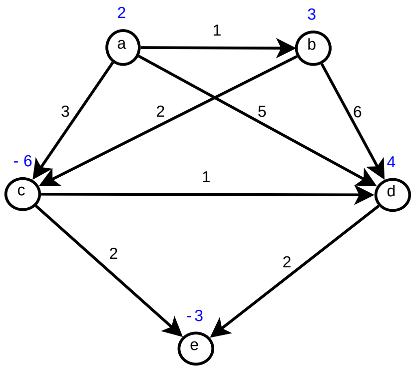
Mrežni protok - minimizacija cene transporta kroz mrežu, nastavak

Zadatak

Dat je problem mrežnog protoka



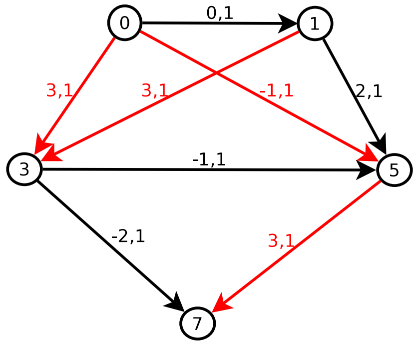
Polazeći od pokrivajućeg stabla: ac, ad, bc, de naći najjeftiniji plan transporta.

Rešenje

Crvenom bojom označavamo pokrivajuće stablo. Transporti na granama pokrivajućeg stabla predstavljaju bazične promenljive.
Vrednosti protoka x_{ik} za grane balansiranog stabla (bazične) pišemo na granu crvenom bojom. Za nebazične promenljive je $x_{ij} = 0$, te vrednosti ne pišemo.
Polazimo od jednog lista i računamo iksove. Provera je da poslednja x vrednost mora da zadovolji poslednju jednačinu.
Potom biramo jedan y da bude 0, računamo ostale y iz jednačina duala, koje glase:

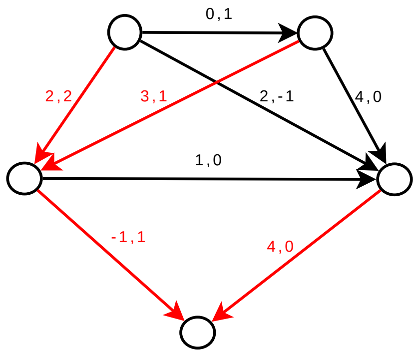
$$\forall (i,j) \in \mathscr{A}\ ,\ \ y_j - y_i + z_{ij} = c_{ij}\ .$$

Za računanje y vrednosti koristimo jednačine za grane pokrivajućeg stabla za koje važi $z_{ij} = 0$.
Na nebazičnim granama pišemo crnom bojom vrednosti dualnih dodatnih promenljivih z_{ij} koje dobijamo iz gornjih dualnih jednačina, ali, za nebazične grane.



$2 \leq \mu$

Vidimo da problem nije ni primarno ni dualno dopustiv pa odmah perturbujemo dodavanjem μ na x i z vrednosti, zapisujemo zarezima: $a + b\mu = a, b$.
Na prethodnoj slici su na granama prikazane x vrednosti crvenom bojom, z vrednosti na granama crnom bojom i y vrednosti u kružićima čvorova. Na sledećim grafovima pišemo samo ažurirane x i z vrednosti.
Vršimo primarnu pivotizaciju, grana (c e) ulazi u bazu, grana (a d) izlazi iz baze.



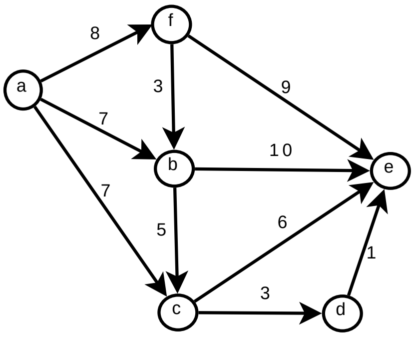
$1 \leq \mu \leq 2$

Vidimo da je dobijen dualno dopustiv problem (uvrštavanje $\mu = 0$ daje sve z vrednosti nenegativne). Grana (c e) treba da izađe iz baze, njenim izbacivanjem se odvajaju podstabla {a, b, c } i {d, e}.
Nema grane koja spaja posmatrana stabla u suprotnom smeru od grane (c e), zaključujemo da problem nema rešenja.

Mrežni protok - najkraći put

Zadatak

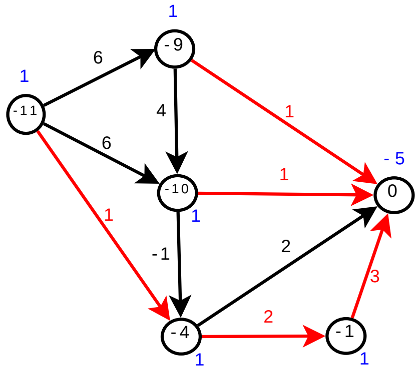
Na grafiku na slici su dati putevi i udaljenosti između tačaka a b c d e f:



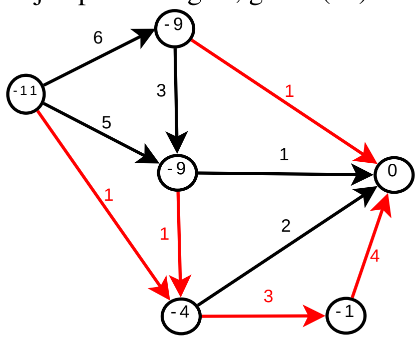
Polazeći od pokrivajućeg stabla: ac, cd, de, be, fe naći najkraće puteve od čvorova a, b, c, d, f do čvora e.

Rešenje

Dodelićemo zalihe u svim čvorovima 1 (jedan putnik). U čvoru e ćemo dodeliti potrebu -5 (svi treba da stignu u čvor e). Rešićimo problem minimizacije transporta na uobičajen način. Put po optimalnom pokrivajućem stablu (crvenim granama) nam daje najkraći put od pojedinog čvora do čvora e, vrednosti $-y_i$ daju udaljenost čvora i do čvora e.
Polazni graf: na granama nanosimo x (crvene) i z (crne) vrednosti, u kružićima y vrednosti, Pored čvora pišemo dodeljenu zalihu / potrebu.



Nije optimalan graf, grana (bc) ulazi u bazu



Optimalan graf, udaljenost čvorova od čvora e dajemo u tabeli:

a	b	c	d	e	f
11	9	4	1	0	9

Mrežni protok - Hitchcockov problem

Zadatak

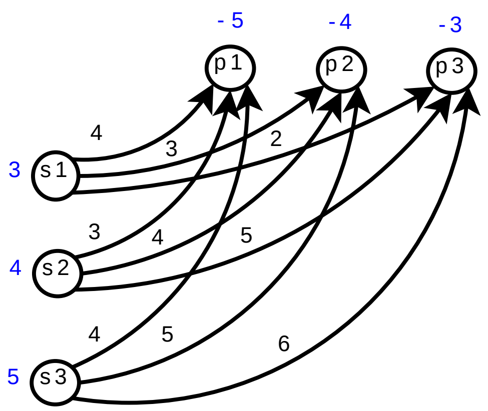
Cene prevoza, potrebe tri prodavnice i zalihe u tri skladišta date su u tabeli.

	p1	p2	p3	zal
s1	4	3	2	3
s2	3	4	5	4
s3	4	5	6	5
pot	5	4	3	

Naći optimalni plan transporta.

Rešenje

Ovo je zadatak minimizacije mrežnog protoka protoka.



Graf u zadatku je bipartitni: čvorovi se mogu podeliti na one koji imaju zalihe (iz njih izlaze strelice) i čvorove koji imaju potrebe (u njih ulaze strelice). Ovaj problem mrežnog protoka se naziva **transportni problem**.

Potreban uslov da bi transportni problem imao rešenje je da su suma zaliha i suma potreba jednake. Da ima viška zaliha, uveli bismo fiktivnog potrošača; da ima viška potreba, uveli bismo fiktivnog snabdevača. Cene ka njima i od njih se stavljaju da su 0.

U ovom problemu, postoje grane od svakog snabdevača do svakog potrošača. Transportni problem sa ovom osobinom se naziva **Hitchcockov problem**.

Jedno primarno bazično dopustivo rešenje, odnosno dopustivi balansirani protok, Hitchcockovog problema se može dobiti metodom severozapadnog ugla. Posledica: **Hitchcockov problem uvek ima optimalno rešenje**.

Umesto crtanja grafova, ovaj problem se može rešiti pomoću tabela. U polja tabele unosimo $x_{i,j}$ ili $z_{i,j}$, zavisno da li je grana od i-tog snabdevača do j-tog potrošača deo pokrivajućeg stabla (bazična) ili ne. Vrednosti $z_{i,j}$ upisujemo u zagrade.

U gornji levi ugao svakog polja upisujemo cenu $c_{i,j}$ transporta, a na marginama y vrednosti.

Algoritam severozapadnog ugla

1. Poći od polja $(i,j) := (1,1)$
2. $x_{i,j} := \min(b_i, -b_j)$;
   $b_i := b_i - x_{i,j}$; $b_j := b_j + x_{i,j}$;
3. `IF` $b_i = 0$ `THEN` pređi u polje $(i+1, j)$
   `ELSE` pređi u polje $(i, j+1)$;
4. Ponavljaj korake 2. do 3. i dođi do poslednjeg polja gde se moraju složiti preostala potreba i zaliha.

Primena ovog algoritma na problem iz zadatka daje:

4 / 3	3	2	3
3 / 2	4 / 2	5	4
4	5 / 2	6 / 3	5
5	4	3	

Sledeći korak je

Test optimalnosti

1. Biramo jedno y da je nula,
2. Računamo ostale y vrednosti tako da je za bazične promenljive $y_j - y_i = c_{i,j}$
3. Računamo z vrednosti za polja koja nisu bazična tako da je $y_j - y_i + z_{i,j} = c_{i,j}$
4. `IF` $\forall (i,j) \in \mathscr{A}, z_{i,j} \geq 0$ `THEN` **optimum**
   `ELSE` **negativan** $z_{i,j}$ **je pivot**

Za dati problem dobijamo

4 / 3	3 / (-2)	2 / (-4)	0
3 / 2	4 / 2	5 / (0)	1
4 / (0)	5 / 2	6 / 3	0
4	5	6	

Dobili smo da je $z_{1,3} = -4$, transport nije dualno dopustiv, odnosno, nije optimalan.

Za transportni problem, pošto je u pitanju bipartitni graf a polja u tabeli predstavljaju grane grafa, pivotizaciju ćemo prilagoditi radu u tabelama.

Pivotizacija

1. Sastaviti cikl od pivota i polja baznih promenljivih.
2. Polazeći od pivota, idući po ciklu, naizmenično dodeliti znak + i − poljima cikla.
3. Od polja koja su dobila − naći polje sa najmanjom vrednošću koja iznosi t.
4. Polazeći od pivota, idući po ciklu, naizmenično dodati i oduzeti vrednost t promenljivama $x_{i,j}$ u ciklu.
5. Jedno od polja koje je u prethodnom koraku dobilo vrednost 0 izbaciti iz baze, a pivota ubaciti u bazu.

Na našem primeru, pivotizacija daje

4 1	3 (2)	2 2	4
3 4	4 (4)	5 (4)	5
4 $(\mathbf{-4})$	5 4	6 1	0
8	5	6	

Uzimamo za pivota $z_{3,1} = -4$, nova pivotizacija omogućava da iz baze izbacimo $x_{1,1}$ ili $x_{3,3}$. Biramo $x_{1,1}$.

4 (4)	3 (2)	2 3	4
3 4	4 (0)	5 (0)	1
4 1	5 4	6 0	0
4	5	6	

Više nema negativnih z vrednosti, dobili smo dualno dopustivu, odnosno optimalnu, tabelu. Rešenje nije jedinstveno, ima nula z vrednosti. Najjeftiniji transport ima cenu $\zeta = 2\times 3 + 3\times 4 + 4\times 1 + 5\times 4 + 6\times 0 = 42$.

Zadatak

Cene prevoza, potrebe četiri prodavnice i zalihe u četiri skladišta date su u tabeli.

	P_1	P_2	P_3	P_4	zal
S_1	4	5	6	3	7
S_2	5	4	6	6	8
S_3	7	8	9	6	10
S_4	10	12	15	8	15
pot	10	10	12	8	

Naći optimalni plan transporta.

Rešenje

Radi bržeg dolaska do optimalnog rešenja, polazno rešenje ćemo naći Vogelovom metodom.

Vogelova metoda

1. Za sve vrste i kolone izračunati apsolutnu vrednost razlike dve najmanje nedodeljene cene transporta.
2. U vrsti ili koloni koja daje najveću razliku otići u polje sa najmanjom nedodeljenom cenom transporta i dodeliti $x_{i,j} := \min(b_i, -b_j); b_i := b_i - x_{i,j}; b_j := b_j + x_{i,j}$.
3. Ponavljaj korake 1. do 3. sve dok ne ostane samo jedna vrsta ili kolona.
4. Dodeliti nedodeljene zalihe odnosno potrebe preostalim (baznim) promenljivama.
5. Ako u bazi nema $n+m-1$ elemenata, dodati potreban broj elemenata, ali tako da ne zatvaraju cikl sa postojećim baznim promenljivama.

Dobijamo

4 (-1)	5 (-2)	6 $(\mathbf{-4})$	3 7	5
5 (3)	4 8	6 (-1)	6 (6)	8
7 (3)	8 (2)	9 10	6 (4)	6
10 10	12 2	15 2	8 1	0
10	12	15	8	

Nije optimalna tabela, pivot je $z_{1,3} = -4$. Redom dobijamo nove tabele.

4 (-1)	5 $(\mathbf{-2})$	6 2	3 5	5
5 (3)	4 8	6 (3)	6 (6)	8
7 (-1)	8 (-2)	9 10	6 (0)	2
10 10	12 2	15 (4)	8 3	0
10	12	11	8	

4 (-1)	5 2	6 2	3 3	0
5 (1)	4 8	6 (1)	6 (4)	1
7 $(\mathbf{-1})$	8 (0)	9 10	6 (0)	-3
10 10	12 (2)	15 (4)	8 5	-5
5	5	6	3	

4 (0)	5 2	6 5	3 (1)	0
5 (2)	4 8	6 (1)	6 (5)	1
7 3	8 (0)	9 7	6 (1)	-3
10 7	12 (1)	15 (3)	8 8	-6
4	5	6	2	

Optimalna tabela, $\zeta = 290$.

Mrežni protok - transportni problem

Zadatak

Neka su u prethodnom zadatku ukinuti putni pravci $S_3 \to P_3$, $S_4 \to P_2$, $S_4 \to P_3$, a sve ostalo je isto.
Naći optimalni plan transporta.

Rešenje

Problem možemo rešiti isto kao prethodni zadatak, jedino stavljajući za cene transporta na pravcima koji su ukinuti M.
U toku rešavanja možemo zamisliti da je M neki velik broj, veći od svih ostalih brojeva u tabeli, recimo $M = 1000$.
Kad rešimo problem, ako u optimalnoj tabeli dobijemo $\lim_{M\to\infty} \zeta = \infty$, odnosno, ako vrednosti na nepostojećim putnim pravcima nisu nula, zaključujemo da ne postoji dopustivo rešenje transporta koje zadovoljava potrebe i zalihe (pa onda ne postoji ni optimalno).
Ako postoji dopustivo rešenje (balansirani dopustivi protok), onda postoji i optimalno rešenje.
Kao polazno „dopustivo" rešenje možemo uzeti optimalno rešenje iz prehodnog zadatka, ono zadovoljava zalihe i potrebe. Naravno, pošto postoji transport koji ide ukinutim pravcem ($S_3 \to P_3$), ovaj transport neće biti optimalan.
Računamo y i z vrednosti. U svom računu vodimo M kao promenljivu.

4 $(M-9)$	5 2	6 5	3 $(M-8)$	0
5 $(M-7)$	4 8	6 (1)	6 $(M-4)$	1
7 3	8 $\mathbf{(9-M)}$	M 7	6 (1)	$6-M$
10 7	M (-2)	M (-3)	8 8	$3-M$
$13-M$	5	6	$11-M$	

4 $(M-9)$	5 $(M-9)$	6 7	3 $(M-8)$	$M-6$
5 (2)	4 8	6 $\mathbf{(10-M)}$	6 (5)	4
7 3	8 2	M 5	6 (1)	0
10 7	M $(M-11)$	M (-3)	8 8	-3
7	8	M	5	

4 (1)	5 (1)	6 7	3 (2)	4
5 (2)	4 3	6 5	6 (5)	4
7 3	8 7	M $(M-10)$	6 (1)	0
10 7	M $(M-11)$	M $(M-13)$	8 8	-3
7	8	10	5	

Optimalna tabela, $\zeta = 295$.

Problem angažovanja

Zadatak

Trener plivačke reprezentacije ima za štafetu 4X100m na raspolaganju četiri plivača čija su vremena na 100m po stilovima: slobodno, leđno, prsno, baterflaj, data u tabeli.

	S	L	P	B
A	57	61	64	62
B	55	63	65	64
C	59	64	66	63
D	56	62	67	64

Kako da sastavi najbolju štafetu?

Rešenje

Ovo je transportni problem: plivači imaju na raspolaganju jedno plivanje koje treba da „prebace"na određenu stazu, cena transporta je jednaka vremenu koje mu treba da ispliva.

Svaku stazu može plivati jedan plivač, jedan plivač treba da pliva jednu stazu.
Ukupna cena transporta je jednaka ukupnom vremenu štafete, traži se minimum.
Polazno rešenje možemo naći Vogelovom metodom:

57 (2)	61 0	64 1	62 0	0
55 1	63 (2)	65 (1)	64 (2)	0
59 (3)	64 (2)	66 (1)	63 1	-1
56 0	62 1	67 (2)	64 (1)	-1
55	61	64	62	

Vidimo da je transport optimalan, tako da plivači plivaju: $A \to$ prsno, $B \to$ slobodno, $C \to$ baterflaj, $D \to$ leđno.
Ukupno vreme štafete je 244.