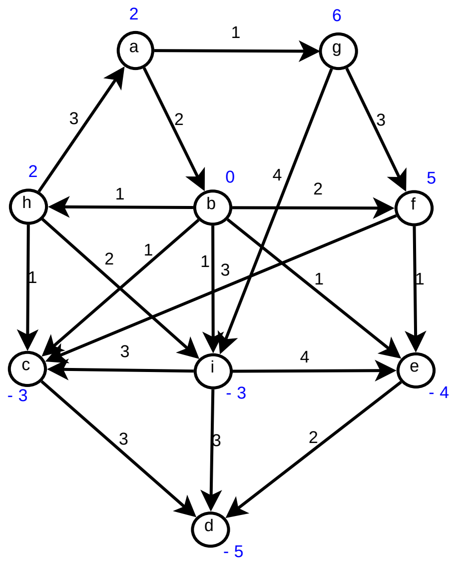
Mrežni protok - minimizacija cene transporta kroz mrežu

Dat je problem mrežnog protoka



Polazeći od pokrivajućeg stabla:

a) ab, ag, bc, ed, fe, gf, gi, ha

b) ab, bc, be, ed, fe, gf, hc, id

c) ab, bc, bh, bi, cd, ed, fe, gf

naći najjeftiniji plan transporta.

a) Crvenom označavamo pokrivajuće stablo.

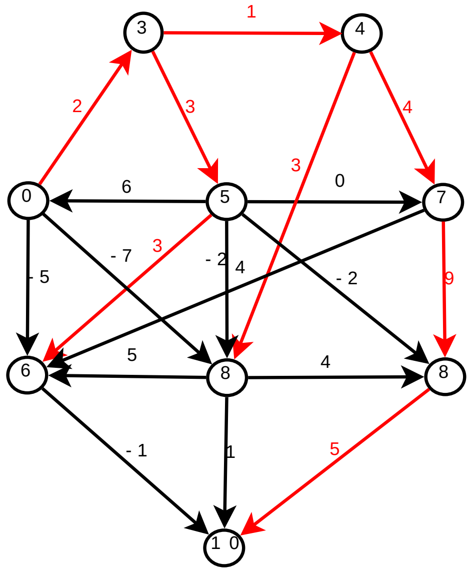
Transporti na granama pokrivajućeg stabla predstavljaju bazične promenljive. Balansirani protok dobijamo iz jednačina da za čvor k mora biti zbir razlika ulaza i izlaza jednaka iskazanoj potrebi:

$$\sum_{\substack{i \\ (i,k)\in\mathscr{A}}} x_{ik} - \sum_{\substack{j \\ (k,j)\in\mathscr{A}}} x_{kj} = -b_k$$

Vrednosti protoka x_{ik} za grane balansiranog stabla (bazične) pišemo na granu crvenom bojom. Za nebazične promenljive je $x_{ij} = 0$, njihove vrednosti ne pišemo. Na nebazičnom granama pišemo crnom bojom vrednosti dualnih dodatnih promenljivih z_{ij}.

Primar	Dual
$\zeta = c^T x \to \min$	$\xi = -b^T y \to \max$
$Ax = -b$	$A^T y + z = c$
$x \geq 0$	$z \geq 0$

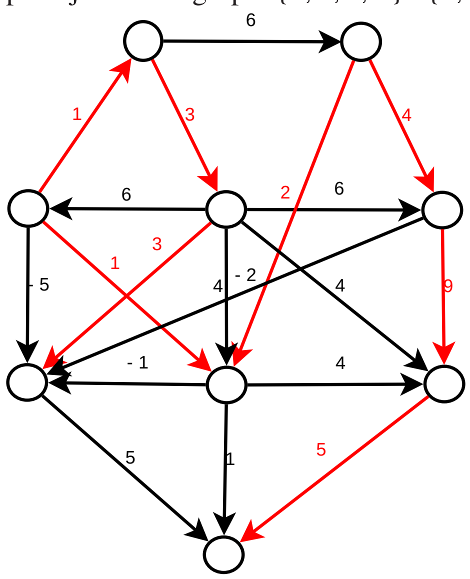
Jednačine duala glase: $\forall (i,j) \in \mathscr{A}$, $y_j - y_i + z_{ij} = c_{ij}$.
Formati : $A \to m \times n$; $c, x, z \to n \times 1$; $b, y \to m \times 1$.
Koristeći princip dualne komplementarnosti: $\forall (i,j) \in \mathscr{A}$, $x_{ij} z_{ij} = 0$, iz jednačina duala za grane pokrivajućeg stabla, birajući $y_a = 0$, računamo preostale dualne promenljive, upisujemo ih u kružiće.
Potom, iz istih jednačina, primenjenim na nebazične grane, računamo dualne dodatne promenljive i pišemo ih crnom bojom na odgovarajućim granama.



Vidimo (na pr. $z_{\mathrm{hi}} = -6$) da dati plan transporta nije dualno dopustiv, stoga nije optimalan. Za pivotizaciju ćemo uzeti da grana (h i) ulazi u bazu. Sa nekim granama pokrivajućeg stabla ona čini konturu i h a g i. Idući po konturi, od grana koje su suprotno usmerene od grane (h i), minimalni protok je $t = 1$ na grani (a g), stoga ona izlazi iz baze.

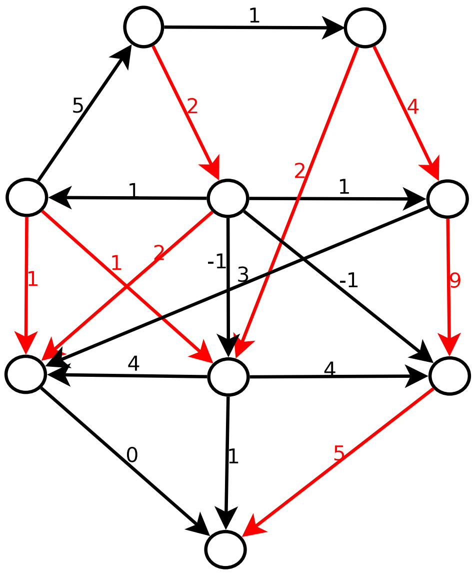
Pivotizaciju x vrednosti vršimo tako što vrednost $t = 1$ dodajemo transportima u konturi koje su usmerene kao grana (h i), a oduzimamo transportima koji su usmereni suprotno.

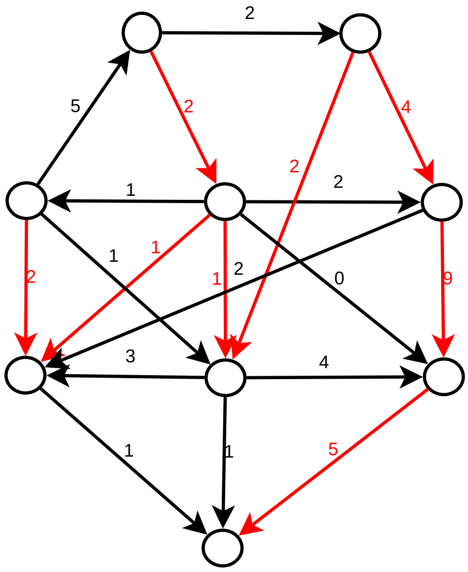
Ako bi u planu transporta sa slike izbacili granu (a g), koja izlazi iz baze, čvorovi pokrivajućeg stabla bi bili podeljeni u dve grupe: {a, b, c, h} i {d, e, f, g, i}.



Pivotizaciju z vrednosti vršimo tako što z vrednosti na granama koje spajaju ove dve grupe čvorova smanjujemo ili povećavamo u skladu sa granom (h i). Ona ulazi u bazu i njeno z_{hi} se povećava sa -6 na 0. Isto

tako se pivotizuju grane (a g), (b e), (b f), (b i), (c d). z vrednosti na granama (f c) i (i c) se smanjuju za 6, jer te grane spajaju dve grupe čvorova suprotno od grane (h i). Ostale z vrednosti se ne menjaju.
Za planove transporta posle početnog računamo samo x i z vrednosti.

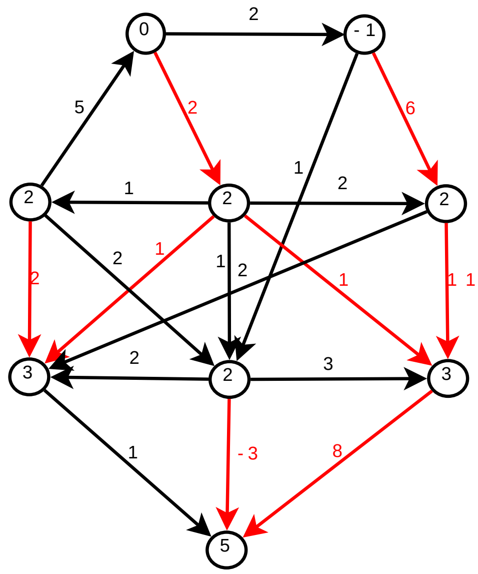




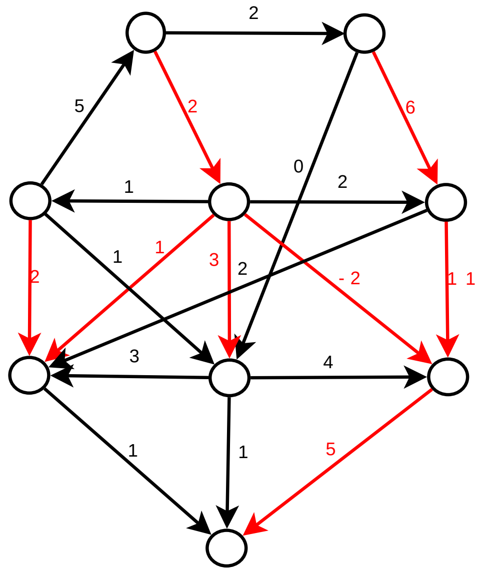
Poslednji plan transporta je i primarno i dualno dopustiv, pa je optimalan.
Ukupna cena transporta je
$\zeta = x_{ab}\cdot c_{ab} + x_{bc}\cdot c_{bc} + x_{bi}\cdot c_{bi} + x_{ed}\cdot c_{ed} + x_{fe}\cdot c_{fe} + {} + x_{gf}\cdot c_{gf} + x_{gi}\cdot c_{gi} + x_{hc}\cdot c_{hc} = 2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 5 + {} + 1\cdot 9 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 1\cdot 2 = 47$

b) Izračunavamo balansirani protok po stablu.

Dobijeni transport nije primarno dopustiv ($x_{id} = -3$), ali jeste dualno dopustiv ($z \geq 0$). Vršićemo dualne simplex pivotizacije. Biramo granu (i d) da izađe iz baze. Onda će z_{id} ući u dualnu bazu i promeniti vrednost $0 \mapsto t$.
Čvor i ostaje izolovan. Od svih grana koje ulaze u čvor i, z vrednosti će biti ažurirane smanjivanjem za vrednost t. Da bi protok ostao dualno dopustiv, biramo $\min\{z_{bi}, z_{gi}, z_{hi}\} = z_{bi} = 1 = t$. Na granama koje izlaze iz čvora i, z vrednosti se uvećavaju za t.



Ažuriranje x vrednosti vršimo kad u postojećem transportu nađemo konturu od bazičnih promenljivih i grane (b i). Konturu čine čvorovi b i d e b. Na grani (i d) vrednost $x_{id} = -3 \mapsto 0$, isto se x_{bi} uvećava sa 0 na 3. Na granama orijentisanim suprotno od (i d) umanjuje za 3.

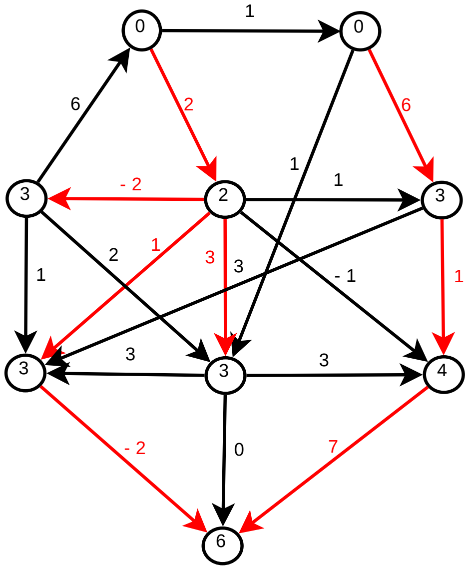


Zatim, grana (b e) izlazi iz baze, (g i) ulazi u bazu. Tabela koja se dobija je identična optimalnoj tabeli dobijenoj pod a), dobili smo optimalno rešenje.

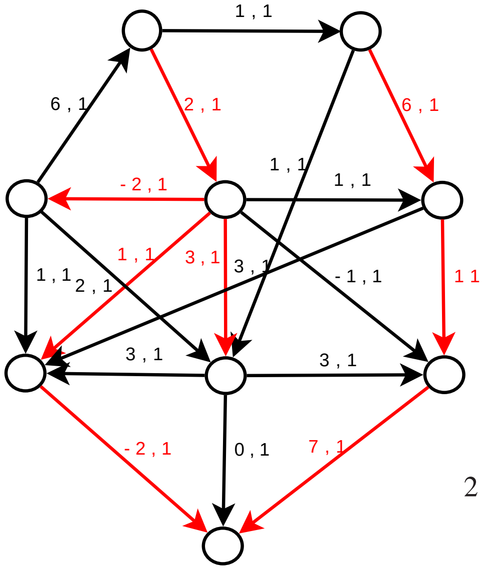
c) Dati protok nije ni primarno ni dualno dopustiv.

Stoga problem perturbujemo dodavajući vrednost μ svim x i z vrednostima. Pivotizacija na perturbovanom problemu ne narušava uslove primara niti duala.
Radi lakšeg predstavljanja na grafu, x i z vrednosti koje sadrže μ ćemo prikazivati u notaciji sa zarezom: $a + b\mu = a, b$.
Pored grafa ćemo napisati za koje vrednosti μ je plan optimalan. Naravno, ne možemo dopustiti da je $\mu \neq 0$, pa ćemo vršiti pivotizacije, po potrebi dualne i primarne

sve dok ne dobijemo da dopustive vrednosti za μ uključuju nulu. Onda se uvrštavanjem $\mu = 0$ dobija optimalni plan transporta.

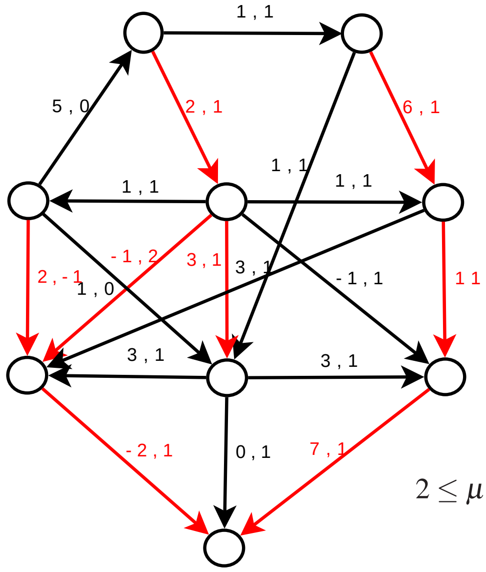


Sledeći grafik je isti, jedino su x i z vrednosti perturbovane, y vrednosti izostavljene.



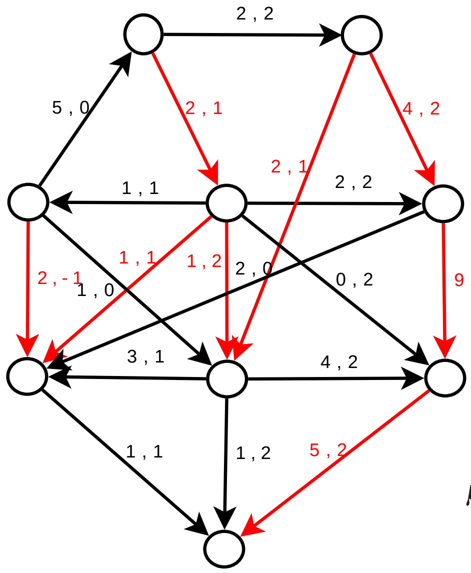
$2 \leq \mu$

Grana (b h) izlazi iz baze, (h c) ulazi u bazu.



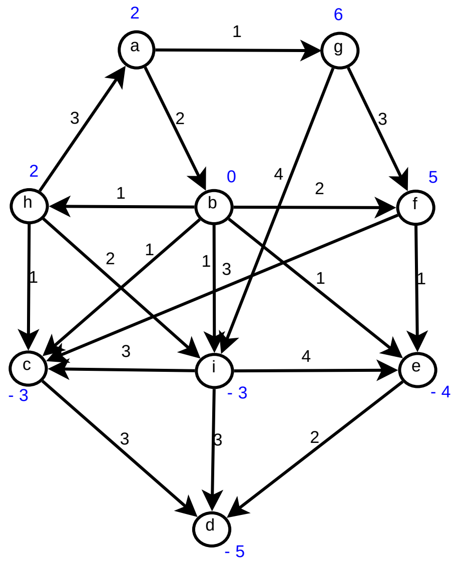
$2 \leq \mu \leq 2$

Grana (c d) izlazi iz baze, (g i) ulazi u bazu.



$\mu \leq 2$

Vrednost $\mu = 0$ ulazi u dopustive vrednosti za μ, stoga ubacujemo $\mu = 0$, odnosno brišemo vrednosti iza zareza i dobijamo optimalnu tabelu, istu koju smo dobili pod a) i b), sa optimalnom cenom transporta $\zeta = 47$.


2
a
1
6
g
3
2
3
2
h
4
0
b
2
5
f
1
2
1
1
3
1
1
1
3
4
c
i
e
- 3
- 3
- 4
3
3
2
d
- 5