rešenje: U zadatku nije rečeno koliko iznosi parametar eksponencijalne raspodele a. U tom slučaju se posmatrani parametar ocenjuje nekom poznatom metodom, a $s = 1$ (broj stepeni slobode se umanjuje za 1).
Metodom momenata dobijamo ocenu $a = \frac{1}{\bar{x}_n}$. Iz uzorka dobijamo da je $\bar{x}_n = 209.0625$ pa je ocenjeno $a = 1/209.0625 = 0.005$.
Teorijske verovatnoće računamo pomoću odgovarajuće funkcije raspodele, a vrednosti se nalaze u pomoćnoj tabeli. Računanje je ilustrovano sledećim primerom:

$$p_2 = \mathsf{P}(X \in [50, 100)) = F_X(100) - F_X(50) = 1 - e^{-0.005 \cdot 100} - (1 - e^{-0.005 \cdot 50}) = 0.167.$$

Slično dobijamo i ostale verovatnoće, osim poslednje p_6 koju računamo kao $p_6 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5)$, zato što intervali ne pokrivaju ceo skup vrednosti eksponencijalne raspodele (moguće je da sijalica traje i duže od 1100 sati).

i	1	2	3	4	5	6
I_i	$[0, 50)$	$[50, 100)$	$[100, 200)$	$[200, 400)$	$[400, 700)$	$[700, +\infty)$
p_i	0.212714	0.167466	0.235643	0.236585	0.112447	0.035145
np_i	17.01712	13.39728	18.85144	18.92680	8.99576	2.81160
n_i	17	16	20	17	5	5
$\frac{(np_i - n_i)^2}{np_i}$	0.00002	0.50563	0.06998	0.19615	1.77485	1.70333

Sabiranjem brojeva iz poslednje vrste dobijamo vrednost test-statistike $z = 4.25$. Kako je taj broj manji od tablične vrednosti $\chi^2_{1-0.05;6-1-1} = 9.49$, hipotezu o saglasnosti obeležja sa eksponencijalnom raspodelom ne odbacujemo sa pragom značajnosti 0.05.

---

[192] χ^2 *testom sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$ *testirati hipotezu da dati uzorak ne protivureči normalnoj raspodeli* $\mathcal{N}(m, 4)$*:*

$(1,3]$	$(3,5]$	$(5,8]$	$(8,12]$	$(12,15]$	$(15,17]$
2	3	7	10	11	7

Rešenje:

Pošto u raspodeli obeležja X figuriše nepoznati parametar m, njega treba oceniti. Naravno da za ocenu matematičkog očekivanja m obeležja X možemo uzeti uzoračku aritmetičku sredinu.

Za naš dati uzorak obima $n = 2+3+7+10+11+7 = 40$ dobijamo

$m = \frac{1}{40}(2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 6.5\cdot 7 + 10\cdot 10 + 13.5\cdot 11 + 16\cdot 7) = 10.55$,

gde smo za x_i uzeli sredine datih intervala.

Testiraćemo hipotezu da obeležje X ima normalnu raspodelu $\mathcal{N}(10.55, 4)$.

Svaki interval uzorka mora imati bar 5 elemenata iz uzorka i intervali moraju da prekriju celu realnu pravu (zbog $\mathcal{R}_X = \mathbb{R}$), pa spajanjem prvog i drugog intervala dobijamo sledeće podatke za primenu χ^2 testa:

$(a_i, b_i]$	$(-\infty,5]$	$(5,8]$	$(8,12]$	$(12,15]$	$(15,\infty)$
n_i	5	7	10	11	7

Označimo redom intervale: $I_i = (a_i, b_i]$, $i \in \{1,2,3,4,5\}$.Teorijske verovatnoće na sledeći način:

$p_i = \mathsf{P}(X \in I_i) = \mathsf{P}(a_i < X \leq b_i) = \mathsf{P}(a_i - 10.55 < X - 10.55 \leq b_i - 10.55) =$

$= \mathsf{P}\left(\frac{a_i - 10.55}{4} < \frac{X-10.55}{4} \leq \frac{b_i - 10.55}{4}\right) \overset{[1]}{\approx} \phi\left(\frac{b_i-10.55}{4}\right) - \phi\left(\frac{a_i-10.55}{4}\right)$.

[1] - Slučajna promenljiva $X^* = \frac{X-10.55}{4}$ ima približno $\mathcal{N}(0,1)$ zato što X ima $\mathcal{N}(10.55, 4)$ raspodelu.

Tako dobijamo

$p_1 = \mathsf{P}(X \in (-\infty, 5]) \approx \phi(-1.3875) - \phi(-\infty) = (1 - \phi(1.3875)) - 0 \approx (1 - 0.9177) - 0 \approx 0.0823$,

$p_2 = \mathsf{P}(X \in (5,8]) \approx \phi(-0.6375) - \phi(-1.3875) \approx (1 - 0.7389) - (1 - 0.9177) \approx 0.1788$,

$p_3 = \mathsf{P}(X \in (8,12]) \approx \phi(0.3625) - \phi(-0.6375) \approx 0.6406 - (1 - 0.7389) \approx 0.3795$,

$p_4 = \mathsf{P}(X \in (12,15]) \approx \phi(1.1125) - \phi(0.3625) \approx 0.8665 - 0.6406 \approx 0.2259$,

$p_5 = \mathsf{P}(X \in (15,\infty]) \approx \phi(\infty) - \phi(1.1125) \approx 1 - 0.8665 \approx 0.1335$.

Vrednost statistike $Z = \sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$ za naš uzorak iznosi

$z = \frac{(5-40\cdot 0.0823)^2}{40\cdot 0.0823} + \frac{(7-40\cdot 0.1788)^2}{40\cdot 0.1788} + \frac{(10-40\cdot 0.3795)^2}{40\cdot 0.3795} + \frac{(11-40\cdot 0.2259)^2}{40\cdot 0.2259} + \frac{(7-40\cdot 0.1335)^2}{40\cdot 0.1335} \approx 3.5999$,

a iz tablica očitavamo odgovarajuću vrednost χ^2 raspodele:

$$\chi^2_{0.05;5-1-1} = \chi^2_{0.05;3} \approx 7.81.$$

Pošto je $\chi^2_{0.05;3} > z$, ne odbacujemo hipotezu da obeležje X ima $\mathcal{N}(10.55, 4)$ raspodelu.

Napomena: Pojedini autori smatraju da je upotreba χ^2-testa opravdana ukoliko je obim uzorka bar 40.

---

[193] *U svaku od* 100 *meta izvedeno je po* 10 *gađanja. Zabeležen je sledeći broj pogodaka:*

broj pogodaka:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
učestalost:	1	1	4	11	22	25	19	12	3	0	2

Sa nivoom značajnosti $\alpha = 0.05$ *proveriti da li broj pogodaka ima binomnu raspodelu.*

Rešenje: Broj pogodaka može biti od 0 do 10, pa testiramo saglasnost sa binomnom $\mathcal{B}(10,p)$ raspodelom. Nepoznati parametar p ocenjujemo metodom momenata. Matematičko očekivanje kod binomne $\mathcal{B}(n,p)$ je $\mathrm{E}(X) = np$, pa je ocena parametra p:

$$\hat{p} = \frac{1}{n}\overline{x}_{100} = \frac{1}{1000}(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + ... + 10 \cdot 2) = 0.497.$$

Hipoteza je, dakle, da obeležje X ima $\mathcal{B}(10, 0.497)$ raspodelu. $n = 100$, $s = 1$ a pre određivanja broja grupa k moramo izvršiti spajanje grupa podataka tako da u svakoj grupi bude bar 5 realizacija:

broj pogodaka (k)	$0,1,2$	3	4	5	6	7	$8,9,10$
učestalost (n_k)	6	11	22	25	19	12	5

Dakle, $k = 7$. Teorijske verovatnoće su

$$\mathsf{P}(X = k) = \binom{10}{k}\hat{p}^k (1-\hat{p})^{10-k},\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 10\},$$

odnosno

$p_1 = \mathsf{P}(X = 0) + \mathsf{P}(X = 1) + \mathsf{P}(X = 2) \approx 0.0568,$

$p_2 = \mathsf{P}(X = 3) \approx 0.1200, \quad p_3 = \mathsf{P}(X = 4) \approx 0.2075,$

$p_4 = \mathsf{P}(X = 5) \approx 0.2460, \quad p_5 = \mathsf{P}(X = 6) \approx 0.2026,$

$p_6 = \mathsf{P}(X = 7) \approx 0.1144,$

$p_7 = 1 - \sum\limits_{i=1}^{6} p_i \approx 0.04237.$

Iz tablica očitavamo $\chi^2_{1-\alpha;7-1-1} = \chi^2_{0.95;5} = 11.1$. Pošto je $z = \sum\limits_{k=1}^{7} \frac{(n_k - 100 \cdot p_k)^2}{100 \cdot p_k} = 0.425 < 11.1$ konstatujemo da uzorak ne protivreči hipotezi.

---

[194] *U periodu od* 50 *godina je praćen broj kišovitih dana u Briselu, i dobijeni podaci su predstavljeni u sledećoj tabeli:*

broj kišnih dana	$[0, 40]$	$(40, 80]$	$(80, 100]$	$(100, 120]$	$(120, 360]$
broj godina	5	14	14	11	6

χ^2 *testom sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$ *testirati hipotezu da broj kišnih dana u godini u Briselu ima normalnu raspodelu.*

Rešenje: Za ocenjivanje nepoznatih parametara m i σ normalne raspodele $\mathcal{N}(m,\sigma)$ koristimo uzoračku aritmetičku sredinu i uzoračku standardnu devijaciju, koje računamo po formulama za intervalni uzorak:

$$\bar{x}_{50} = \tfrac{1}{50}(5\cdot 20 + 14\cdot 60 + 14\cdot 90 + 11\cdot 110 + 6\cdot 240) = 97,$$
$$\bar{s}^2_{50} = \tfrac{1}{50}\left(5\cdot 20^2 + 14\cdot 60^2 + 14\cdot 90^2 + 11\cdot 110^2 + 6\cdot 240^2\right) - 97^2 = 3481,$$
$$\bar{s}_{50} = \sqrt{\bar{s}^2_{50}} = 59.$$

Sa ovako izračunatim parametrima nalazimo potrebne teorijske verovatnoće za obeležje X sa normalnom $\mathcal{N}(97,59)$ raspodelom, a broj stepena slobode ćemo umanjiti za $s=2$. Verovatnoće računamo standardizacijom sl.promenljive X, tj. transformacijom $X^* = \frac{x-97}{59}$:

$$p_i = \mathsf{P}(X \in (a_i,b_i)) = \phi\left(\frac{b_i-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{a_i-97}{59}\right).$$

Dakle:

$p_1 \approx \phi\left(\frac{40-97}{59}\right) - \phi(-\infty) \approx 0.166 - 0 \approx 0.166,$

$p_2 \approx \phi\left(\frac{80-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{40-97}{59}\right) \approx 0.3859 - 0.166 \approx 0.2199,$

$p_3 \approx \phi\left(\frac{100-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{80-97}{59}\right) \approx 0.5199 - 0.3859 \approx 0.134,$

$p_4 \approx \phi\left(\frac{120-97}{59}\right) - \phi\left(\frac{100-97}{59}\right) \approx 0.6517 - 0.5199 \approx 0.1318,$

$p_5 = 1 - (p_1+p_2+p_3+p_4) \approx 0.3483.$

Iz podataka sledi da je $n=50$, pa je izračunata vrednost test-statistike $z = 20.52$. Pošto je $z > \chi^2_{1-0.01;5-1-2} = \chi^2_{0.99;2} = 9.21$, hipotezu odbacujemo sa datim pragom značajnosti.

---

[195] *Kockica za igru je bačena 1000 puta i dobijeno je*

broj na kocki	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
broj pojavljivanja	*125*	*175*	*160*	*175*	*165*	*200*

χ^2*-testom sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.01$ *testirati hipotezu da je kockica ispravna.*

Rešenje: Ako je kockica ispravna (homogena), svih šest brojeva treba da se pojavljuju sa istom verovatnoćom $p = \frac{1}{6}$. Dakle, ispitujemo da li obeležje koje predstavlja broj koji padne na gornjoj strani kocke ima tzv. diskretnu uniformnu raspodelu $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. Teorijska verovatnoća je za svaki pali broj $p_i = \frac{1}{6}, i = 1,\ldots 6$. Preostaje nam da izračunamo vrednost statistike z i uporedimo sa tabličnom vrednošću $\chi^2_{5;0.99} = 15.1$.

Pošto je $z = 18.2 > 15.1$, odbacujemo nultu hipotezu da svih šest strana kocke imaju istu verovatnoću, odnosno, sa pragom značajnosti 0.01 zaključujemo da je kocka neispravna.

---

[196] *Sumnja se da je kockica za igru „nameštena". Zamoljeno je 200 osoba da je na slučajan način bace po 5 puta i da registruju koliko puta im je pala šestica.*

Testirati hipotezu da je kocka ispravna sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

broj šestica	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
broj bacača	*74*	*69*	*43*	*12*	*1*	*1*

Rešenje: Kad raspolažemo ovakvim podacima, možemo χ^2-testom proveriti ispravnost kocke. Testiraćemo hipotezu da obeležje „broj šestica" ima binomnu raspodelu $\mathcal{B}(5, \frac{1}{6})$. Ako je kockica ispravna, verovatnoća da padne jedna šestica je $\frac{1}{6}$. Verovatnoću da padne k šestica u 5 bacanja računamo po formuli $p_k = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{5-k}$, $k = 0, 1, \ldots, 5$. Na primer, $p_2 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 10\frac{125}{7776} = 0.16075$. Kao što je uobičajeno, spojićemo poslednja tri intervala da bi dobili dovoljno velike frekvencije i pravilno primenili test. Tada verovatnoću u poslednjoj koloni izračunavamo sabiranjem pojedinačnih verovatnoća $p_3 + p_4 + p_5 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0.03215 + 0.00322 + 0.00012 = 0.03549$.

k	0	1	2	3, 4 i 5
p_k	0.40188	0.40188	0.16075	0.03549
np_k	80.376	80.376	32.150	7.098
n_k	74	69	43	14
$\frac{(np_k-n_k)^2}{np_k}$	0.506	1.610	3.662	6.711

Sabiranjem brojeva iz poslednje vrste dobijamo vrednost statistike $z = 0.506 + 1.610 + 3.662 + 6.711 = 12.489$. Izračunata vrednost je veća od tablične $\chi^2_{3;0.95} = 7.81$, zato odbacujemo nultu hipotezu da je kockica ispravna.

Napomena. Vidimo da se jedna pojava (u ovom slučaju ispravnost kockice) može testirati na više načina.

---

[197] *Ispitivanje koje treba da utvrdi da li postoji zavisnost između pola i uspeha na studijama odseka X je sprovedeno na 100 slučajno odabranih studenata. Dobrim uspehom je smatran prosek od najmanje 8.50. Među anketiranim studentima, prosečnu ocenu od bar 8.50 je ostvarilo 16 muških i 15 ženskih studenata, a prosečnu ocenu manju od 8.50 je ostvarilo 39 muških i 30 ženskih studenata. Test izvršiti sa pragom značajnosti* $\alpha = 0.05$.

Rešenje: Obim uzorka je veći od 50, pa je opravdano testiranje hipoteze o nezavisnosti obeležja *pol* i *uspeh na studijama* pomoću tablica kontingencije. Nulta hipoteza tvrdi da su posmatrana obeležja nezavisna. Kako bi lakše odredili teorijske frekvencije, rezultate ćemo prikazati tablično:

	M	*Ž*	*marg.fr.*
≥ 8.50	$f_{11} = 16$	$f_{12} = 15$	$f_{1\star} = 31$
< 8.50	$f_{21} = 39$	$f_{22} = 30$	$f_{2\star} = 69$
marg.fr.	$f_{\star 1} = 55$	$f_{\star 2} = 45$	$n = 100$

U poslednjoj vrsti i poslednjoj koloni se nalaze marginalne frekvencije, koje odgovaraju zbiru frekvencija date vrste, odnosno kolone.
Sada možemo jednostavno izračunati teorijske frekvencije f'_{ij}, pomoću obrasca: $f'_{ij} = \frac{f_{i\star} \cdot f_{\star j}}{n}$. Dakle:

$$f'_{11} = \frac{f_{1\star} \cdot f_{\star 1}}{n} = \frac{31 \cdot 55}{100} = 17.05, \quad f'_{12} = \frac{f_{1\star} \cdot f_{\star 2}}{n} = \frac{31 \cdot 45}{100} = 13.95,$$
$$f'_{21} = \frac{f_{2\star} \cdot f_{\star 1}}{n} = \frac{69 \cdot 55}{100} = 37.95, \quad f'_{22} = \frac{f_{2\star} \cdot f_{\star 2}}{n} = \frac{69 \cdot 45}{100} = 31.05.$$

Vrednost test-statistike Z iznosi:
$z = \frac{(16-17.05)^2}{17.05} + \frac{(15-13.95)^2}{13.95} + \frac{(39-37.95)^2}{37.95} + \frac{(30-31.05)^2}{31.05} = 0.209.$
Najveće dozvoljeno odstupanje empirijskih od teorijskih frekvencija za tablicu kontingencije formata 2×2 i zadati prag značajnosti $\alpha = 0.05$ je

$$\chi^2_{(2-1)\times(2-1),1-0.05} = \chi^2_{1,0.95} = 3.84.$$

Realizovano odstupanje $z = 0.209$ je manje od 3.84, pa sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da su pol i uspeh na studijama nezavisna obeležja kod studenata odseka X.

---

[198] *Na uzorku od 80 ispitanika je sprovedeno ispitivanje sa ciljem da se utvrdi da li postoji uticaj pušenja na javljanje simptoma paradentoze. Rezultati su prikazani u sledećoj tabeli:*

X/Y	*pušači*	*nepušači*
ima simptome	21	6
nema simptome	20	33

Test izvršiti sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.

Rešenje: Nulta hipoteza tvrdi da su obeležja nezavisna. Marginalne frekvencije su 27 (ima simptome), 53 (nema simptome), 41 (pušač) i 39 (nepušač). Obim uzorka $n = 80$. Izračunavanje test-statistike može biti izvršeno i pomoću sledeće radne tabele:

f_{ij}	21	6	20	33
f'_{ij}	13.84	13.16	27.16	25.84
$\frac{(f_{ij}-f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$	3.7	3.89	1.89	1.98

Vrednost $z = 3.7 + 3.89 + 1.89 + 1.98 = 11.46$, što je veće od odgovarajuće tablične vrednosti

$$\chi^2_{(2-1)\times(2-1),1-0.01} = \chi^2_{1,0.99} = 6.63,$$

pa nultu hipotezu odbacujemo i zaključujemo da postoji zavisnost pušenja i pojave simptoma paradentoze.

---

[199] *Sa pragom značajnosti 0.05 ispitati da li u određenom fabričkom postrojenju postoji zavisnost između smene i postizanja norme, na osnovu sledećih podataka: normu je postiglo 24 radnika I smene, 29 radnika II smene i 18 radnika III smene; normu nije postiglo 6 radnika I smene, 5 radnika II smene i 10 radnika III smene.*

Rešenje: Nulta hipoteza kaže da su obeležja *smena* i *postizanje norme* nezavisna u ovom postrojenju. Rezultate ćemo ponovo prikazati tablično, i sa uključenim marginalnim frekvencijama:

	I smena	*II smena*	*III smena*	*marg.fr.*
postignuta norma	24	29	18	71
nije postignuta norma	6	5	10	21
marg.fr.	30	34	28	$n = 92$

Odgovarajuće teorijske frekvencije su:

$$f'_{11} = \frac{71 \cdot 30}{92} = 23.15, \quad f'_{12} = \frac{71 \cdot 34}{92} = 26.24, \quad f'_{13} = \frac{71 \cdot 28}{92} = 21.61,$$
$$f'_{21} = \frac{21 \cdot 30}{92} = 6.85, \quad f'_{22} = \frac{21 \cdot 34}{92} = 7.76, \quad f'_{23} = \frac{21 \cdot 28}{92} = 6.39.$$

Sada možemo izračunati empirijsko odstupanje izraženo statistikom Z:

$$z = \frac{(24 - 23.15)^2}{23.15} + \frac{(29 - 26.24)^2}{26.24} + \ldots + \frac{(10 - 6.39)^2}{6.39} = 4.05.$$

Kako je $4.05 < \chi^2_{(2-1)\times(3-1),1-0.05} = \chi^2_{2,0.95} = 5.99$, zaključujemo da u ovom postrojenju između smene i postizanja norme ne postoji zavisnost.

---

[200] *Sa pragom značajnosti* 5% *ispitati na osnovu sledećih podataka da li među ispitanicima postoji zavisnost između pola i visine ličnog dohotka.*

	ispod proseka	*prosečan*	*iznad proseka*
muškarci	14	48	20
žene	16	55	6

Rešenje: Nulta hipoteza u ovom slučaju tvrdi da su pol i visina primanja nezavisni. Marginalne frekvencije i obim uzorka su izračunati u sledećoj tabeli:

	ispod proseka	prosečan	iznad proseka	*marg.fr.*
muškarci	14	48	20	82
žene	16	55	7	78
marg.fr.	30	103	27	$n = 160$

Tablična vrednost je $\chi^2_{(2-1)\times(3-1),1-0.05} = \chi^2_{2,0.95} = 5.99$, a vrednost statistike Z računamo pomoću radne tabele:

f_{ij}	14	48	20	16	55	7
f'_{ij}	15.375	52.79	13.84	14.62	50.21	13.16
$\frac{(f_{ij}-f'_{ij})^2}{f'_{ij}}$	0.12	0.43	2.74	0.13	0.46	2.88

Kako je $z = 0.12 + ... + 2.88 = 6.76 > 5.99$, sa pragom značajnosti 0.05 zaključujemo da su na ispitanom uzorku pol i visina ličnog dohotka zavisna obeležja.

---

[201] *Cilj ovog farmaceutskog istraživanja je da pokaže da li uzimanje određenog leka utiče na sniženje krvnog pritiska, što je u istraživanju označeno kao željeni efekat. Ispitanici su podeljeni u tri grupe - u I grupi su redovno uzimali lek, u II povremeno a u III nisu uzimali lek. Rezultati su prikazani sledećom tabelom:*

	bez efekta	*neznatni efekat*	*znatni efekat*
I grupa	8	32	58
II grupa	17	26	10
III grupa	27	12	6

Test izvršiti sa pragom značajnosti 0.01.

Rešenje: Na osnovu tabele sa marginalnim frekvencijama

	bez efekta	*neznatni efekat*	*znatni efekat*	*marg.fr.*
I grupa	8	32	58	98
II grupa	17	26	10	53
III grupa	27	12	6	45
marg.fr.	52	70	74	$n = 196$

računamo teorijske frekvencije:

$$f'_{11} = \frac{98 \cdot 52}{196} = 26, \quad f'_{12} = \frac{98 \cdot 70}{196} = 35, \quad f'_{13} = \frac{98 \cdot 74}{196} = 37,$$
$$f'_{21} = \frac{53 \cdot 52}{196} = 14.1, \quad f'_{22} = \frac{53 \cdot 70}{196} = 18.9, \quad f'_{23} = \frac{53 \cdot 74}{196} = 20,$$
$$f'_{31} = \frac{45 \cdot 52}{196} = 11.9, \quad f'_{32} = \frac{45 \cdot 70}{196} = 16.1, \quad f'_{33} = \frac{45 \cdot 74}{196} = 17.$$

Tablična vrednost je $\chi^2_{(3-1)\times(3-1),1-0.01} = \chi^2_{4,0.99} = 13.3$, a vrednost statistike Z je

$$z = \frac{(26-8)^2}{26} + \frac{(35-32)^2}{35} + \ ... \ + \frac{(17-6)^2}{17} \approx 60,$$

pa zbog $60 > 13.3$ zaključujemo da postoji uticaj testiranog leka na sniženje krvnog pritiska.

3.4 Uzoračka korelacija i regresija

Do sada smo se bavili statističkim zaključivanjima koja su se odnosila na samo jednu slučajnu promenjivu (obeležje). Statističko zaključivanje može se odnositi i na dve ili više slučajnih promenjivih. U velikom broju istraživanja uočava se veza između dveju ili više promenljivih. U tom slučaju treba da se zaključi da li postoji i kakva je funkcionalna zavisnost među tim veličinama. U nastavku ćemo se baviti statističkim zaključivanjima koja se odnose na dva obeležja X i Y. Tada je uzorak obima n dvodimenzionalnog obeležja (X, Y) dat sa $((X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n))$, a realizovani uzorak je oblika $((x_1, y_1), (x_2, y_2) \dots, (x_n, y_n))$. Na osnovu tih podataka (tačaka) pokušavamo da otkrijemo funkcionalnu vezu ukoliko ona postoji. Na osnovu metode momenata nalazimo ocenu R **koeficijenta korelacije**:

$$R = \frac{\bar{S}_{XY}}{\bar{S}_X \bar{S}_Y} \,,$$

čiju realizovanu vrednost označavamo sa r

$$r = \frac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x \bar{s}_y}$$

gde je $\bar{s}_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}; \quad \bar{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_n)^2};$

$\bar{s}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)(y_i - \bar{y}_n); \quad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

i $\bar{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$

U zavisnosti od dobijene realizovane vrednosti koeficijenta korelacije "u praksi" zaključujemo sledeće:
Ako je $|r| < 0.3$ obeležja X i Y nisu u korelacionoj vezi.
Ako je $0.3 \leq |r| \leq 0.7$ postoji neznatna korelacija između posmatranih obeležja X i Y.
Ako je $|r| > 0.7$ postoji znatna korelacija između posmatranih obeležja X i Y. Pri tome:

- Ako je $0.7 < |r| < 0.9$, postoji znatna linearna korelacija.
- Ako je $|r| \geq 0.9$, linearna korelacija je veoma jaka.

Veza linearne zavisnosti između dve slučajne promenljive izražava se brojem koji se nalazi između -1 i 1. Koeficijent korelacije nam govori da li je veza između dve promenjive pozitivno ili negativno korelisana.
Ako je r pozitivno, tada je linearna regresiona funkcija rastuća (to jest ugao prema x-osi je oštar), a ako je r negativno, tada je linearna regresiona funkcija opadajuća (to jest ugao prema x-osi je tup).
Ako je vrednost $|r|$ bliska jedinici, možemo da zaključimo da je korelacija između X i Y jaka, a ako je vrednost $|r|$ bliska nuli, možemo da zaključimo da su X i Y veoma slabo ili nikako povezane.

U ovom poglavlju razmatraćemo samo formule koje omogućavaju proveru linearne veze (ako postoji) između slučajnih promenljivih, odnosno nalazićemo linearne funkcije koje dobro aproksimiraju dobijeni skup podataka. U statistici se ovo naziva "fitovanje krive".

Jednačina linearne regresije (regresiona prava Y u zavisnosti od X):

(1) **I način**

Regresiona prava

$$\hat{y} = \bar{y}_n + b(x - \bar{x}_n),$$

gde je $b = r\dfrac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x} = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x^2}$ nagib prave.

(2) **II način**

Regresiona prava

$$\hat{y} = a_1 x + a_0,$$

gde je $a_1 = r\dfrac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x} = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x^2}$ nagib prave, $a_0 = \bar{y}_n - a_1\bar{x}_n$.

Jednačina linearne regresije (regresiona prava X u zavisnosti od Y):

Regresiona prava

$$\hat{x} = a_1 y + a_0,$$

gde je $a_1 = r\dfrac{\bar{s}_x}{\bar{s}_y} = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_y^2}$ nagib prave, $a_0 = \bar{y}_n - a_1\bar{x}_n$.

---

[202] *Dati su parovi podataka o temperaturi ([°C]) eksperimentalne pločice od ispitivanog materijala i veličini pukotine ([mm]) na njoj.*

temperatura [°C]	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	1.0	2.0
veličina pukotine [mm]	0.2	0.4	0.5	0.8	1.0	1.3

Podatke predstaviti dijagramom rasipanja (scatter). Naći pravu linearne regresije veličine pukotine u zavisnosti od temperature i ucrtati je na dijagram. Izračunati koeficijent linearne korelacije. Prognozirati širinu pukotine na 2.5 °C.

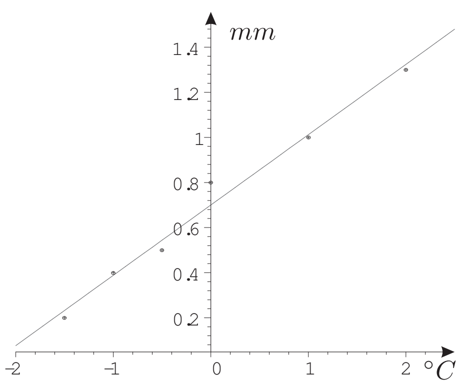
Rešenje:

Proglasimo temperaturu za obeležje X, a odgovarajuću širinu pukotine za obeležje Y. Treba da izračunamo koeficijent a_1 u jednačini

$$y = a_1 x + a_0$$

preko formule $a_1 = r\dfrac{\bar{s}_y}{\bar{s}_x}$, gde su $\bar{s}_X$ i $\bar{s}_Y$ standardne devijacije obeležja X i Y, r je koeficijent linearne korelacije

$$r = \frac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x \bar{s}_y}.$$



Veličina uzorka je $n = 6$.

Izračunavamo aritmetičke sredine: $\bar{x}_6 = \dfrac{1}{6} \cdot (-1.5 - 1.0 - 0.5 + 0.0 + 1.0 + 2.0) = 0.0$ i $\bar{y}_6 = \dfrac{1}{6} \cdot (0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.8 + 1.0 + 1.3) = 0.7$.

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_6$	$y_i - \bar{y}_6$	$(x_i - \bar{x}_6)^2$	$(y_i - \bar{y}_6)^2$	$(x_i - \bar{x}_6) \cdot (y_i - \bar{y}_6)$
-1.50	0.20	-1.5	-0.5	2.25	0.25	0.75
-1.00	0.40	-1.0	-0.3	1.00	0.09	0.30
-0.50	0.50	-0.5	-0.2	0.25	0.04	0.10
0.00	0.80	0.0	0.1	0.00	0.01	0.00
1.00	1.00	1.0	0.3	1.00	0.09	0.30
2.00	1.30	2.0	0.6	4.00	0.36	1.20
				8.50	0.84	2.65

Standardne greške su: $\bar{s}_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x}_6)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{6} \cdot 8.50} = 1.19024$;

$\bar{s}_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{6}(y_i - \bar{y}_6)^2} = \sqrt{\dfrac{1}{6} \cdot 0.84} = 0.37417$;

$\bar{s}_{xy} = \dfrac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - \bar{x}_6)(y_i - \bar{y}_6) = \dfrac{1}{6} \cdot 2.65 = 0.44166$.

Tako da je $r = \dfrac{0.44166}{1.19024 \cdot 0.37417} = 0.9917$;

$a_1 = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x^2} = \dfrac{0.44166}{1.19024^2} = 0.31176$;

$a_0 = \bar{y}_6 - a_1\bar{x}_6 = 0.7 - 0.31176 \cdot 0 = 0.7$.

Vidimo da jednačina prave linearne regresije glasi

$$\hat{y} = 0.31176x + 0.7 \ ,$$

tako da prognoziramo da će širina pukotine na $2.5°C$ biti

$$\hat{y}(2.5°) = 0.31176 \cdot 2.5 + 0.7 = 1.4794 \, mm.$$

Koeficijent korelacije r je broj iz intervala $[-1, 1]$ i on nam govori o tome koliko je jaka linearna korelacija između posmatranih obeležja. U našem slučaju, reč je o vrlo visokoj korelaciji, jer je r po apsolutnoj vrednosti blizu 1.

Dijagram rasipanja dobijamo ucrtavanjem tačaka $(-1.5, 0.2)$, $(-1.0, 0.4)$, $(-0.5, 0.5)$, $(0.0, 0.8)$, $(1.0, 1.0)$, $(2.0, 1.3)$ na xy-ravan. Jednačina regresije je jednačina prave. Poznato je da su nam potrebne dve tačke da bi nacrtali pravu. Uzmimo dve proizvoljne vrednosti za x, na primer $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Uvrštavanjem u jednačinu regresije dobijamo vrednosti $\hat{y}_1 = 0.7$ i $\hat{y}_2 = 1.0117$. Spajanjem tačaka $(0, 0.7)$ i $(1, 1.0117)$ dobijamo traženu regresionu pravu.

[203] *Na slučaj je odabrano 10 studenata i oni su izjavili koliko sati su spremali ispit iz statistike. Njihove odgovore smo uporedili sa bodovima koje su dobili na ispitu. Maksimalni broj bodova koji se može osvojiti na ispitu je* 100.

sati učenja h (X)	*12*	*31*	*22*	*7*	*10.8*	*25*	*15.6*	*23.5*	*17.2*	*14*
bodovi (Y)	*45*	*60*	*88*	*25*	*42*	*85*	*51*	*80*	*60*	*53*

Odrediti jednačinu linearne regresije bodova (y) *u odnosu na vreme provedeno u spremanju ispita, izraženom u satima* (x)*. Okarakterisati koeficijent linearne regresije* r.

Rešenje: Kao i u prethodnom zadatku, prvo ćemo izračunati potrebne veličine. Veličina uzorka je $n = 10$, aritmetičke sredine su:

$\bar{x}_{10} = \dfrac{1}{10} \cdot (12 + 31 + 22 + 7 + 10.8 + 25 + 15.6 + 23.5 + 17.2 + 14) = 17.81$ i

$\bar{y}_{10} = \dfrac{1}{10} \cdot (45 + 60 + 88 + 25 + 42 + 85 + 51 + 80 + 60 + 53) = 58.9.$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_{10}$	$y_i - \bar{y}_{10}$	$(x_i - \bar{x}_{10})^2$	$(y_i - \bar{y}_{10})^2$	$(x_i - \bar{x}_{10}) \cdot (y_i - \bar{y}_{10})$
12.0	45	-5.81	-13.9	33.7561	193.21	80.759
31.0	60	13.19	1.1	173.9761	1.21	14.509
22.0	88	4.19	29.1	17.5561	846.81	121.929
7.0	25	-10.81	-33.9	116.8561	1149.21	366.459
10.8	42	-7.01	-16.9	49.1401	285.61	118.469
25.0	85	7.19	26.1	51.6961	681.21	187.659
15.6	51	-2.21	-7.9	4.8841	62.41	17.459
23.5	80	5.69	21.1	32.3761	445.21	120.059
17.2	60	-0.61	1.1	0.3721	1.21	-0.671
14.0	53	-3.81	-5.9	14.5161	34.81	22.479
				495.1290	3700.90	1049.110

Standardne greške su: $\bar{s}_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2} = \sqrt{\dfrac{1}{10} \cdot 495.1290} = 7.03654;$

$\bar{s}_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y}_{10})^2} = \sqrt{\dfrac{1}{10} \cdot 3700.9} = 19.23772;$

$\bar{s}_{xy} = \dfrac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})(y_i - \bar{y}_{10}) = \dfrac{1}{10} \cdot 1049.110 = 104.911,$

tako da je $r = \dfrac{104.911}{7.03654 \cdot 19.23772} = 0.77501;$

$a_1 = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x^2} = \dfrac{104.911}{7.03654^2} = 2.11886;$

$a_0 = \bar{y}_{10} - a_1\bar{x}_{10} = 58.9 - 2.11886 \cdot 17.81 = 21.1631.$

Vidimo da jednačina prave linearne regresije glasi

$$\hat{y} = 2.11886 \cdot x + 21.1631.$$

Ovde je koeficijent korelacije pozitivan, isto kao i koeficijent a_1, zato što se broj bodova dobijenih na ispitu povećava sa vremenom koje je utrošeno na spremanje ispita.
Pošto je $0.7 < |r| < 0.9$, zaključujemo da postoji znatna linearna korelacija.

---

[204] *U tabeli vidimo prikaz pušačkog staža i kapaciteta pluća kod 10 slučajno odabranih pušača starih trideset godina.*

godine pušenja	*1*	*3*	*6*	*4*	*10*	*3*	*15*	*10*	*8*	*10*
kapacitet pluća [l]	*4.9*	*5.3*	*4.4*	*5.1*	*4.1*	*4.8*	*4.0*	*4.2*	*4.2*	*4.1*

Odrediti jednačinu linearne regresije kapaciteta pluća (y) po godinama pušačkog staža (x) i naći koeficijent linearne regresije r.

Rešenje:
Kao i u prethodnim zadacima, prvo ćemo izračunati potrebne veličine.
Veličina uzorka je $n = 10$, aritmetičke sredine su:
$\bar{x}_{10} = \dfrac{1}{10} \cdot (1 + 3 + 6 + 4 + 10 + 3 + 15 + 10 + 8 + 10) = 7$ i
$\bar{y}_{10} = \dfrac{1}{10} \cdot (4.9 + 5.3 + 4.4 + 5.1 + 4.1 + 4.8 + 4.0 + 4.2 + 4.2 + 4.1) = 4.51.$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_{10}$	$y_i - \bar{y}_{10}$	$(x_i - \bar{x}_{10})^2$	$(y_i - \bar{y}_{10})^2$	$(x_i - \bar{x}_{10}) \cdot (y_i - \bar{y}_{10})$
1	4.9	-6	0.39	36	0.1521	-2.34
3	5.3	-4	0.79	16	0.6241	-3.16
6	4.4	-1	-0.11	1	0.0121	0.11
4	5.1	-3	0.59	9	0.3481	-1.77
10	4.1	3	-0.41	9	0.1681	-1.23
3	4.8	-4	0.29	16	0.0841	-1.16
15	4.0	8	-0.51	64	0.2601	-4.08
10	4.2	3	-0.31	9	0.0961	-0.93
8	4.2	1	-0.31	1	0.0961	-0.31
10	4.1	3	-0.41	9	0.1681	-1.23
				170	2.009	-16

Standardne greške su: $\bar{s}_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})^2} = \sqrt{\dfrac{1}{10} \cdot 170} = 4.12311;$

$\bar{s}_y = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{10}(y_i - \bar{y}_{10})^2} = \sqrt{\dfrac{1}{10} \cdot 2.009} = 0.44822;$

$\bar{s}_{xy} = \dfrac{1}{10}\sum\limits_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}_{10})(y_i - \bar{y}_{10}) = \dfrac{1}{10} \cdot (-16) = -1.6;$

tako da je $r = \dfrac{-1.6}{4.12311 \cdot 0.44822} = -0.86577;$

$a_1 = \dfrac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_x^2} = \dfrac{-1.6}{4.12311^2} = -0.09411;$
$a_0 = \bar{y}_{10} - a_1\bar{x}_{10} = 4.51 - (-0.09471) \cdot 7 = 5.1729.$

Vidimo da jednačina prave linearne regresije glasi

$$\hat{y} = -0.09471 \cdot x + 5.1729.$$

Ovde je koeficijent korelacije negativan, isto kao i koeficijent a_1, zato što kapacitet pluća opada sa dužinom pušenja.

Pošto je $0.7 < |r| < 0.9$, zaključujemo da postoji znatna linearna korelacija.

Za približno godinu dana pušenja, kapacitet pluća opadne za 0.09471 litara (blizu jednog decilitra).

---

[205]

U tabeli su prikazane prosečne aprilske temperature u poslednjih 5 godina, izmerene u Novom Sadu i Budimpešti.

temperatura u Novom Sadu (x) [°C]	*19.3*	*21.1*	*18.5*	*19.9*	*21.4*
temperatura u Budimpešti (y) [°C]	*20.2*	*21.4*	*18.1*	*20.2*	*20.3*

Odrediti jednačinu linearne regresije temperature u Novom Sadu (x) u odnosu na temperature u Budimpešti (y) i naći koeficijent linearne regresije r. Ako je temperatura u Budimpešti [22°C] kolika je prognoza temperature toga dana u Novom Sadu?

Rešenje: Kao u prethodnim zadacima, prvo ćemo izračunati potrebne veličine.

Veličina uzorka je $n = 10$, aritmetičke sredine su:
$\bar{x}_5 = \dfrac{1}{5} \cdot (19.3 + 21.1 + 18.5 + 19.9 + 21.4) = 20.04$ i
$\bar{y}_5 = \dfrac{1}{5} \cdot (20.2 + 21.4 + 18.1 + 20.2 + 20.3) = 20.04.$

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}_5$	$y_i - \bar{y}_5$	$(x_i - \bar{x}_5)^2$	$(y_i - \bar{y}_5)^2$	$(x_i - \bar{x}_5) \cdot (y_i - \bar{y}_5)$
19.3	20	-0.74	0.16	0.5476	0.0256	-0.1184
21.1	21	1.06	1.36	1.1236	1.8496	1.4416
18.5	18	-1.54	-1.94	2.3716	3.7636	2.9876
19.9	20	-0.14	0.16	0.0196	0.0256	-0.0224
21.4	20	1.36	0.26	1.8496	0.0676	0.3536
				5.9120	5.7320	4.6420

Standardne greške su: $\bar{s}_x = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}_{5)^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{5} \cdot 5.912} = 1.08738;$

$$\bar{s}_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{5}(y_i - \bar{y}_5)^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \cdot 5.732} = 1.0707;$$
$$\bar{s}_{xy} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x}_5)(y_i - \bar{y}_5) = \frac{1}{5} \cdot 4.6420 = 0.9284;$$
tako da je $r = \dfrac{0.9284}{1.08738 \cdot 1.0707} = 0.79742;$

$$a_1 = \frac{\bar{s}_{xy}}{\bar{s}_y^2} = \frac{0.9284}{1.0707^2} = 0.80984;$$
$$a_0 = \bar{y}_5 - a_1\bar{x}_5 = 20.04 - (0.80984) \cdot 20.04 = 3.8108.$$

Vidimo da jednačina prave linearne regresije glasi

$$\hat{x} = 0.80984 \cdot y + 3.8108.$$

Ovde je koeficijent korelacije pozitivan, isto kao i koeficijent a_1, zato što temperatura u Novom Sadu raste sa porastom temperature u Budimpešti.

Pošto je $0.7 < \left|r\right| < 0.9$, zaključujemo da postoji znatna linearna korelacija.
Ako je temperatura u Budimpešti $[\,22°C]$, očekivana temperatura toga dana u Novom Sadu iznosi

$$\hat{x} = 0.80984 \cdot 22 + 3.8108 = 21.63°C.$$

4 Statističke tablice

Integrali koji se pojavljuju u funkcijama raspodele slučajnih promenljivih obično nisu rešivi u konačnom obliku. Stoga se njihove vrednosti rešavaju približnim metodama i daju u obliku tablica.

Na stranama koje slede daćemo vrednosti nekih funkcija raspodele.

Za **normalnu raspodelu** $\mathcal{N}(m,\xi)$ se daju tablice samo za $m=0$ i $\xi=1$. Za slučajnu promenljivu koja ima raspodelu $X:\mathcal{N}(m,\xi)$ vrednost funkcije raspodele se računa po sledećoj formuli:

$$F(x) = \mathsf{P}\,(X < x) = \mathsf{P}\left(\frac{X-m}{\xi} < \frac{x-m}{\xi}\right) = \phi\left(\frac{x-m}{\xi}\right) ,$$

gde je $\phi\,(t)$ takozvana Laplasova funkcija. Laplasova funkcija je funkcija raspodele normalne normirane raspodele $X^* = \frac{X-m}{\xi} : \mathcal{N}(0,1)$, i jednaka je integralu

$$\phi\,(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \, .$$

Iz simetričnosti funkcije gustine normalne raspodele dobijamo $\phi\,(-z) = 1 - \phi\,(z)$.

Na primer: tabličnu vrednost $\phi\,(1.23)$ se očitava tako što u preseku vrste sa oznakom 1.2 i kolone 0.03 nađemo $\phi\,(1.23) = 0.8907$.

Ako tražimo vrednost $\phi^{-1}\,(0.975)$, onda u unutrašnjosti tabele nalazimo broj najbliži vrednosti 0.975. Za 0.975 to je baš 0.9750. Zatim vrednost $\phi^{-1}\,(0.95)$ dobijamo sabiranjem oznaka iz nađene vrste i kolone: $\phi^{-1}\,(0.975) = 1.9 + 0.06 = 1.96$.

Za **studentovu raspodelu** t_n sa parametrom n dajemo tablicu brojeve t za koje je vrednost funkcije raspodele

$$F(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} dx$$

jednaka datoj verovatnoći za neke vrednosti n. Takođe imamo $F(-t) = 1 - F(t)$.

Na primer: za $n=8$ vrednost $F(2.3)$ dobijamo koristeći najbližu vrednost u vrsti sa oznakom 8. To je 2.306, pa je $F(2.3) \approx 0.975$.

Ako tražimo vrednost t za koju je $F(t) = 0.90$, pri $n=6$, onda u preseku vrste sa oznakom 6 i kolone sa oznakom .90 očitavamo $F^{-1}(0.90) = 1.440$.

Za **Pirsonovu** χ^2_n raspodelu isto kao za Studentovu raspodelu dajemo brojeve y do kojih je vrednost funkcije raspodele jednaka unapred zadatoj verovatnoći

$$F(y) = \int\limits_{0}^{y} \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2)} dx \, .$$

Na primer: za $n = 10$ vrednost $F(5)$ dobijamo koristeći najbližu vrednost u vrsti sa oznakom 10. To je 4.87, pa je $F(5) \approx 0.1000$.

Ako tražimo vrednost y za koju je $F(y) = 0.95$, pri $n = 3$, onda u preseku vrste sa oznakom 3 i kolone sa oznakom .95 očitavamo $F^{-1}(0.95) = 7.81$.

U tablici asimptotske raspodele **λ-testa** date su vrednosti parova λ i $Q(\lambda)$ za koje je

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sqrt{n}D_n < \lambda\right) = Q(\lambda)\,,$$

gde je D_n statistika Kolmogorova $D_n = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |F_n^*(x) - F(x)|$, gde je $F_n^*(x)$ empirijska funkcija raspodele.

Na primer: za $\lambda = 1.36$ imamo $Q(\lambda) = 0.9505$ i, obrnuto, za $Q(\lambda) = 0.99$, najbliža vrednost je 0.9902, koja daje $\lambda = 1.63$.

4.1 Gausova normalna raspodela $\mathcal{N}(0,1)$

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9237	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.0	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998	.9998

z	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291	3.891	4.417
$\phi(z)$	.9	.95	.975	.99	.995	.999	.9995	.99995	.999995
$2(1-\phi(z))$	.20	.10	.05	.02	.01	.002	.001	.0001	.00001

4.2 Studentova t_n raspodela

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)\sqrt{\pi n}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{(n+1)/2}} dx$$

$n \backslash F$	.75	.90	.95	.975	.990	.995	.9995
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
60	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
∞	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

4.3 Pirsonova χ^2 raspodela $F(y) = \int_0^y (x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}})/(2^{\frac{n}{2}}\Gamma(n/2))dx$

n \ F	.0050	.0100	.0250	.0500	.1000	.2500	.5000	.7500	.9000	.9500	.9750	.9900	.9950
1	3.93e-5	.000157	.000982	.00393	.0158	.102	.455	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	.575	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.0717	.115	.216	.352	.584	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.3	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.3	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.3	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	13.3	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	14.3	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	15.3	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	16.3	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	17.3	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	18.3	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	19.3	23.8	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	20.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	17.2	21.3	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	22.3	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	23.3	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	24.3	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	25.3	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	26.3	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	27.3	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	28.3	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	29.3	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7

4.4 Asimptotska raspodela λ-testa: vrednosti $Q(\lambda)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(D_n < \frac{\lambda}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\sqrt{n}D_n < \lambda\right) = Q(\lambda)\,,$$

$$D_n = \sup_{x\in(-\infty,\infty)} |F_n^*(x) - F(x)|\,.$$

λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$	λ	$Q(\lambda)$
.32	.0000	.66	.2236	1.00	.7300	1.34	.9449	1.68	.9929	2.00	.9993
.33	.0001	.67	.2396	1.01	.7406	1.35	.9478	1.69	.9934	2.01	.9994
.34	.0002	.68	.2558	1.02	.7508	1.36	.9505	1.70	.9938	2.02	.9994
.35	.0003	.69	.2722	1.03	.7608	1.37	.9531	1.71	.9942	2.03	.9995
.36	.0005	.70	.2888	1.04	.7704	1.38	.9557	1.72	.9946	2.04	.9995
.37	.0008	.71	.3055	1.05	.7798	1.39	.9580	1.73	.9950	2.05	.9996
.38	.0013	.72	.3223	1.06	.7889	1.40	.9603	1.74	.9953	2.06	.9996
.39	.0019	.73	.3391	1.07	.7976	1.41	.9625	1.75	.9956	2.07	.9996
.40	.0028	.74	.3560	1.08	.8061	1.42	.9646	1.76	.9959	2.08	.9997
.41	.0040	.75	.3728	1.09	.8143	1.43	.9665	1.77	.9962	2.09	.9997
.42	.0055	.76	.3896	1.10	.8223	1.44	.9684	1.78	.9965	2.10	.9997
.43	.0074	.77	.4064	1.11	.8300	1.45	.9702	1.79	.9967	2.11	.9997
.44	.0097	.78	.4230	1.12	.8374	1.46	.9718	1.80	.9969	2.12	.9998
.45	.0126	.79	.4395	1.13	.8445	1.47	.9734	1.81	.9971	2.13	.9998
.46	.0160	.80	.4559	1.14	.8514	1.48	.9750	1.82	.9973	2.14	.9998
.47	.0200	.81	.4720	1.15	.8580	1.49	.9764	1.83	.9975	2.15	.9998
.48	.0247	.82	.4880	1.16	.8644	1.50	.9778	1.84	.9977	2.16	.9998
.49	.0300	.83	.5038	1.17	.8706	1.51	.9791	1.85	.9979	2.17	.9998
.50	.0361	.84	.5194	1.18	.8765	1.52	.9803	1.86	.9980	2.18	.9999
.51	.0428	.85	.5347	1.19	.8823	1.53	.9815	1.87	.9982	2.19	.9999
.52	.0503	.86	.5497	1.20	.8878	1.54	.9826	1.88	.9983	2.20	.9999
.53	.0585	.87	.5645	1.21	.8930	1.55	.9836	1.89	.9984	2.21	.9999
.54	.0675	.88	.5791	1.22	.8981	1.56	.9846	1.90	.9985	2.22	.9999
.55	.0772	.89	.5933	1.23	.9030	1.57	.9855	1.91	.9986	2.23	.9999
.56	.0876	.90	.6073	1.24	.9076	1.58	.9864	1.92	.9987	2.24	.9999
.57	.0987	.91	.6209	1.25	.9121	1.59	.9873	1.93	.9988	2.25	.9999
.58	.1104	.92	.6343	1.26	.9164	1.60	.9880	1.94	.9989	2.26	.9999
.59	.1228	.93	.6473	1.27	.9206	1.61	.9888	1.95	.9990	2.27	.9999
.60	.1357	.94	.6601	1.28	.9245	1.62	.9895	1.96	.9991	2.28	.9999
.61	.1492	.95	.6725	1.29	.9283	1.63	.9902	1.97	.9991	2.29	.9999
.62	.1633	.96	.6846	1.30	.9319	1.64	.9908	1.98	.9992	2.30	.9999
.63	.1778	.97	.6964	1.31	.9354	1.65	.9914	1.99	.9993	2.31	1.0000
.64	.1927	.98	.7079	1.32	.9387	1.66	.9919				
.65	.2080	.99	.7191	1.33	.9418	1.67	.9924				

5 Ispitni zadaci

U delu koji sledi dati su zadaci sa pismenog dela ispitnih rokova na odsecima „Industrijske sisteme i menadžment” i „Inženjerstvo zaštite životne sredine” Fakulteta tehničkih nauka iz predmeta „Statističke metode u preduzeću” i „Statističke metode”.

Srećan rad.

09. septembar 2007.

---

1. Od 40 džempera u jednom butiku 10% ih je sa greškom. Tanja nije ponela naočare a kupuje dva džempera. Naći verovatnoću događaja A da su oba kupljena džempera bez greške i događaja B da je kupljen tačno jedan sa greškom.

   $P(A) =$

   $P(B) =$

2. Dinar se baca dva puta. Ako je oba puta palo pismo, iz kutije u kojoj se nalaze 2 crne i 3 žute kuglice izvlači se jedna kuglica. U ostalim slučajevima izvlačenje se vrši iz kutije u kojoj se nalaze 2 žute i 3 crne kuglica. Kolika je verovatnoća da će biti izvučena crna kuglica?

3. Strelac gađa metu tri puta. Verovatnoća pogotka u svakom od nezavisnih pokušaja je 0.9. Ako je meta pogođena najviše jedanom strelac dobija -5 poena, ako ostvari dva pogotka dobija 5 poena, a u preostalom slučaju 10 poena. Slučajna promenljiva X predstavlja broj ostvarenih poena. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju za X, kao i $F_X(7.5)$ i $F_X(10)$. Naći raspodelu slučajne promenljive $Y = -X^2 + 5$.

   $X : \Bigg($ $\qquad\qquad$ $Y : \Bigg($

   $E(X) =$

   $F_X(7.5) =$ $\qquad$ $E(X^2) =$

   $F_X(10) =$

   $D(X) =$

4. a) Slučajna promenljiva X ima Uniformnu raspodelu $X : \mathcal{U}(2, 4)$.

   b) Slučajna promenljiva Y ima Normalnu $Y : \mathcal{N}(0; 1)$ raspodelu. Naći sledeće verovatnoće:

   $P(|X - 5| < 2) =$ $\qquad$ $P(Y < -2.35) =$

   $P(X < 1.2) =$ $\qquad$ $P(Y \geq 0.5) =$

5. Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom $\varphi(x) = \begin{cases} a(x-1) & x \in [1, 4] \\ 0 & x \notin [1, 4] \end{cases}$

   Odrediti konstantu a, naći funkciju raspodele slučajne promenljive X i matematičko očekivanje i disperziju za X.

   $E(X) =$

   $a =$ $\qquad$ $F(x) = \Bigg\{$ $\qquad$ $E(X^2) =$

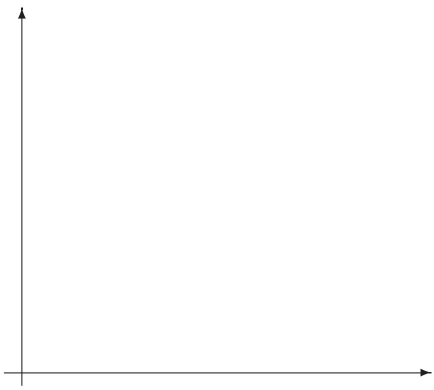
   $D(X) =$

6. Anketirano je 80 studenata o vremenu provedenom u čitaonici. Dobijeni rezultati sređeni su u tabeli

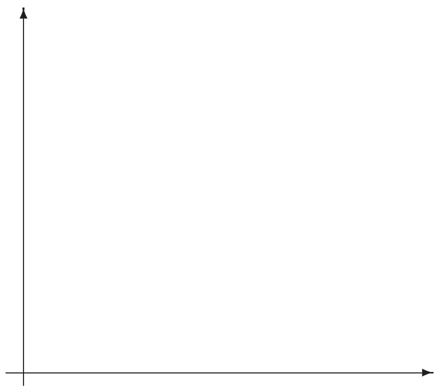
broj sati	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)
broj studenata	12	10	25	18	15

Nacrtati odgovarajući histogram i emirijsku funkciju raspodele. Odrediti modus, medijanu, aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

histogram



empir. fun. rasp.



$$f_n(x) = \begin{cases} \\ \\ \\ \end{cases}$$

medijana:

modus:

$\bar{x}_n =$

$\bar{s}_n^2 =$

Pod pretpostavkom da obeležje X, koje predstavlja broj sati, ima Normalnu raspodelu, testirati hipotezu da je u čitaonici prosečno provedeno 6h sa pragom značajnosti $\alpha = 0.01$.

7. Obeležje X date populacije ima gustinu $\varphi(x) = \begin{cases} \theta(x-2)^{\theta-1}, & x \in (2,3) \\ 0, & x \notin (2,3) \end{cases}$, gde je θ nepoznati parametar. Na osnovu uzorka $(2.5, 2.5, 2.4, 2.6, 2.4, 2.3, 2.6, 2.5, 2.5, 2.3)$ naći ocenu nepoznatog parametra metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti.

metod momenata:	metod maksimalne verodostojnosti:

8. Kortisteći χ^2-test sa pragom značajnosti $\alpha = 0.1$ proveriti da li su podaci

x_i	0	1	2	3	4
n_i	13	27	28	18	14

saglasni sa pretpostavkom da je uzorak iz populacije sa Poasonovom $\mathcal{P}(2)$ raspodelom.

25. septembar 2007.

---

1. Iz kutije u kojoj se nalaze 30 belih, 20 žutih i 10 plavih kuglica biraju se, jedna po jedna, tri kuglice. Kolika je verovatnoća da će uzastopno biti izvučene tri plave kuglice ako a) izvučenu kuglicu vraćamo u kutiju i b) izvučenu kuglicu ne vraćamo u kutiju.

   a)

   b)

2. Iz špila od 32 karte izvlači se jedna karta. Ako je izvučena tref karta, izvlače se dve kuglice istovremeno iz kutije u kojoj se nalaze 6 belih kuglica, ako je izvučen pik, izvlačenje se vrši iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele i 4 crne kuglice, ako je izvučen herc, izvlačenje se vrši iz kutije u kojoj se nalaze 4 bele i 2 crne kuglice i ako je izvučena karo karta izvlačenje se vrši iz kutije u kojoj su 6 crnih kuglica. Kolika je verovatnoća da će obe izvučene kuglice biti bele boje?

3. Baca se kockica za igru "Ne ljuti se čoveče". Slučajna promenljiva X predstavlja ostatak pri deljenju sa 4 palog broja. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X, slučajne promenljive $Y = 5 - X^2$, izračunati matematičko očekivanje i disperziju za Y, kao i $F_Y(4.5)$ i $F_Y(-3)$.

   $X : \Bigg($ $\qquad\qquad\qquad$ $Y : \Bigg($

   $E(Y) =$

   $F_Y(4.5) =$

   $E(Y^2) =$

   $F_Y(-3) =$

   $D(Y) =$

4. Od ukupne proizvodnje automobilskih guma prosečno 2% je škart. Na slučajan način je izabrano 100 guma. Naći tačnu i približnu raspodelu slučajne promenljive X koja predstavlja broj neispravnih guma (od posmatranih 100). Koristeći aproksimaciju normalnom raspodelom izračunati verovatnoću događaja A da je broj neispravnih guma između 2 i 10 i događaja B da je broj neispravnih guma bar 2.

   tačna X : $\qquad\qquad$ približna X :

   $P(A) =$ $\qquad\qquad$ $P(B) =$

5. Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} & x \in [1, e] \\ 0 & x \notin [1, e] \end{cases}$ Odrediti konstantu a, naći funkciju raspodele slučajne promenljive X i matematičko očekivanje i disperziju za X.

$E(X) =$

$a =$ $\quad F(x) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right.$ $\quad E(X^2) =$

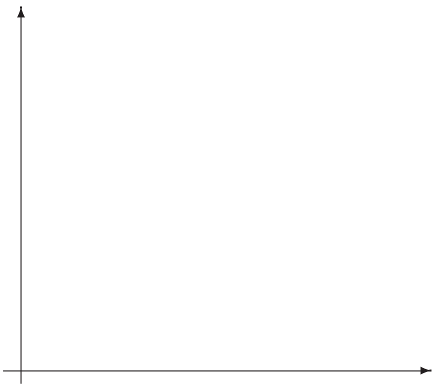
$D(X) =$

6. Izabrano je 80 vozača i merena nedeljna potrošnja benzina. Dobijeni rezultati sređeni su u tabeli

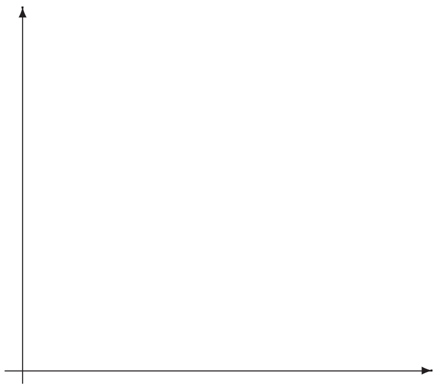
potrošnja benzina [l]	[0,3)	[3,6)	[6,9)	[9,12)	[12,15)
broj vozača	12	13	25	18	12

Nacrtati odgovarajući histogram i emirijsku funkciju raspodele. Odrediti modus, medijanu, aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

histogram



empir. fun. rasp.



$f_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$

medijana:

modus:

$\bar{x}_n =$

$\bar{s}_n^2 =$

Pod pretpostavkom da slučajna promenljiva koja predstavlja potrošnju benzina ima Normalnu raspodelu $\mathcal{N}(m; 4)$ testirati hipotezu da je potrošnja benzina 8 l sa pragom značajnosti $\alpha = 0.1$.

7. Obeležje X date populacije ima raspodelu $X : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1-\theta & \theta/2 & \theta/2 \end{pmatrix}$, gde je θ nepoznati parametar. Na osnovu uzorka $(1, 1, -1, -1, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$ naći ocenu nepoznatog parametra metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti.

metod momenata:

metod maksimalne verodostojnosti:

8. Koristeći χ^2 test sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$ proveriti da li su podaci prikazani u tabeli

x_i	1	2	3	4	5
n_i	19	11	8	6	6

saglasni sa hipotezom da se radi o obeležju sa Geometrijskom $\mathcal{G}(0.4)$. raspodelom.

5. oktobar 2007.

---

1. Iz kutije u kojoj se nalaze 3 plave, 2 žute i 4 crvene kuglice izvlače se dve kuglice istovremeno, a iz špila od 32 karte uzastopno se izvlače tri karte bez vraćanja u špil. Koji je događaj verovatniji, A-izvučene su dve žute kuglice ili B-izvučene su tri tref karte?

2. Takmičar u kvizu je naučio 50 % pitanja iz I oblasti , 75 % pitanja iz II i 90% pitanja iz III oblasti. Na slučajan način bira jednu od tri neobeležene koverte, od kojih svaka sadrži pitanja samo iz po jedne oblasti i iz nje izvlači jedno pitanje. Ako takmičar nije znao odgovor na izvučeno pitanje, kolika je verovatnoća da je izvukao pitanje iz prve koverte?

3. Strelac gađa cilj do prvog pogotka ali najviše četiri puta. Verovatnoća pogotka u svakom od nezavisnih gađanja je 0.9. Slučajna promenljiva X predstavlja broj izvedenih gađanja. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X, slučajne promenljive $Y = -X + 2$, izračunati matematičko očekivanje i disperziju za Y, kao i $F_Y(-0.5)$ i $F_Y(2)$.

   $X : \Big($ $\qquad\qquad$ $Y : \Big($

   $E(Y) =$

   $F_Y(-0.5) =$

   $E(Y^2) =$

   $F_Y(2) =$

   $D(Y) =$

4. Slučajna promenljiva X ima Normalnu $\mathcal{N}(5, 0.7)$ raspodelu. Izračunati sledeće verovatnoće:

   $P(|X - 5| < 1.2) =$

   $P(X > 6.4) =$

5. Neprekidna slučajna promenljiva X data je gustinom $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x}} & x \in [1, 4] \\ 0 & x \notin [1, 4] \end{cases}$. Odrediti konstantu a, naći funkciju raspodele slučajne promenljive X i matematičko očekivanje i disperziju za X.

   $E(X) =$

   $a =$ $\qquad$ $F(x) = \Bigg\{$ $\qquad$ $E(X^2) =$

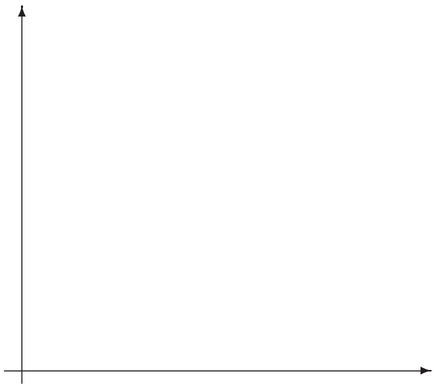
   $D(X) =$

6. Izabrano je 50 vozača i merena potrošnja benzina. Dobijeni rezultati sređeni su u tabeli

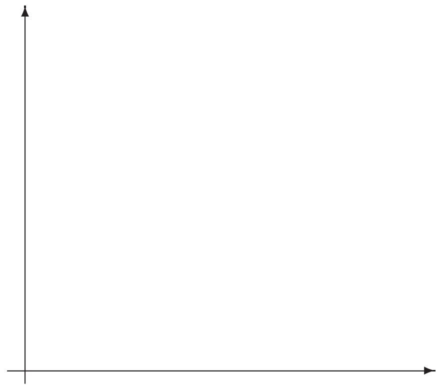
potrošnja benzina [l]	[0,2)	[2,4)	[4,6)	[6,8)	[8,10)	[10,12)
broj vozača	3	7	9	12	11	8

Nacrtati odgovarajući histogram i emirijsku funkciju raspodele. Odrediti modus, medijanu, aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.

histogram



empir. fun. rasp.



$$f_n(x) = \begin{cases} \\ \end{cases}$$

medijana:

modus:

$\bar{x}_n =$

$\bar{s}_n^2 =$

Pod pretpostavkom da slučajna promenljiva koja predstavlja potrošnju benzina ima Normalnu raspodelu naći 90% interval poverenje za nepoznati parametar m.

7. Obeležje X date populacije ima raspodelu $X : \begin{pmatrix} 2 & 3 & 10 \\ 2\theta & 3\theta & 1-5\theta \end{pmatrix}$, gde je θ nepoznati parametar. Na osnovu uzorka $(2,3,2,3,10,3,2,3,3,10,3)$ naći ocenu nepoznatog parametra metodom momenata i metodom maksimalne verodostojnosti.

metod momenata:

metod maksimalne verodostojnosti:

8. Na osnovu podataka prikazanih u tabeli

x_i	-1	0	2	5	10
y_i	-2.1	-1.1	7	17	30

naći jednačinu regresione prave i na osnovu dobijene jednačine oceniti y za $x = 7$.

Literatura

[1] Adžić Nevenka: *Statistika*, Centar za matematiku i statistiku Fakulteta tehničkih nauka, Novi Sad, 2006.

[2] Cvetković Ljiljana:*Poslovna statistika*, Futura publikacije, Novi Sad, 2006.

[3] Erić-Marinković Jelena, Dotlić Rajko, Janošević Slobodanka, Kocev Nikola, Gajić Milan, Ille Tatjana, Stanisavljević Dejana, Babić Dragan:*Statistika za istraživače u oblasti medicinskih nauka*, Medicinski fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2001.

[4] Grbić Tatjana, Nedović Ljubo:*Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz verovatnoće, statistike i slučajnih procesa*, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2001.

[5] Hadžić Olga:*Numeričke i statističke metode u obradi eksperimentalnih podataka I*, Institut za matematiku, Novi Sad, 1989.

[6] Montgomery C. Douglas, Runger C. George:*Applied Statistics and Probability for Engineers(third edition)*, John Wiley & Sons, Inc. 2003.

[7] Spiegel Murray R.:*Schaum's outline of theory and problems of probability and statistics*, second edition, McGRAW-HILL 2000.

[8] Stojaković Mila:*Matematička statistika*, Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad, 2000.