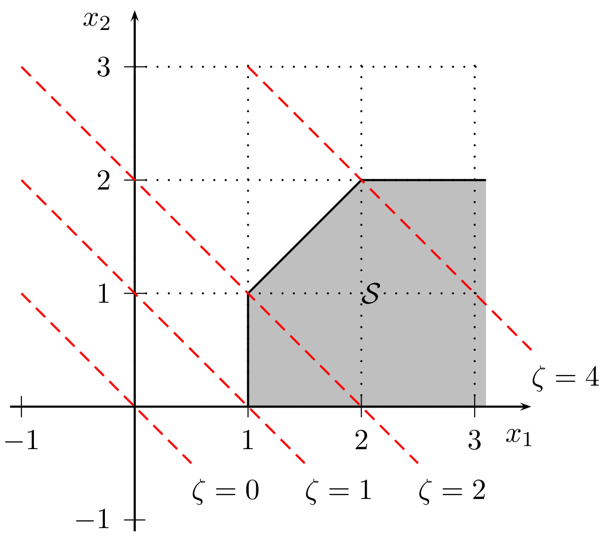
Linearno programiranje - zadaci

a) Rešiti problem linearnog programiranja

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
\zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \min & \\
 & - & x_1 & & & \leq & -1 & \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & 0 & / \cdot (-1) \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 &
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Grafička metoda



Slika 1: a) i b) Isprekidana linija predstavlja vrednosti funkcije $\zeta = x_1 + x_2$.

Sa slike 1 vidimo da je rešenje problema $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $\zeta^* = 1$.

Simplex metoda

Problem dovodimo u standardni oblik sa jednakostima:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrr}
 & x_1 & + & x_2 & & & & & & & \to & \min & & \\
- & x_1 & & & + & w_1 & & & & & = & -1 & + & x_0 \\
- & x_1 & + & x_2 & & & + & w_2 & & & = & 0 & + & x_0 \\
 & & & x_2 & & & & & + & w_3 & = & 2 & + & x_0
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad w_1 \geq 0 \quad w_2 \geq 0 \quad w_3 \geq 0 \quad x_0 \geq 0$$

Dodata je veštačka promenljiva x_0. Prvo rešavamo problem minimizacije $\zeta_1 = x_0$. Kad nađemo njegovo rešenje, došli smo do baznog dopustivog rešenja početnog problema. Odatle nastavljamo da rešavamo početni problem.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	-1	0	1	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	-1	0
w_3	0	1	0	0	1	-1	2
ζ	1	1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	1	0	-1	0	0	1	1
w_2	0	1	-1	1	0	0	1
w_3	1	1	-1	0	1	0	3
ζ	1	1	0	0	0	0	0
ζ_1	-1	0	1	0	0	0	-1

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	-1	0	0	1
w_2	0	1	-1	1	0	1
w_3	0	1	0	0	1	2
ζ	0	1	1	0	0	-1

$$x^* = [1; 0]$$

$$\zeta = 1$$

b) Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr} \zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ & - & x_1 & & & \leq & -1 \\ & & x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\ & & & & x_2 & \leq & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Grafička metoda

Sa slike 1 vidimo da **rešenje problema ne postoji** jer se vrednost funkcije cilja može proizvoljno povećavati (oblast dopustivih tačaka $\mathcal{S}$ je neograničena).

Simplex metoda

Isto kao u prethodnom zadatku dovedemo problem u oblik sa jednakostima i uvodimo promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	-1	0	1	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	-1	0
w_3	0	1	0	0	1	-1	2
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

Veštačka promenljiva x_0 (promenljiva broj 6) ulazi u bazu!

Polazna tabela

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	1	0	-1	0	0	1	1
w_2	0	1	-1	1	0	0	1
w_3	1	1	-1	0	1	0	3
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	-1	0	1	0	0	0	-1

Veštačka promenljiva x_0 (promenljiva br 6) izlazi iz baze!

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	-1	0	0	1
w_2	0	1	-1	1	0	1
w_3	0	1	0	0	1	2
ζ	0	-1	-1	0	0	1

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	-1	0	0	1
x_2	0	1	-1	1	0	1
w_3	0	0	1	-1	1	1
	0	0	-2	1	0	2

3	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	0	-1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	2
w_1	0	0	1	-1	1	1
	0	0	0	-1	2	4

Pošto ispod promenljive w_2 stoji negativan element, a u njegovoj radnoj koloni nema pozitivnih elemenata, zaključujemo da **funkcija cilja neograničeno raste.**

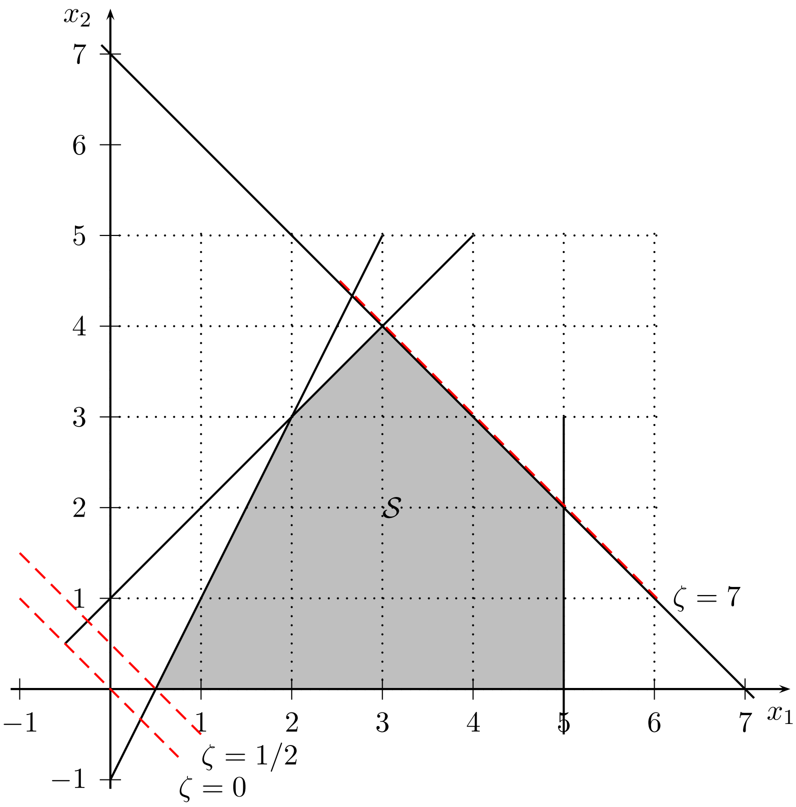
Problem nema rešenje.

e) Rešiti problem linearnog programiranja

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
\zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \max & \\
 & & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 1 & / \cdot (-1) \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 & / \cdot (-1) \\
 & & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 & \\
 & & x_1 & & & \leq & 5 &
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Grafička metoda



Slika 2: e) Isprekidana linija predstavlja vrednosti funkcije $\zeta = x_1 + x_2$.

Sa slike 2 vidimo da je (jedno) rešenje problema $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $\zeta^* = 7$.

Simplex metoda

Dovodimo u standardni oblik sa jednakostima dodajući levim stranama nejednakosti redom $w_1, \ldots w_4$. Pošto je desna strana negativna u jednoj nejednakosti, trivijalno rešenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $w_1 = 1, w_2 = -1, w_3 = 7, w_4 = 5$ nije dopustivo. Stoga uvodimo veštačku promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	x_0	
w_1	-2	1	1	0	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	0	-1	1
w_3	1	1	0	0	1	0	-1	7
w_4	1	0	0	0	0	1	-1	5
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	0	1	0

Veštačka promenljiva x_0 (promenljiva broj 7) ulazi u bazu!

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	x_0	
x_0	2	-1	-1	0	0	0	1	1
w_2	1	0	-1	1	0	0	0	2
w_3	3	0	-1	0	1	0	0	8
w_4	3	-1	-1	0	0	1	0	6
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ζ_1	-2	1	1	0	0	0	0	-1

Veštačka promenljiva x_0 (promenljiva br 7) izlazi iz baze!

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$
w_2	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$3/2$
w_3	0	$3/2$	$1/2$	0	1	0	$13/2$
w_4	0	$1/2$	$1/2$	0	0	1	$9/2$
	0	$-3/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	-1	1	0	0	2
x_2	0	1	-1	2	0	0	3
w_3	0	0	2	-3	1	0	2
w_4	0	0	1	-1	0	1	3
	0	0	-2	3	0	0	5

3	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	3
x_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	0	4
w_1	0	0	1	$-3/2$	$1/2$	0	1
w_4	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	1	2
	0	0	0	0	1	0	7

Optimalna tabela, $x^* = [3; 4]$, $\zeta^* = 7$.

Ali, vidimo da rešenje **nije jedinstveno**, jer ispod nebazične promenljive w_2 stoji vrednost 0. Možemo razložiti dobijenu tabelu do novog rešenja (tabela 4), koristeći kolonu w_2 kao radnu.

4	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	0	1	-1	2
w_1	0	0	1	0	-1	3	7
w_2	0	0	0	1	-1	2	4
	0	0	0	0	1	0	7

Ponovo dobijamo **optimalnu tabelu** sa rešenjem $x^* = [5; 2]$, $\zeta^* = 7$.

Ako probamo i nju razložiti, vraćamo se u tabelu broj 3.

Pošto su to bili jedini načini da upotrebimo nule ispod nebazičnih promenljivih u optimalnim tabelama, zaključujemo da sva optimalna rešenja pripadaju konveksnoj kombinaciji rešenja $x^* = [3; 4]$ i $\bar{x}^* = [5; 2]$.

f) Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rrcrcr} & x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ & 2x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ - & 2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Simplex metoda

Prelazimo u standardni oblik sa jednakostima i dodajemo veštačku promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	2	-1	1	0	0	-1	-2
w_2	-2	1	0	1	0	-1	-1
w_3	1	1	0	0	1	-1	7
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

Veštačka promenljiva x_0 ulazi u bazu.

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	-2	1	-1	0	0	1	2
w_2	-4	2	-1	1	0	0	1
w_3	-1	2	-1	0	1	0	9
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	2	-1	1	0	0	0	-2

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	1	$3/2$
x_2	-2	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$
w_3	3	0	0	-1	1	0	8
ζ	-3	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$
ζ_1	0	0	$1/2$	$1/2$	0	0	$-3/2$

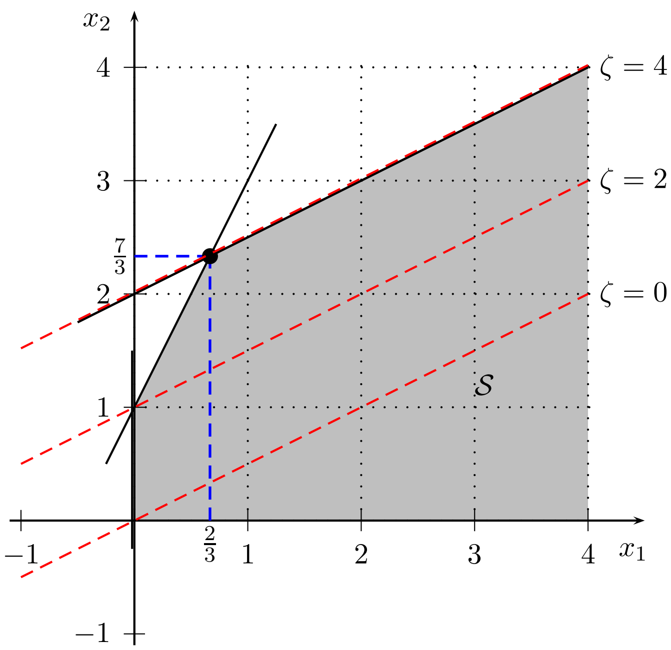
Ovo je optimalna tabela za ζ_1 . Ali, veštačka promenljiva $\zeta_1 = x_0$ ima pozitivnu vrednost ($\zeta_1 = 3/2 > 0$), pa zaključujemo da problem **nema rešenje jer je skup dopustivih tačaka $\mathcal{S} = \emptyset$ prazan**.

g) Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \zeta & = & - & x_1 & + & 2x_2 & \to & \max & \\ & & - & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 & \\ & & & 2x_1 & - & x_2 & \geq & -1 & / \cdot (-1) \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Grafička metoda



Slika 3: e) Isprekidana linija predstavlja vrednosti funkcije $\zeta = -x_1 + 2x_2$.

Vidimo da je jedno rešenje u tački $(x_1^*, x_2^*) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$, u kojoj funkcija clilja iznosi $\zeta^* = 4$. To je jedini vrh skupa $\mathcal{S}$ u kome se dostiže optimum, iako rešenje nije jedinstveno. Rešenje je degenerisano, dostiže se u svim tačkama poluprave koja polazi iz tačke $\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Simplex metoda

0	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	-1	2	1	0	4
w_2	-2	1	0	1	1
	1	-2	0	0	0

1	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	3	0	1	-2	2
x_2	-2	1	0	1	1
	-3	0	0	2	2

2	x_1	x_2	w_1	w_2	
x_1	1	0	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	$7/3$
	0	0	1	0	4

Rešenje: $x^* = [2/3; 7/3]$, $\zeta = 4$.

Vidimo da rešenje nije jedinstveno jer ispod nebazične promenljive w_2 stoji 0. Ali, ako pokušamo razložiti dobijenu tabelu koristeći njenu kolonu kao radnu, vidimo da ne može, jer u njenoj koloni nema pozitivnih elemenata. Za ovakvo rešenje kažemo da je **degenerisano**.