2	y_1	y_2'	y_2''	z_1	z_2	
y_1	1	0	0	25/3	−25/3	500/3
y_2''	0	−1	1	8/3	−5/3	340/3
	0	0	0	7/12	5/12	215/3

Rešenje duala:

$$y^* = (y_1^*, y_2^{*\prime}, y_2^{*\prime\prime}) = (500/3, 0, 340/3),\ z^* = (0,0),\ \xi^* = 71 + 2/3$$

Očitavamo i rešenje primara, koji je dual od duala:

$$x^* = (7/12, 5/12),\ w^* = (0,0,0),\ \zeta^* = 71 + 2/3$$

Koristeći postavljanje duala u opštem obliku: (veza $y_2 = y_2' - y_2''$)

Primar

$$-\zeta = -80x_1 - 60x_2 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcr} 0.20x_1 & + & 0.32x_2 & \leq & 0.25 \\ x_1 & + & x_2 & = & 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

Dual

$$-\xi = 0.25y_1 + y_2 \to \min$$

$$\begin{array}{rcrcr} 0.20y_1 & + & y_2 & \geq & -80 \\ 0.32y_1 & + & y_2 & \geq & -60 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0$$

Za problem linearnog programiranja postaviti dual, rešiti primar i dual

$$\zeta = 3x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 & \geq & 4 \\
3x_1 & + & 5x_2 & & & \leq & 15 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 6
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$\xi = -4y_1 + 15y_2 + 6y_3 \to \min$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
-4y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & \geq & 3 \\
y_1 & + & 5y_2 & + & y_3 & \geq & 4 \\
2y_1 & & & - & y_3 & = & -1
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0$$

Uvodimo smenu $x_3 = x_3' - x_3''$, dodajemo $x_3' \geq 0$ i $x_3'' \geq 0$.

-1	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	-4	1	2	-2	1	0	0	$\mathbf{-1}$	-4
w_2	3	5	0	0	0	1	0	-1	15
w_3	1	1	-1	1	0	0	1	-1	6
	-3	-4	1	-1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0

Prvi način: rešavamo primar

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	$1/5$	$8/25$	1	0	0	-1	$1/4$
w_2	1	1	0	1	0	-1	1
w_3	-1	-1	0	0	1	-1	-1
	80	60	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	$6/5$	$33/25$	1	0	-1	0	$5/4$
w_2	2	2	0	1	-1	0	2
x_0	1	1	0	0	-1	1	1
	80	60	0	0	0	0	0
	-1	-1	0	0	1	0	-1

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
w_1	0	$3/25$	1	0	$1/5$	$1/20$
w_2	0	0	0	1	1	0
x_1	1	1	0	0	-1	1
	0	-20	0	0	80	-80

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_2	0	1	$25/3$	0	$5/3$	$5/12$
w_2	0	0	0	1	1	0
x_1	1	0	$-25/3$	0	$-8/3$	$7/12$
	0	0	$500/3$	0	$340/3$	$-215/3$

Rešenje primara:

$$x^* = (7/12, 5/12),\ w^* = (0,0,0)$$

$$\zeta^* = 215/3 = 71 + 2/3$$

Rešenje duala:
(koji će biti postavljen dole)

$$y^* = (500/3, 0, 340/3),\ z^* = (0,0)$$

$$\xi^* = 71 + 2/3$$

Problem linearnog programiranja

1. Dovesti problem linearnog programiranja na standardni oblik

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \to & \min \\ x_1 & - & 2x_2 & - & 3x_3 & \geq & 3 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 13 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 6x_3 & = & 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,,\;\; x_3 \geq 0\,.$$

2. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \to & \min \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 \\ 4x_1 & + & 5x_2 & + & 6x_3 & \leq & 13 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,,\;\; x_2 \geq 0\,,\;\; x_3 \geq 0\,.$$

3. Napisati početni rečnik za problem linearnog programiranja iz prethodnog zadatka.

4. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \to & \min \\ & & & & x_3 & \leq & 3 \\ 4x_1 & + & & + & x_3 & \leq & 11 \\ & & 6x_2 & & & \leq & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,,\ \ x_2 \geq 0\,,\ \ x_3 \geq 0\,.$$

5. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \to & \max \\ & & & & x_3 & \leq & 3 \\ 4x_1 & + & & + & x_3 & \leq & 11 \\ & & 6x_2 & & & \leq & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,,\ \ x_2 \geq 0\,,\ \ x_3 \geq 0\,.$$

6. Napisati početni rečnik za problem linearnog programiranja iz prethodnog zadatka.

7. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \rightarrow & \min \\
 & & & & x_3 & \leq & 3 \\
4x_1 & + & & + & x_3 & \leq & 11 \\
 & & 6x_2 & & & \leq & 12 \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10
\end{array}$$

8. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \rightarrow & \max \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 10 \\
 & & & & x_3 & \geq & 3 \\
x_1 & + & & - & x_3 & \leq & 11 \\
 & & 6x_2 & & & \leq & 12
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0\,,\ \ x_2 \geq 0\,,\ \ x_3 \geq 0\,.$$

Postaviti problem linearnog programiranja koji rešava zadatak

1. Prodavnica zdrave hrane pravi smesu dve vrste mizli. U Sport mizlima ima 20% pšeničnih pahuljica, a u Tropic mizlima ima 32% pšeničnih pahuljica. Tropic mizle koštaju 60 pfeniga kg a Sport mizle 80 pfeniga kg. Koliko kojih mizli treba staviti u 1 kg smese pa da se količina pšeničnih pahuljica održi do 25%, a da smesa bude što jeftinija?

2. Prodavnica kućnih ljubimaca je odredila da je za dnevnu ishranu jednog hrčka potrebno 70 jedinica belančevina, 100 jedinica ugljenih hidrata i 20 jedinica masnoće na dan. U skladištu se nalaze šest vrsta semena sa specifikacijama:

seme	belanč.	uglj. hidr.	masnoće	cena
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

Koliko kojeg semena treba staviti u dnevnu ishranu da bi cena smese bila što manja?

3. Snabdevač studentskog restorana treba da spremi barem 500 litara egzotika od pet sokova iz skladišta. Egzotik treba da sadrži barem 20% đusa od narandže, 10 % đusa od grejpfruta i 5% đusa od kupine. Koliko kojeg soka treba da smeša u egzotik pa da postigne minimalnu cenu?

sok	orange juice (%)	grejpfrut juice (%)	kupina juice (%)	zaliha (litara)	cena din / lit
A	40	40	0	200	1.50
B	5	10	20	400	0.75
C	100	0	0	100	2.00
D	0	100	0	50	1.75
E	0	0	0	800	0.25

4. Rešiti problem linearnog programiranja

$$\begin{array}{rcrcrcl} \zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ & & x_1 & + & 5\,x_2 & \leq & 5 \\ & & 2\,x_1 & + & x_2 & \leq & 4 \\ & & & & \multicolumn{3}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0} \end{array}$$

0	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	1	5	1	0	5
w_2	2	1	0	1	4
	-1	-1	0	0	0

1	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	0	$9/2$	1	$-1/2$	3
x_1	1	$1/2$	0	$1/2$	2
	0	$-1/2$	0	$1/2$	2

2	x_1	x_2	w_1	w_2	
x_2	0	1	$2/9$	$-1/9$	$2/3$
x_1	1	0	$-1/9$	$5/9$	$5/3$
	0	0	$1/9$	$4/9$	$7/3$

$$x_1^* = 5/3, \;\; x_2^* = 2/3$$

$$\zeta^* = 7/3$$

5. Fabrika proizvodi artikle A, B i C. Za Proizvodnju artikla A treba 2 jedinice sirovine S1, 3 jedinice sirovine S2 i 4 jedinice sirovine S3. Za proizvod B treba redom 1, 3, 2 jedinice sirovina S1, S2 i S3. Za artikal C treba redom 3, 1, 4 jedinice sirovina S1, S2 i S3. Na raspolaganju nam je 10 jedinica sirovine S1, 25 jedinica sirovine S2 i 30 jedinica sirovine S3 dnevno.

   Artikal A se na mašini M1 obrađuje 3 sata, a na mašini M2 4 sata. Artikal B se obrađuje na mašini M1 4 sata i na mašini M2 3 sata. Artikal C se obrađuje na mašini M1 2 sata i na mašini M2 3 sata. Mašine M1 i M2 mogu biti istovremeno angažovane na jednom artiklu. Na jednoj mašini se može obrađivati samo jedan artikal u jednom momentu.

   Cena jednog komada artikla A je 8 novčanih jedinica, artikla B je 5 novčanih jedinica, artikla C je 7 novčanih jedinica.

   Koliko dnevno treba proizvoditi kojeg proizvoda, da bi zarada bila maksimalna?

Uvešćemo veličine:

$x_1 =$ broj proizvedenih artikala A

$x_2 =$ broj proizvedenih artikala B

$x_3 =$ broj proizvedenih artikala C

$\zeta =$ zarada

$$\zeta = 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 10 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & \leq & 25 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 30 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & \leq & 24 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & \leq & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3 \geq 0.$$

$$\zeta = 8x_1 + 5x_2 + 7x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & w_1 & = & 10 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & w_2 & = & 25 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & w_3 & = & 30 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & + & w_4 & = & 24 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & w_5 & = & 24 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0, \;\; w_1 \geq 0, \; w_2 \geq 0,$$

$$w_3 \geq 0, \; w_4 \geq 0, \; w_5 \geq 0.$$

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	2	1	3	1	0	0	0	0	10
w_2	3	3	1	0	1	0	0	0	25
w_3	4	2	4	0	0	1	0	0	30
w_4	3	4	2	0	0	0	1	0	24
w_5	4	3	3	0	0	0	0	1	24
	-8	-5	-7	0	0	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
x_1	1	$1/2$	$3/2$	$1/2$	0	0	0	0	5
w_2	0	$3/2$	$-7/2$	$-3/2$	1	0	0	0	10
w_3	0	0	-2	-2	0	1	0	0	10
w_4	0	$5/2$	$-5/2$	$-3/2$	0	0	1	0	9
w_5	0	1	-3	-2	0	0	0	1	4
	0	-1	5	4	0	0	0	0	40

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
x_1	1	0	2	4/5	0	0	−1/5	0	16/5
w_2	0	0	−2	−3/5	1	0	−3/5	0	23/5
w_3	0	0	−2	−2	0	1	0	0	10
x_2	0	1	−1	−3/5	0	0	2/5	0	18/5
w_5	0	0	−2	−7/5	0	0	−2/5	1	2/5
	0	0	4	17/5	0	0	2/5	0	218/5

$$x_1^* = 16/5, \;\; x_2^* = 18/5, \;\; x_3^* = 0$$

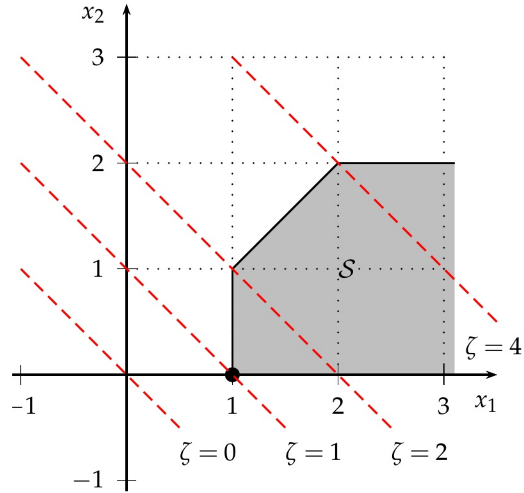
$$\zeta^* = 218/5$$

Rešiti problem linearnog programiranja

Na sledećim stranama zadaci su a), b), e), f), g). Rešićemo ih grafičkim i Simplex metodom.

a)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \min \\
 & - & x_1 & & & \leq & -1 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0}
\end{array}
$$



Sa slike vidimo da je rešenje problema $x_1^* = 1$, $x_2^* = 0$, $\zeta^* = 1$.

Simplex metod

Problem dovodimo u standardni oblik sa jednakostima:

$$
\begin{array}{rrrrrrrl}
 & x_1 & + \; x_2 & & & & \rightarrow & \min \\
- & x_1 & & + \; w_1 & & & = & -1 + x_0 \\
- & x_1 & + \; x_2 & & + \; w_2 & & = & 0 + x_0 \\
 & & x_2 & & & + \; w_3 & = & 2 + x_0
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_3 \geq 0, \quad x_0 \geq 0$$

Dodata je veštačka promenljiva x_0. Prvo rešavamo problem minimizacije $\zeta_1 = x_0$. Kad ga rešimo i u rešenju dobijemo $x_0 = 0$, došli smo do rečnika početnog problema. Odatle nastavljamo da rešavamo početni problem.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	-1	0	1	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	-1	0
w_3	0	1	0	0	1	-1	2
ζ	1	1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	1	0	−1	0	0	1	1
w_2	0	1	−1	1	0	0	1
w_3	1	1	−1	0	1	0	3
ζ	1	1	0	0	0	0	0
ζ_1	−1	0	1	0	0	0	−1

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	−1	0	0	1
w_2	0	1	−1	1	0	1
w_3	0	1	0	0	1	2
ζ	0	1	1	0	0	−1

Dobili smo optimalno rešenje pomoćngo problema, to je dopustiv rečnik početnog problema, ujedno i optimalni rečnik početnog problema.

$$x_1^* = 1,\ x_2^* = 0$$

$$\zeta^* = 1$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & x_1 & + & x_2 & \rightarrow & \max \\
 & - & x_1 & & & \leq & -1 \\
 & & x_1 & - & x_2 & \geq & 0 \\
 & & & & x_2 & \leq & 2 \\
 & & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0}
\end{array}$$

Grafički metod

Sa slike rešenja a) vidimo da **rešenje problema ne postoji** jer se vrednost funkcije cilja može proizvoljno povećavati (oblast dopustivih tačaka $\mathcal{S}$ je neograničena).

Simplex metod

Isto kao u prethodnom zadatku dovedemo problem u oblik sa jednakostima i uvodimo promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	-1	0	1	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	-1	0
w_3	0	1	0	0	1	-1	2
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

Veštačka promenljiva x_0 ulazi u bazu!

Polazna tabela

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	1	0	-1	0	0	1	1
w_2	0	1	-1	1	0	0	1
w_3	1	1	-1	0	1	0	3
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	-1	0	1	0	0	0	-1

Veštačka promenljiva x_0 izlazi iz baze!

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	−1	0	0	1
w_2	0	1	−1	1	0	1
w_3	0	1	0	0	1	2
ζ	0	−1	−1	0	0	1

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	−1	0	0	1
x_2	0	1	−1	1	0	1
w_3	0	0	1	−1	1	1
	0	0	−2	1	0	2

3	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	0	−1	1	2
x_2	0	1	0	0	1	2
w_1	0	0	1	−1	1	1
	0	0	0	−1	2	4

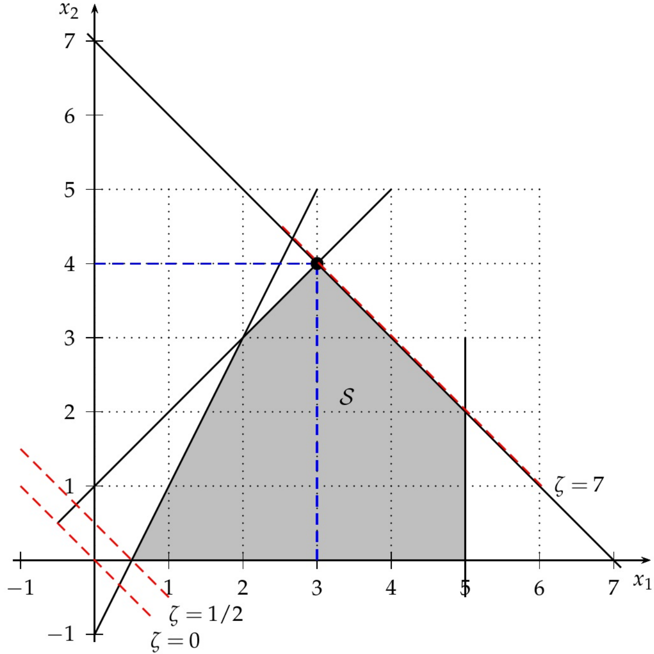
Pošto ispod promenljive w_2 stoji negativan element, a u njegovoj radnoj koloni nema pozitivnih elemenata, zaključujemo da **funkcija cilja neograničeno raste.**

Problem nema rešenje.

e)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
\zeta & = & x_1 & + & x_2 & \to & \max \\
& & 2x_1 & - & x_2 & \geq & 1 \\
& & x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \\
& & x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\
& & x_1 & & & \leq & 5
\end{array}
$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Sa slike vidimo da je (jedno) rešenje problema $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $\zeta^* = 7$.

Simplex metod

Dovodimo na standardni oblik sa jednakostima dodajući levim stranama nejednakosti redom $w_1, \ldots w_4$. Pošto je desna strana negativna u jednoj nejednakosti, trivijalno rešenje $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $w_1 = 1, w_2 = -1, w_3 = 7, w_4 = 5$ nije dopustivo. Stoga uvodimo veštačku promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	x_0	
w_1	-2	1	1	0	0	0	-1	-1
w_2	-1	1	0	1	0	0	-1	1
w_3	1	1	0	0	1	0	-1	7
w_4	1	0	0	0	0	1	-1	5
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	0	1	0

Vršimo pivotizaciju u kojoj veštačka promenljiva x_0 ulazi u bazu.

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	x_0	
x_0	2	-1	-1	0	0	0	1	1
w_2	1	0	-1	1	0	0	0	2
w_3	3	0	-1	0	1	0	0	8
w_4	3	-1	-1	0	0	1	0	6
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0	0
ζ_1	-2	1	1	0	0	0	0	-1

Veštačka promenljiva x_0 izlazi iz baze, time postaje $x_0 = 0$, što je optimum.

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	$-1/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$
w_2	0	$1/2$	$-1/2$	1	0	0	$3/2$
w_3	0	$3/2$	$1/2$	0	1	0	$13/2$
w_4	0	$1/2$	$1/2$	0	0	1	$9/2$
	0	$-3/2$	$-1/2$	0	0	0	$1/2$

Pošto je dobijeno optimalno rešenje pomoćnog problema, dobili smo početni rečnik datog problema, možemo nastaviti sa njegovim rešavanjem.

Kolonu promenljive x_0 i vrstu ζ_1 više ne pišemo.

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	-1	1	0	0	2
x_2	0	1	-1	2	0	0	3
w_3	0	0	2	-3	1	0	2
w_4	0	0	1	-1	0	1	3
	0	0	-2	3	0	0	5

3	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	0	$-1/2$	$1/2$	0	3
x_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	0	4
w_1	0	0	1	$-3/2$	$1/2$	0	1
w_4	0	0	0	$1/2$	$-1/2$	1	2
	0	0	0	0	1	0	7

Optimalna tabela, $x_1^* = 3$, $x_2^* = 4$, $\zeta^* = 7$.

Vidimo da rešenje **nije jedinstveno**, jer ispod nebazične promenljive w_2 stoji vrednost 0. Možemo dobiti novo rešenje vršeći pivotizaciju koristeći kolonu w_2 kao radnu. Iz baze će izaći w_4.

4	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	
x_1	1	0	0	0	0	1	5
x_2	0	1	0	0	1	-1	2
w_1	0	0	1	0	-1	3	7
w_2	0	0	0	1	-1	2	4
	0	0	0	0	1	0	7

Ponovo dobijamo **optimalnu tabelu** sa rešenjem $x_1^* = 5$, $x_2^* = 2$, $\zeta^* = 7$.

Ako probamo i nju razložiti, vraćamo se u tabelu broj 3.

Pošto su to bili jedini načini da upotrebimo nule ispod nebazičnih promenljivih u optimalnim tabelama, zaključujemo da sva optimalna rešenja pripadaju konveksnoj kombinaciji rešenja $x^* = (3,4)$ i $x^* = (5,2)$.

Na primer $x^* = (4,3)$, $x^* = (7/2,7/2)$, $\ldots$

Optimalna vrednost funkcije cilja je $\zeta^* = 7$ za sva rešenja.

Na slici gore sva rešenja leže na duži između tačaka $(3,4)$ i $(5,2)$.

f)

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & + & x_2 & \to & \max \\ 2x_1 & - & x_2 & \leq & -2 \\ -\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & -1 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

Simplex metod

Prelazimo u standardni oblik sa jednakostima i dodajemo veštačku promenljivu x_0.

-1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
w_1	2	-1	1	0	0	-1	-2
w_2	-2	1	0	1	0	-1	-1
w_3	1	1	0	0	1	-1	7
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	0	0	0	0	0	1	0

Veštačka promenljiva x_0 ulazi u bazu.

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	-2	1	-1	0	0	1	2
w_2	-4	2	-1	1	0	0	1
w_3	-1	2	-1	0	1	0	9
ζ	-1	-1	0	0	0	0	0
ζ_1	2	-1	1	0	0	0	-2

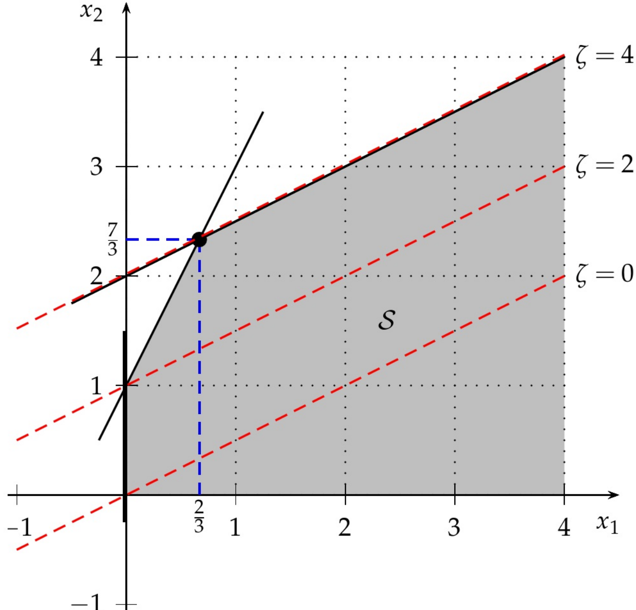
1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	0	0	$-1/2$	$-1/2$	0	1	$3/2$
x_2	-2	1	$-1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$
w_3	3	0	0	-1	1	0	8
ζ	-3	0	$-1/2$	$1/2$	0	0	$1/2$
ζ_1	0	0	$1/2$	$1/2$	0	0	$-3/2$

Ovo je optimalna tabela za ζ_1. Ali, veštačka promenljiva $\zeta_1 = x_0$ ima pozitivnu vrednost ($\zeta_1 = 3/2 > 0$), pa zaključujemo da problem **nema rešenje jer je skup dopustivih tačaka prazan,** $\mathcal{S} = \emptyset$.

g)

$$\begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & 2x_2 & \rightarrow & \max \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 4 \\ 2x_1 & - & x_2 & \geq & -1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$



Vidimo da je jedno rešenje u tački $(x_1^*, x_2^*) = (2/3, 7/3)$, u kojoj funkcija clilja iznosi $\zeta^* = 4$. To je jedini vrh skupa $\mathcal{S}$ u kome se dostiže optimum, iako rešenje nije jedinstveno. Rešenje je degenerisano, dostiže se u svim tačkama poluprave koja polazi iz tačke $(2/3, 7/3)$.

0	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	-1	2	1	0	4
w_2	-2	1	0	1	1
	1	-2	0	0	0

1	x_1	x_2	w_1	w_2	
w_1	3	0	1	-2	2
x_2	-2	1	0	1	1
	-3	0	0	2	2

2	x_1	x_2	w_1	w_2	
x_1	1	0	$1/3$	$-2/3$	$2/3$
x_2	0	1	$2/3$	$-1/3$	$7/3$
	0	0	1	0	4

Rešenje: $x_1^* = 2/3$, $x_2^* = 7/3$, $\zeta^* = 4$.

Vidimo da rešenje nije jedinstveno jer ispod nebazične promenljive w_2 stoji 0. Ali, ako pokušamo razložiti dobijenu tabelu koristeći njenu kolonu kao radnu, vidimo da ne može, jer u njenoj koloni nema pozitivnih elemenata. Za ovakvo rešenje kažemo da je **degenerisano**.

Rešiti problem linearnog programiranja

$$\zeta = 10x_1 - 57x_2 - 9x_3 - 24x_4 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} 1/2x_1 & - & 11/2x_2 & - & 5/2x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ 1/2x_1 & - & 3/2x_2 & - & 1/2x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ x_1 & & & & & & & \leq & 1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0$$

U ovom zadatku imamo problem degeneracije, moguće je da se desi ciklično kruženje od tabele do tabele. Da bi to sprečili, pri izboru kolone i pivota ćemo koristiti pravilo Blanda.

0	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1	$1/2$	$-11/2$	$-5/2$	9	1	0	0	0
w_2	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
	-10	57	9	24	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	-11	-5	18	2	0	0	0
w_2	0	4	2	-8	-1	1	0	0
w_3	0	11	5	-18	-2	0	1	1
	0	-53	-41	204	20	0	0	0

2	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	$1/2$	-4	$-3/4$	$11/4$	0	0
x_2	0	1	$1/2$	-2	$-1/4$	$1/4$	0	0
w_3	0	0	$-1/2$	4	$3/4$	$-11/4$	1	1
	0	0	$-29/2$	98	$27/4$	$53/4$	0	0

3	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_3	2	0	1	-8	$-3/2$	$11/2$	0	0
x_2	-1	1	0	2	$1/2$	$-5/2$	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
	29	0	0	-18	-15	93	0	0

4	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
x_3	-2	4	1	0	$1/2$	$-9/2$	0	0
x_4	$-1/2$	$1/2$	0	1	$1/4$	$-5/4$	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
	20	9	0	0	$-21/2$	$141/2$	0	0

5	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1	-4	8	2	0	1	-9	0	0
x_4	$1/2$	$-3/2$	$-1/2$	1	0	1	0	0
w_3	1	0	0	0	0	0	1	1
	-22	93	21	0	0	-24	0	0

Biranje radne kolone po pravilu izbora nejnegativnijeg elementa bi nas dovelo u tabelu broj 0. Treba izbeći ciklično kretanje kroz tabele. Zato po pravilu Blanda biramo kolonu x_1.

6	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1	0	-4	-2	8	1	-1	0	0
x_1	1	-3	-1	2	0	2	0	0
w_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1
	0	27	-1	44	0	20	0	0

7	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	
w_1	0	2	0	4	1	-5	2	2
x_1	1	0	0	0	0	0	1	1
x_3	0	3	1	-2	0	-2	1	1
	0	30	0	42	0	18	1	1

$$x^* = (1,0,1,0),\ w^* = (2,0,0),\ \zeta^* = 1$$

Dualnost

Dat je problem linearnog programiranja

$$\zeta = 6x_1 + 5x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcrcr} -2x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & + & 2x_2 & \leq & 5 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 7 \\ 2x_1 & + & x_2 & \leq & 11 \\ x_1 & - & 2x_2 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

Za dati problem postaviti dual, rešiti primar i dual

$$\xi = y_1 + 5y_2 + 7y_3 + 11y_4 + 3y_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} -2y_1 & - & y_2 & + & y_3 & + & 2y_4 & + & y_5 & \geq & 6 \\ y_1 & + & 2y_2 & + & y_3 & + & y_4 & - & 2y_5 & \geq & 5 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2 \geq 0, \ y_3 \geq 0, \ y_4 \geq 0, \ y_5 \geq 0$$

Prvi način: rešićemo primar i iz optimalne tabele očitati rešenje duala

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	-2	1	1	0	0	0	0	1
w_2	-1	2	0	1	0	0	0	5
w_3	1	1	0	0	1	0	0	7
w_4	2	1	0	0	0	1	0	11
w_5	1	-2	0	0	0	0	1	3
	-6	-5	0	0	0	0	0	0

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	0	-3	1	0	0	0	2	7
w_2	0	0	0	1	0	0	1	8
w_3	0	3	0	0	1	0	-1	4
w_4	0	5	0	0	0	1	-2	5
x_1	1	-2	0	0	0	0	1	3
	0	-17	0	0	0	0	6	18

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	0	0	1	0	0	$3/5$	$4/5$	10
w_2	0	0	0	1	0	0	1	8
w_3	0	0	0	0	1	$-3/5$	$1/5$	1
x_2	0	1	0	0	0	$1/5$	$-2/5$	1
x_1	1	0	0	0	0	$2/5$	$1/5$	5
	0	0	0	0	0	$17/5$	$-4/5$	35

3	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	0	0	1	0	-4	3	0	6
w_2	0	0	0	1	-5	3	0	3
w_5	0	0	0	0	5	-3	1	5
x_2	0	1	0	0	2	-1	0	3
x_1	1	0	0	0	-1	1	0	4
	0	0	0	0	4	1	0	39

Rešenje primara:

$$x^* = (4,3),\ w^* = (6,3,0,0,5),\ \zeta^* = 39$$

Rešenje duala očitano iz optimalne tabele primara:

$$y^* = (0,0,4,1,0),\ z^* = (0,0),\ \xi^* = 39$$

Uputstvo: dualne promenljive očitavamo: y ispod w, z ispod x.

Drugi način: rešićemo dual i očitati rešenje primara

-1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	y_0	
z_1	2	1	-1	-2	-1	1	0	-1	-6
z_2	-1	-2	-1	-1	2	0	1	-1	-5
	1	5	7	11	3	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	1	0

0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	y_0	
y_0	-2	-1	1	2	1	-1	0	1	6
z_2	-3	-3	0	1	3	-1	1	0	1
	1	5	7	11	3	0	0	0	0
	2	1	-1	-2	-1	1	0	0	-6

1	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	y_0	
y_0	4	5	1	0	-5	1	-2	1	4
y_4	-3	-3	0	1	3	-1	1	0	1
	34	38	7	0	-30	11	-11	0	-11
	-4	-5	-1	0	5	-1	2	0	-4

2	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	
y_2	$4/5$	1	$1/5$	0	-1	$1/5$	$-2/5$	$4/5$
y_4	$-3/5$	0	$3/5$	1	0	$-2/5$	$-1/5$	$17/5$
	$18/5$	0	$-3/5$	0	8	$17/5$	$21/5$	$-207/5$

3	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	z_1	z_2	
y_3	4	5	1	0	-5	1	-2	4
y_4	-3	-3	0	1	3	-1	1	1
	6	3	0	0	5	4	3	-39

Rešenje duala:

$$y^* = (0,0,4,1,0),\ z^* = (0,0),\ \xi^* = 39$$

Rešenje primara očitano iz optimalne tabele duala:

$$x^* = (4,3),\ w^* = (6,3,0,0,5),\ \zeta^* = 39$$

Uputstvo: primarne promenljive očitavamo:

w ispod y, x ispod z.

Problem prodavnice zdrave hrane

Prodavnica zdrave hrane pravi smesu dve vrste mizli. U Sport mizlima ima 20% pšeničnih pahuljica, a u Tropic mizlima ima 32% pšeničnih pahuljica. Tropic mizle koštaju 60 pfeniga kg a Sport mizle 80 pfeniga kg. Koliko kojih mizli treba staviti u 1 kg smese pa da se količina pšeničnih pahuljica održi do 25%, a da smesa bude što jeftinija?

$\zeta^* = 71{,}67$

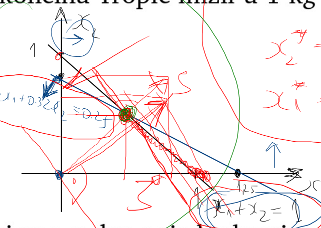
$x_2^* = \frac{5}{12}$

$x_1^* = \frac{7}{12}$

Uvodimo veličine x_1 = količina Sport mizli u 1 kg smese, x_2 = količina Tropic mizli u 1 kg smese, ζ = cena 1 kg smese.

$$\zeta = 80x_1 + 60x_2 \to \min$$

$$\begin{aligned} 0.20x_1 \quad + \quad 0.32x_2 &\leq 0.25 \\ x_1 \quad + \quad x_2 &= 1 \\ x_1 \geq 0, \;\; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Da bi dobili standardni oblik sa $\leq$, jednakost $x_1 + x_2 = 1$ razdvajamo u dve nejednakosti:

$$x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \;\; / \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \;\; -x_1 - x_2 \leq -1$$

Rešićemo isti problem na drugi način, preko duala

Primar (1)

$$-\zeta = -80x_1 - 60x_2 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcr} 0.20x_1 & + & 0.32x_2 & \leq & 0.25 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 1 \\ -x_1 & - & x_2 & \leq & -1 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, \ \ x_2 \geq 0$$

(3) **Dual**

$$-\xi = 0.25y_1 + y_2' - y_2'' \to \min$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} 0.20y_1 & + & y_2' & - & y_2'' & \geq & -80 \\ 0.32y_1 & + & y_2' & - & y_2'' & \geq & -60 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (-1) \\ / \cdot (-1) \end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \ y_2' \geq 0, \ y_2'' \geq 0$$

0	y_1	y_2'	y_2''	z_1	z_2	
z_1	$-1/5$	-1	1	1	0	80
z_2	$-8/25$	-1	1	0	1	60
	$1/4$	1	-1	0	0	0

1	y_1	y_2'	y_2''	z_1	z_2	
z_1	$3/25$	0	0	1	-1	20
y_2''	$-8/25$	-1	1	0	1	60
	$-7/100$	0	0	0	1	60

0	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	x_0	
x_0	**4**	-1	-2	2	-1	0	0	1	4
w_2	7	4	-2	2	-1	1	0	0	19
w_3	5	0	-3	3	-1	0	1	0	10
	-3	-4	1	-1	0	0	0	0	0
	-4	1	2	-2	1	0	0	0	-4

1	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$	$-1/4$	0	0	1
w_2	0	**23/4**	$3/2$	$-3/2$	$3/4$	1	0	12
w_3	0	$5/4$	$-1/2$	$1/2$	$1/4$	0	1	5
	0	$-19/4$	$-1/2$	$1/2$	$-3/4$	0	0	3

2	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	$-10/23$	$10/23$	$-5/23$	$1/23$	0	$35/23$
x_2	0	1	$6/23$	$-6/23$	$3/23$	$4/23$	0	$48/23$
w_3	0	0	$-19/23$	**19/23**	$2/23$	$-5/23$	1	$55/23$
	0	0	$17/23$	$-17/23$	$-3/23$	$19/23$	0	$297/23$

3	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	0	0	$-5/19$	$3/19$	$-10/19$	$5/19$
x_2	0	1	0	0	**$3/19$**	$2/19$	$6/19$	$54/19$
x_3''	0	0	-1	1	$2/19$	$-5/19$	$23/19$	$55/19$
	0	0	0	0	$-1/19$	$12/19$	$17/19$	$286/19$

4	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	$5/3$	0	0	0	$1/3$	0	5
w_1	0	$19/3$	0	0	1	$2/3$	2	18
x_3''	0	$-2/3$	-1	1	0	$-1/3$	1	1
	0	$1/3$	0	0	0	$2/3$	1	16

Rešenje primara:

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^{*\prime}, x_3^{*\prime\prime}) = (5,0,0,1),\ x_3^* = x_3^{*\prime} - x_3^{*\prime\prime} = -1,\ w^* = (18,0,0),\ \zeta = 16$$

Rešenje duala očitavamo iz optimalne tabele:

$$y^* = (0,2/3,1),\ z^* = (0,1/3,0,0),\ \xi^* = 16.$$

Komplementarnost dodatnih promenljivih

Rešiti problem linearnog programiranja prelaskom na dual grafičkim metodom.

$$\zeta = x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 11x_4 + 3x_5 \to \min$$

$-w_1 = 6$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & \geq & 6 \qquad (-\ w_1 = 6) \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & \geq & 5 \qquad (-\ w_2 = 5)
\end{array}$$

$w_2 = 5$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\ \ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \qquad (w_1 \geq 0, w_2 \geq 0)$$

$x_4 = 1$

$x_3 = 4$

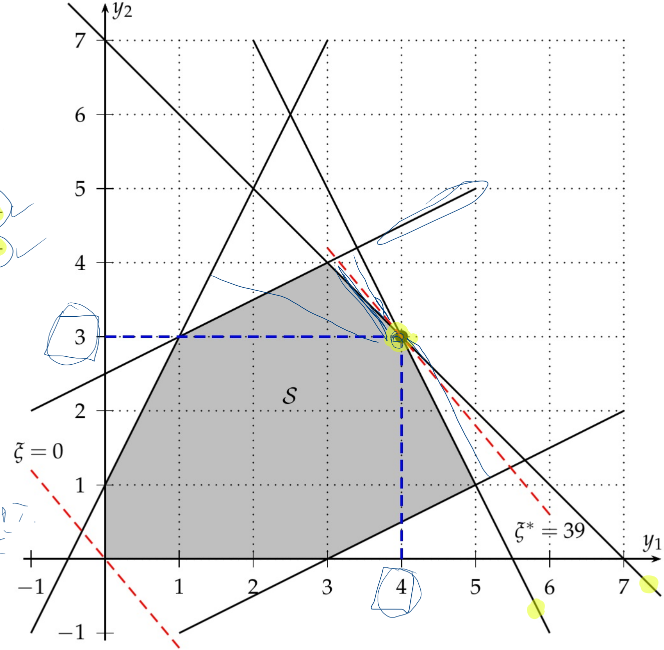
$x_1 = x_2 = x_5 = 0$

Preći ćemo na dual koji ima dve promenljive i može se rešiti grafičkim metodom.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
\xi & = & 6y_1 & + & 5y_2 & \to & \max & & \\
 & & -2y_1 & + & y_2 & \leq & 1 & & \\
 & & -y_1 & + & 2y_2 & \leq & 5 & & \\
 & & y_1 & + & y_2 & \leq & 7 & \to & \\
 & & 2y_1 & + & y_2 & \leq & 11 & & \\
 & & y_1 & - & 2y_2 & \leq & 3 & & \\
 & & \multicolumn{5}{l}{y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcrcrcl}
-2y_1 & + & y_2 & + & z_1 & = & 1 \\
-y_1 & + & 2y_2 & + & z_2 & = & 5 \\
y_1 & + & y_2 & + & z_3 & = & 7 \\
2y_1 & + & y_2 & + & z_4 & = & 11 \\
y_1 & - & 2y_2 & + & z_5 & = & 3 \\
\multicolumn{7}{l}{z_1 \geq 0, z_2 \geq 0, z_3 \geq 0, z_4 \geq 0, z_5 \geq 0}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rcrcr}
\xi = 6y_1 + 5y_2 \to \max & & & & \\
-2y_1 & + & y_2 & \leq & 1 \\
-y_1 & + & 2y_2 & \leq & 5 \\
y_1 & + & y_2 & \leq & 7 \\
2y_1 & + & y_2 & \leq & 11 \\
y_1 & - & 2y_2 & \leq & 3 \\
\end{array}
$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0$$



$z_3^* = z_4^* = 0$ NEBAZIČNE

x_3, x_4 SU BAZIČNE

x_1, x_2, x_5 SU BAZIČNE

z_1, z_2, z_5 SU BAZIČNE

U OPT. REŠ.

Sa slike vidimo da je rešenje problema $y_1^* = 4$, $y_2^* = 3$, $\xi^* = 39$.

Dualni problem ima rešenje $y_1^* = 4$, $y_2^* = 3$. Na osnovu principa dualne komplementarnosti sledi da za optimum primara važi $w_1^* = 0$, $w_2^* = 0$.

Rešenje je nastalo u preseku pravih $y_1 + y_2 = 7$ i $2y_1 + y_2 = 11$. To nam govori da su treće i četvrto ograničenje iskorišćeni do kraja, odnosno da su dodatne promenljive $z_3^* = z_4^* = 0$.

Takođe, rešenje ne leži na ostalim pravama koje ograničavaju $\mathcal{S}$. Stoga, ostale dodatne promenljive su pozitivne: $z_1^* > 0$, $z_2^* > 0$, $z_5^* > 0$.

Na osnovu principa dualne komplementarnosti sledi da je u primaru $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_5^* = 0$.

Kad to uvrstimo u početni problem doveden na standardni oblik sa jednakostima:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
-2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & + & x_5 & + & w_1 & & & = & 6 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & & & + & w_2 & = & 5
\end{array}
$$

dobijamo sistem jednačina:

$$
\begin{array}{rcrcl}
x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\
x_3 & + & x_4 & = & 5
\end{array}
$$

čije rešenje je $x_3^* = 4$, $x_4^* = 1$, $\zeta^* = 39$.

Dualna komplementarnost se vidi iz rešenja primara i duala: $\zeta^* = \xi^* = 39$,

$x^* = (0,0,4,1,0)$, $w^* = (0,0)$,

$z^* = (6,3,0,0,5)$, $y^* = (4,3)$.

Kombinatorni metod

Rešiti problem linearnog programiranja

$$\zeta = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & \leq & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & \leq & 3 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

Dodavanjem $w_1 \geq 0$ i $w_2 \geq 0$ dovodimo na oblik sa jednakostima:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & & & + & w_1 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & w_2 & = & 3 \end{array}$$

Znamo da ako postoji rešenje, onda postoji rečničko rešenje.

x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	ζ
0	**0**	**0**	1	3	0
~~**0**~~	~~**0**~~	~~—~~	~~**0**~~	~~—~~	~~—~~
0	**0**	1	1	**0**	1
0	1	**0**	**0**	2	1
~~**0**~~	~~3~~	~~**0**~~	~~−2~~	~~**0**~~	~~3~~
0	1	2/3	**0**	**0**	**5/3**
1	**0**	**0**	**0**	1	1
~~3/2~~	~~**0**~~	~~**0**~~	~~−1/2~~	~~**0**~~	~~3/2~~
1	**0**	1/3	**0**	**0**	4/3
~~2~~	~~−1~~	~~**0**~~	~~**0**~~	~~**0**~~	~~1~~

Našli smo sva (dopustiva) rečnička rešenja. Najveća vrednost funkcije dobiti je $\zeta = 5/3$ za rečničko rešenje sa baznim promenljivama x_2 i x_3. Odgovarajući rečnik je:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 5/3 & - & 1/3\,x_1 & - & 2/3\,w_1 & - & 1/3\,w_2 \\ \hline x_2 & = & 1 & - & x_1 & - & w_1 & & \\ x_3 & = & 2/3 & - & 1/3\,x_1 & + & 1/3\,w_1 & - & 1/3\,w_2 \end{array}$$

Rečnik koji smo dobili je optimalan, rešenje problema je $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 2/3$, $\zeta^* = 5/3$.

Negativno transponovanje

Postaviti dual problema iz prethodnog zadatka, napisati optimalni rečnik duala.

$$\xi = y_1 + 3\,y_2 \to \min$$

$$\begin{array}{ccccc} y_1 & + & 2\,y_2 & \geq & 1 \\ y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\ & & 3\,y_2 & \geq & 1 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \;\; y_2 \geq 0$$

Dodavanjem $z_1 \geq 0$, $z_2 \geq 0$, $z_3 \geq 0$ dovodimo na oblik sa jednakostima:

$$\begin{array}{ccccccccccc} y_1 & + & 2\,y_2 & - & z_1 & & & & & = & 1 \\ y_1 & + & y_2 & & & - & z_2 & & & = & 1 \\ & & 3\,y_2 & & & & & - & z_3 & = & 1 \end{array}$$

Koristeći negativno transponovanje imamo (optimalni) rečnik duala koji odgovara optimalnom rečniku primara:

$$\begin{array}{ccccccc} -\xi & = & -5/3 & - & z_2 & - & 2/3\,z_3 \\ \hline z_1 & = & 1/3 & + & z_2 & + & 1/3\,z_3 \\ y_1 & = & 2/3 & + & z_2 & - & 1/3\,z_3 \\ y_2 & = & 1/3 & & & + & 1/3\,z_3 \end{array}$$

Rečničko (optimalno) rešenje je: $y_1^* = 2/3$, $y_2^* = 1/3$, $z_1^* = 1/3$, $z_2^* = 0$, $z_3^* = 0$, $\xi^* = 5/3$

Dualni simplex algoritam

Rešiti problem prodavnice zdrave hrane dualnim simplex algoritmom

$$-\zeta = -80x_1 - 60x_2 \to \max$$

$$\begin{aligned} 0.20x_1 &+ 0.32x_2 \le 0.25 \\ x_1 &+ x_2 \le 1 \\ -x_1 &- x_2 \le -1 \end{aligned}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

1	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
w_1	**−3/25**	0	1	0	8/25	−7/100
w_2	0	0	0	1	1	0
x_2	1	1	0	0	−1	1
	20	0	0	0	60	−60

0	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
w_1	1/5	8/25	1	0	0	1/4
w_2	1	1	0	1	0	1
w_3	−1	**−1**	0	0	1	−1
	80	60	0	0	0	0

2	x_1	x_2	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	0	−25/3	0	−8/3	7/12
w_2	0	0	0	1	1	0
x_2	0	1	25/3	0	5/3	5/12
	0	0	500/3	0	340/3	−215/3

DUAL NA DOPUSTIVOST

$$x_1^* = 7/12,\ x_2^* = 5/12,\ w_1^* = 0,\ w_2^* = 0,\ w_3^* = 0,\ \zeta^* = -215/3$$

Stolarska radionica

Stolarska radionica pravi stolice, stolove i police. Za svaki proizvod je potrebno uraditi sečenje, sklapanje i farbanje.

Vreme potrebno za pojedinu operaciju u satima je dato u tabeli:

	sečenje	sklapanje	farbanje
stolica	2	3	2
sto	3	3	3
polica	1	4	4

Iduće nedelje radionica raspolaže sa 150 sati za sečenje, 240 za sklapanje i 200 za farbanje.

Broj proizvedenih stolica mora biti barem tri puta veći od broja proizvedenih stolova, broj proizvedenih polica mora biti barem koliko broj proizvedenih stolova. Broj proizvedenih polica mora biti barem 10.

Stolice se prodaju po ceni 40€, stolovi 100€, police 60€.

Dualnim simplex metodom naći koji plan proizvodnje za iduću nedelju daje maksimalnu zaradu?

Uvešćemo promenljive:

x_1 = broj proizvedenih stolica za iduću nedelju

x_2 = broj proizvedenih stolova za iduću nedelju

x_3 = broj proizvedenih polica za iduću nedelju

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	2	3	1	1						150
w_2	3	3	4		1					240
w_3	2	3	4			1				200
w_4	-1	3	0				1			0
w_5	0	1	-1					1		0
w_6	0	0	-1						1	-10
3	-40	-100	-60	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

$$
\begin{aligned}
\zeta = 40x_1 + 100x_2 + 60x_3 &\to \max \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 150 \\
3x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 240 \\
2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 200 \\
-x_1 + 3x_2 &\le 0 \\
x_2 - x_3 &\le 0 \\
-x_3 &\le -10 \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

?

$$b = \begin{bmatrix} 150 \\ 240 \\ \vdots \\ -10 \end{bmatrix}$$

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	2	3	1	1	0	0	0	0	0	150
w_2	3	3	4	0	1	0	0	0	0	240
w_3	2	3	4	0	0	1	0	0	0	200
w_4	-1	3	0	0	0	0	1	0	0	0
w_5	0	1	-1	0	0	0	0	1	0	0
w_6	0	0	$\mathbf{-1}$	0	0	0	0	0	1	-10
	-40	-100	-60	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	2	3	0	1	0	0	0	0	1	140
w_2	3	3	0	0	1	0	0	0	4	200
w_3	2	3	0	0	0	1	0	0	4	160
x_2 w_4	-1	$\mathbf{3}$	0	0	0	0	1	0	0	0
w_5	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	10
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	10
	-40	-100	0	0	0	0	0	0	-60	600
	1	1	0	0	0	0	0	0	1	-10

≥ 0

≥ 0

KRAJ I FAZE

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	3	0	0	1	0	0	-1	0	1	140
w_2	4	0	0	0	1	0	-1	0	4	200
w_3	3	0	0	0	0	1	-1	0	4	160
x_2	$-1/3$	1	0	0	0	0	$1/3$	0	0	0
w_5	$\mathbf{1/3}$	0	0	0	0	0	$-1/3$	1	-1	10
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	10
	$-220/3$	0	0	0	0	0	$100/3$	0	-60	600

≥ 0

3	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	0	0	0	1	0	0	2	-9	$\mathbf{10}$	50
w_2	0	0	0	0	1	0	3	-12	16	80
w_3	0	0	0	0	0	1	2	-9	13	70
x_2	0	1	0	0	0	0	0	1	-1	10
x_1	1	0	0	0	0	0	-1	3	-3	30
x_3	0	0	1	0	0	0	0	0	-1	10
	0	0	0	0	0	0	-40	220	-280	2800

4	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_6	0	0	0	1/10	0	0	1/5	−9/10	1	5
w_2	0	0	0	−8/5	1	0	−1/5	12/5	0	0
w_3	0	0	0	−13/10	0	1	−3/5	27/10	0	5
x_2	0	1	0	1/10	0	0	1/5	1/10	0	15
x_1	1	0	0	3/10	0	0	−2/5	3/10	0	45
x_3	0	0	1	1/10	0	0	1/5	−9/10	0	15
	0	0	0	28	0	0	16	−32	0	4200

5	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_6	0	0	0	−1/2	3/8	0	1/8	0	1	5
w_5	0	0	0	−2/3	5/12	0	−1/12	1	0	0
w_3	0	0	0	1/2	−9/8	1	−3/8	0	0	5
x_2	0	1	0	1/6	−1/24	0	5/24	0	0	15
x_1	1	0	0	1/2	−1/8	0	−3/8	0	0	45
x_3	0	0	1	−1/2	3/8	0	1/8	0	0	15
	0	0	0	20/3	40/3	0	40/3	0	0	4200

$x_1^* = 45,\ x_2^* = 15,\ x_3^* = 15,\ \zeta^* = 4200$

$\zeta \to \min$

$-\xi \to \max$

$$\zeta = 1200 - \frac{20}{3} w_1 - \frac{40}{3} w_2 - \frac{40}{3} w_4$$

$$w_6 = 5 + \frac{1}{2} w_1 - \frac{3}{8} w_2 - \frac{1}{8} w_4$$

$w_5 =$

$w_3 =$

$x_2 =$

$x_1 =$

$x_3 = 15 + \frac{1}{2} w_1 - \frac{3}{8} w_2 - \frac{1}{8} w_4$

B W P

$$-\xi = -4200 - 5 y_6 - 0 y_5 - 5 y_3 - 15 z_2 - 45 z_1 - 15 z_3$$

$$y_1 = \frac{20}{3} - \frac{1}{2} y_6 - \frac{2}{3} y_5 + \frac{1}{2} y_3 + \frac{1}{6} z_2 + \frac{1}{2} z_1 - \frac{1}{2} z_3$$

$y_2 = \frac{40}{3} + \frac{3}{8} y_6$ … $+\frac{3}{8} z_3$

$y_4 = \frac{40}{3}$ … $+\frac{1}{8} z_3$

$\zeta = \zeta^* - z_N^{*T} x_N$

$x_B = x_B^* + B^{-1} N x_N$

$B^{-1}N = $ (6×3)

P: $m = 6$, $n = 3$

$x_B = \begin{bmatrix} w_6 \\ w_5 \\ w_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$x_{B\,6\times 1}$ $\quad x_{N\,3\times 1}$ $\quad z_N^* = \begin{bmatrix} 20/3 \\ 40/3 \\ 40/3 \end{bmatrix}$ $\quad z_{N\,3\times 1}^*$

$c = c + t\,\Delta c$

$(100)\ c_2\ (?)$

$\Delta c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Delta z_N^* = (B^{-1}N)^T \Delta c_B - \Delta c_N = \begin{bmatrix} +1/6 \\ -1/24 \\ -5/24 \end{bmatrix}$$

$$z_N = z_N^* + t \cdot \Delta z_N^* = \begin{bmatrix} 20/3 \\ 40/3 \\ 40/3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/24 \\ -5/24 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\frac{20}{3} + \frac{t}{6} \geq 0 \qquad t \geq -40$

$\frac{40}{3} - \frac{t}{24} \geq 0 \qquad t \leq 320$

$\frac{40}{3} - \frac{5t}{24} \geq 0 \qquad t \leq 64$

$-40 \quad 0 \quad 64$

$c_2 \in [100 - 40,\ 100 + 64]$

$[60,\ 164]$

Matrični zapis

Problem linearnog programiranja

$$\zeta = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$x_1 + x_2 \leq 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$$

dovesti na standardni oblik sa jednakostima.

Zapisati dati problem u matričnom obliku i identifikovati matrice.

Koristeći matrični zapis naći rečnik koji odgovara baznim promenljivama $x_B = [x_2, x_3]^T$.

Da li je dobijeni rečnik optimalan?

Napisati odgovarajući dualni rečnik.

Standardni oblik sa jednakostima:

$$\zeta = x_1 + x_2 + x_3 \to \max$$
$$x_1 + x_2 + w_1 = 1$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + w_2 = 3$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0$$

Matrični zapis je

$$\zeta = c^T x \to \max,\quad Ax = b,\quad x \geq 0,$$

gde je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T,$$
$$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & w_1 & w_2 \end{bmatrix}^T.$$

$$x = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad x_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$x_B^* = B^{-1} b = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad \zeta^* = \frac{5}{3}$$

$$z_N^* = (B^{-1}N)^T c_B - c_N = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\zeta = \frac{5}{3} - \frac{1}{3} x_1 - \frac{2}{3} w_1 - \frac{1}{3} w_2$$
$$x_2 = 1 - x_1 - w_1$$
$$x_3 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} x_1 + \frac{1}{3} w_1 - \frac{1}{3} w_2$$

Nebazične promenljive su $x_N = [x_1, w_1, w_2]^T$.

Permutovaćemo kolone matrice A u redosledu $A = [B\ N]$.

Istim redosledom permutujemo vrste matrica $x = [x_B^T\ x_N^T]^T$ i $c = [c_B^T\ c_N^T]^T$.

Imamo: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c_N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x = [x_2, x_3, x_1, w_1, w_2]^T$.

Nalazimo inverznu matricu: $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ i $B^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$.

Koristeći: $x_B^* = B^{-1}b$, $\zeta^* = c_B^T B^{-1} b$, $z_N^* = \left(B^{-1}N\right)^T c_B - c_N$, dobijamo:

$$x_B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \quad \zeta^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 5/3,$$

$$z_N^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{array}{rcl} \zeta & = & \zeta^* - (z_N^*)^T x_N \\ \hline x_B & = & x_B^* - B^{-1} N x_N \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcrcr} \zeta & = & 5/3 & - & 1/3\,x_1 & - & 2/3\,w_1 & - & 1/3\,w_2 \\ \hline x_2 & = & 1 & - & x_1 & - & w_1 & & \\ x_3 & = & 2/3 & - & 1/3\,x_1 & + & 1/3\,w_1 & - & 1/3\,w_2 \end{array}$$

Rečnik koji smo dobili je optimalan, $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 2/3$, $w_1^* = 0$, $w_2^* = 0$, $\zeta^* = 5/3$.

Dualni problem u standardnom obliku sa jednakostima:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcl} \xi & = & y_1 & + & 3\,y_2 & \to & \min & & & & & & \\ & & y_1 & + & 2\,y_2 & - & z_1 & & & & & = & 1 \\ & & y_1 & + & y_2 & & & - & z_2 & & & = & 1 \\ & & & & 3\,y_2 & & & & & - & z_3 & = & 1 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0,\ z_3 \geq 0.$$

Za primarne promenljive je bilo: $x_B = [x_2, x_3]^T$, $x_N = [x_1, w_1, w_2]^T$.
Za dualne promenljive imamo: $z_B = [z_2, z_3]^T$, $z_N = [z_1, y_1, y_2]^T$.
Dualni rečnik je

$$\begin{array}{rcl} -\xi & = & -\zeta^* - (x_B^*)^T z_B \\ \hline z_N & = & z_N^* + (B^{-1}N)^T z_B \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcrcrcr} -\xi & = & -5/3 & - & z_2 & - & 2/3\,z_3 \\ \hline z_1 & = & 1/3 & + & z_2 & + & 1/3\,z_3 \\ y_1 & = & 2/3 & + & z_2 & - & 1/3\,z_3 \\ y_2 & = & 1/3 & & & + & 1/3\,z_3 \end{array}$$

Ovo je, takođe, optimalan rečnik,
$y_1^* = 2/3$, $y_2^* = 1/3$, $z_1^* = 1/3$, $z_2^* = 0$, $z_3^* = 0$, $\xi^* = 5/3$.

Veza matričnog zapisa i Simplex tabele

$$
\begin{array}{rcl}
\zeta & = & \zeta^* - (z_N^*)^T x_N \\
\hline
x_B & = & x_B^* - B^{-1} N x_N
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & x_B & x_N & \\
\hline
x_B & I & B^{-1}N & x_B^* \\
\hline
 & 0 & (z_N^*)^T & \zeta
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
-\xi & = & -\zeta^* - (x_B^*)^T z_B \\
\hline
z_N & = & z_N^* + (B^{-1}N)^T z_B
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{c|cc|c}
 & z_N & z_B & \\
\hline
z_N & I & -(B^{-1}N)^T & z_N^* \\
\hline
 & 0 & (x_B^*)^T & -\xi
\end{array}
$$

Pri tome su kolone između crta u tabelama sortirane po početnom redosledu promenljivih. Na primer, za prethodni zadatak, optimalne tabele primara i duala su:

	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	
x_2	1	1	0	1	0	1
x_3	$1/3$	0	1	$-1/3$	$1/3$	$2/3$
	$1/3$	0	0	$2/3$	$1/3$	$5/3$

	y_1	y_2	z_1	z_2	z_3	
z_1	0	0	1	-1	$-1/3$	$1/3$
y_1	1	0	0	-1	$1/3$	$2/3$
y_2	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$
	0	0	0	1	$2/3$	$-5/3$

Analiza osetljivosti

U kom opsegu može da se promeni vrednost c_3 u primarnom problemu prethodnog zadatka pa da dobijeno rešenje ostane optimalno?

Promena koeficijenata funkcije dobiti je oblika $c := c + t\Delta c$, gde je

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta z_N = \left(B^{-1}N\right)^T \Delta c_B - \Delta c_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

dobijamo: $z_N^* := z_N^* + t\Delta z_N = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 + 1/3t \\ 2/3 - 1/3t \\ 1/3 + 1/3t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

Odatle imamo tri nejednačine za koje je presek rešenja $-1 \leq t \leq 2$.

Sledi da za $0 \leq c_3 \leq 3$ dobijeno rešenje ostaje optimalno.

Za problem stolarske radionice ispitati u kom opsegu se može promeniti cena police a u kom opsegu raspoloživo vreme za sečenje, pa da dobijeni plan proizvodnje ostane optimalan.

Iz optimalne tabele rešenja

5	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_6	0	0	0	$-1/2$	$3/8$	0	$1/8$	0	1	5
w_5	0	0	0	$-2/3$	$5/12$	0	$-1/12$	1	0	0
w_3	0	0	0	$1/2$	$-9/8$	1	$-3/8$	0	0	5
x_2	0	1	0	$1/6$	$-1/24$	0	$5/24$	0	0	15
x_1	1	0	0	$1/2$	$-1/8$	0	$-3/8$	0	0	45
x_3	0	0	1	$-1/2$	$3/8$	0	$1/8$	0	0	15
	0	0	0	$20/3$	$40/3$	0	$40/3$	0	0	4200

očitavamo (permutacija vrsta napisana u prvoj koloni tabele):

$$x_B = \begin{bmatrix} w_6 \\ w_5 \\ w_3 \\ x_2 \\ x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_4 \end{bmatrix}, x_B^* = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 15 \\ 45 \\ 15 \end{bmatrix}, B^{-1}N = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/8 & 1/8 \\ -2/3 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -9/8 & -3/8 \\ 1/6 & -1/24 & 5/24 \\ 1/2 & -1/8 & -3/8 \\ -1/2 & 3/8 & 1/8 \end{bmatrix}, z_N^* = \begin{bmatrix} 20/3 \\ 40/3 \\ 40/3 \end{bmatrix}.$$

Da smo računali x_B^*, z_N^* i $B^{-1}N$ od početnih matrica, dobili bismo isti rezultat, ali bi vrste bile permutovane kao u početnoj permutaciji $[x_1, x_2, x_3, w_3, w_5, w_6]^T$.

Interesuje nas promena cene police, koja je treća cena po redu, zato:

$$\Delta c = [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T.$$

Kad se primeni redosled vrsta u skladu sa x_B i x_N imamo

$$\Delta c_B = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^T, \ \Delta c_N = [0, 0, 0]^T.$$

Kad nađemo $\Delta z_N = \left(B^{-1}N\right)^T \Delta c_B - \Delta c_N = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 3/8 \\ 1/8 \end{bmatrix}$, dobijamo:

$$z_N^* := z_N^* + t\Delta z_N = \begin{bmatrix} 20/3 - 1/2t \\ 40/3 + 3/8t \\ 40/3 + 1/8t \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t & \leq & 40/3 \\ t & \geq & -320/9 \\ t & \geq & -320/3 \end{cases}$$

Dobili smo tri nejednačine za koje je presek rešenja $-320/9 \leq t \leq 40/3$.

Dakle, cena polica može da se kreće u opsegu od $60 - 320/9 = 220/9 = 24.444$ do $60 + 40/3 = 220/3 = 73.333$ i da dobijeno rešenje ostane optimalno.

Slično kao za cenu police, sad nas interesuje promena vektora b za $\Delta b = [1,0,0,0,0,0]^T$, $b := b + t\Delta b$. Treba izračunati promenu $\Delta x_B = B^{-1}\Delta b$.

Da bismo izbegli invertovanje matrice B, možemo iskoristiti rezultat dobijen množenjem $B^{-1}N$, jer je prva kolona matrice N jednaka sa Δb.

Traženo rešenje očitavamo kao prvu kolonu matrice $B^{-1}N$ u permutovanom redosledu iz prve kolone optimalne tabele:

$5 - \frac{1}{2}t \geq 0$

$$x_B^* + tB^{-1}\Delta b = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \\ 15 \\ 45 \\ 15 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1/2 \\ -2/3 \\ 1/2 \\ 1/6 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 10 \\ t \leq 0 \\ t \geq -10 \\ t \geq -90 \\ t \geq -90 \\ t \leq 30 \end{cases}$$

$15 - \frac{1}{2}t \geq 0$

Postavili smo uslov da promenjeno x_B^* ostane dopustivo i dobili smo nejednačine čiji presek rešenja je $-10 \leq t \leq 0$.

To znači da ako se broj sati za sečenje smanji za maksimalno 10, izbor bazičnih promenljivih dobijenih u optimalnom rešenju početnog problema daje optimalan rečnik.

Dakle: broj sati za sečenje u opsegu od 140 do 150 sa izborom bazičnih promenljivih kao u prvom rešenju daje optimalan plan proizvodnje.

Parametarski self dual simplex

$$\zeta = 3x_1 + 4x_2 - x_3' + x_3'' \to \max$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcl}
4x_1 & - & x_2 & - & 2x_3' & + & 2x_3'' & \geq & 4 \\
3x_1 & + & 5x_2 & & & & & \leq & 15 \\
x_1 & + & x_2 & - & x_3' & + & x_3'' & \leq & 6
\end{array} \quad /(-1)$$

$$x_1 \geq 0, \;\; x_2 \geq 0, \;\; x_3' \geq 0, \;\; x_3'' \geq 0$$

$\mu \geq 0 \to \min$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	$4 \leq$	μ
w_1	$-\mathbf{4}$	1	2	-2	1	0	0	-4	1
w_2	3	5	0	0	0	1	0	15	1
w_3	1	1	-1	1	0	0	1	6	1
	-3	-4	1	-1	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	0	0	0	0	0

$$\frac{-3+\mu\cdot 4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{-1+\mu\cdot 4}{2} = 2$$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	$19/5 \leq \mu \leq 4$	
x_1	1	$-1/4$	$-1/2$	$1/2$	$-1/4$	0	0	1	$-1/4$
w_2	0	**23/4**	$3/2$	$-3/2$	$3/4$	1	0	12	$7/4$
w_3	0	$5/4$	$-1/2$	$1/2$	$1/4$	0	1	5	$5/4$
	0	$-19/4$	$-1/2$	$1/2$	$-3/4$	0	0	3	$-3/4$
	0	$5/4$	$3/2$	$1/2$	$1/4$	0	0	-1	$1/4$

$\mu = 0$

≥ 0

$0 \leq$

$1 - \mu \geq 0$

$\mu \leq 4$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	$3/2 \leq \mu \leq 19/5$	
x_1	1	0	$-10/23$	$10/23$	$-5/23$	$1/23$	0	$35/23$	$-4/23$
x_2	0	1	$6/23$	$-6/23$	**3/23**	$4/23$	0	$48/23$	$7/23$
w_3	0	0	$-19/23$	$19/23$	$2/23$	$-5/23$	1	$55/23$	$20/23$
	0	0	$17/23$	$-17/23$	$-3/23$	$19/23$	0	$297/23$	$16/23$
	0	0	$27/23$	$19/23$	$2/23$	$-5/23$	0	$-83/23$	$-3/23$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	$1 \leq \mu \leq 3/2$	
x_1	1	$5/3$	0	0	0	$1/3$	0	5	$1/3$
w_1	0	$23/3$	2	-2	1	$4/3$	0	16	$7/3$
w_3	0	$-2/3$	-1	**1**	0	$-1/3$	1	1	$2/3$
	0	1	1	-1	0	1	0	15	1
	0	$-2/3$	1	1	0	$-1/3$	0	-5	$-1/3$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	$0 \le \mu \le 1$	
x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	0	5	1/3
w_1	0	19/3	0	0	1	2/3	2	18	11/3
x_3''	0	−2/3	−1	1	0	−1/3	1	1	2/3
	0	1/3	0	0	0	2/3	1	16	5/3
	0	0	2	0	0	0	−1	−6	−1

≥ 0

$0 \leq$

$$
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
\zeta & = & 16 - 13/3\mu - \mu^2 & - & (1/3)\, x_2 & - & (2\mu)\, x_3' & - & (2/3)\, w_2 & - & (1-\mu)\, w_3 \\
\hline
x_1 & = & (5 + 1/3\mu) & - & 5/3\, x_2 & & & - & 1/3\, w_2 & & \\
w_1 & = & (18 + 11/3\mu) & - & 19/3\, x_2 & & & - & 2/3\, w_2 & - & 2w_3 \\
x_3'' & = & (1 + 2/3\mu) & + & 2/3\, x_2 & + & x_3' & + & 1/3\, w_2 & - & w_3
\end{array}
$$

$\mu := 0$

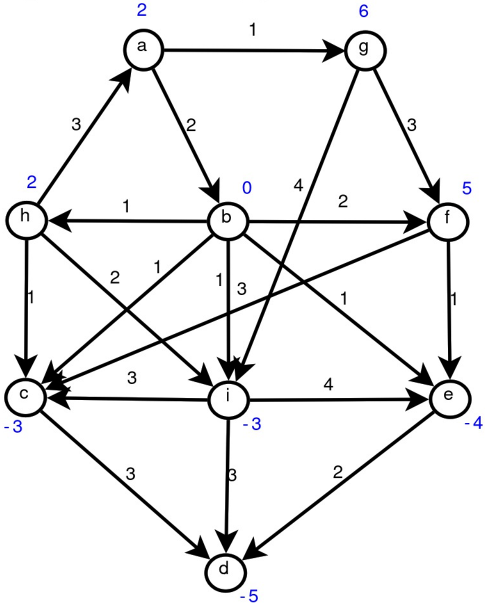
$\mu = 0 \;\Rightarrow$

	x_1	x_2	x_3'	x_3''	w_1	w_2	w_3	
x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	0	5
w_1	0	19/3	0	0	1	2/3	2	18
x_3''	0	−2/3	−1	1	0	−1/3	1	1
	0	1/3	0	0	0	2/3	1	16

$$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^{*\prime}, x_3^{*\prime\prime}) = (5,0,0,1),\ x_3^* = x_3^{*\prime} - x_3^{*\prime\prime} = -1,\ w^* = (18,0,0),\ \zeta = 16$$

Mrežni protok - minimizacija cene transporta kroz mrežu

Dat je problem mrežnog protoka



Polazeći od pokrivajućeg drveta:

a) ab, ag, bc, ed, fe, gf, gi, ha

b) ab, bc, be, ed, fe, gf, hc, id

c) ab, bc, bh, bi, cd, ed, fe, gf

naći najjeftiniji plan transporta.

$\mathcal{N} = \{$a, b, c, d, e, f, g, h, i$\}$

$\mathcal{A} = \{$ab, ag, bc, be, bf, bh, bi, cd, bc, ed, fc, fe, gf, gi, ha, hc, hi$\}$

a) Crvenom označavamo pokrivajuće drvo.

Transporti na granama pokrivajućeg drveta predstavljaju bazične promenljive. Balansirani protok dobijamo iz jednačina da za čvor k mora biti zbir razlika ulaza i izlaza jednaka iskazanoj potrebi:

$$\sum_{\substack{i \\ (i,k)\in\mathcal{A}}} x_{ik} - \sum_{\substack{j \\ (k,j)\in\mathcal{A}}} x_{kj} = -b_k$$

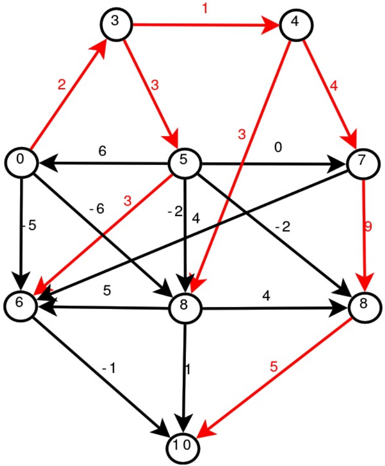
Vrednosti protoka x_{ik} za grane balansiranog drveta (bazične) pišemo na granu crvenom bojom. Za nebazične promenljive je $x_{ij} = 0$, njihove vrednosti ne pišemo. Na nebazičnom granama pišemo crnom bojom vrednosti dualnih dodatnih promenljivih z_{ij}.

Primar	Dual
$\zeta = c^T x \to \min$	$-\xi = -b^T y \to \max$
$Ax = -b$	$A^T y + z = c$
$x \geq 0$	$z \geq 0$

Jednačine duala glase: $\forall (i,j) \in \mathcal{A},\ y_j - y_i + z_{ij} = c_{ij}$.

Formati : $A \to m \times n$; $c, x, z \to n \times 1$; $b, y \to m \times 1$.

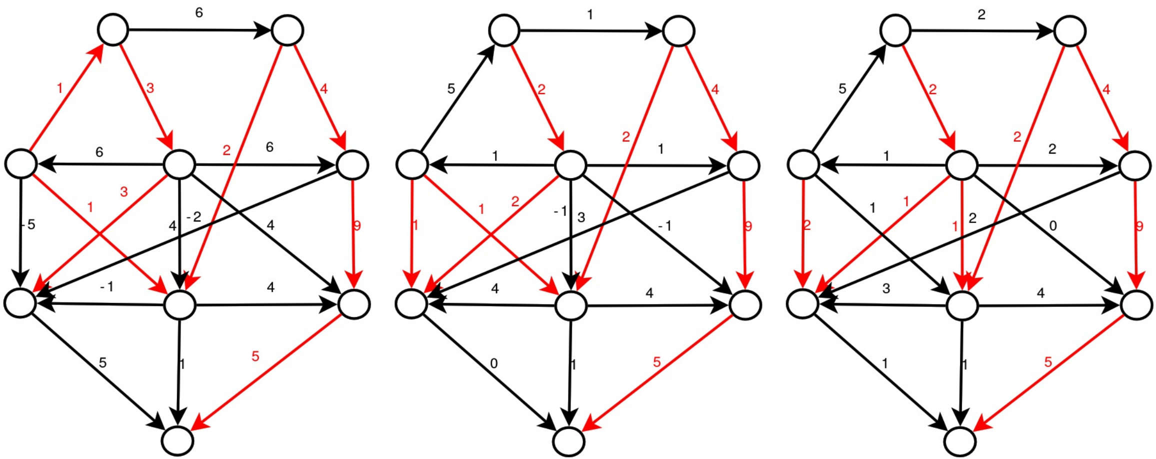
Koristeći princip dualne komplementarnosti: $\forall (i,j) \in \mathcal{A},\ x_{ij} z_{ij} = 0$, iz jednačina duala za grane pokrivajućeg drveta, birajući $y_a = 0$, računamo preostale dualne promenljive, upisujemo ih u kružiće.



Potom, iz istih jednačina, primenjenim na nebazične grane, računamo dualne dodatne promenljive i pišemo ih crnom bojom na odgovarajućim granama.
Vidimo (na pr. $z_{\mathsf{hi}} = -6$) da dati plan transporta nije dualno dopustiv, stoga nije optimalan. Za pivotizaciju ćemo uzeti da grana (h i) ulazi u bazu.
Sa nekim granama pokrivajućeg drveta ona čini konturu i h a g i. Idući po konturi, od grana koje su suprotno usmerene od grane (h i), minimalni protok je $t = 1$ na grani (a g), stoga ona izlazi iz baze.
Pivotizaciju x vrednosti vršimo tako što vrednost $t = 1$ dodajemo transportima u konturi koje su usmerene kao grana (h i), a oduzimamo transportima koji su usmereni suprotno.

Ako bi u planu transporta sa slike izbacili granu (a g), koja izlazi iz baze, čvorovi pokrivajućeg drveta bi bili podeljeni u dve grupe: {a, b, c, h} i {d, e, f, g, i}.

Pivotizaciju z vrednosti vršimo tako što z vrednosti na granama koje spajaju ove dve grupe čvorova smanjujemo ili povećavamo u skladu sa granom (h i): ulazi u bazu, z_{hi} se povećava sa -6 na 0. Isto tako se pivotizuju grane (a g), (b e), (b f), (b i), (c d). z vrednosti na granama (f c) i (i c) se smanjuju za 6, jer te grane spajaju grupe čvorova suprotno od (h i).

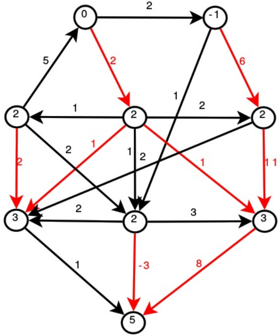


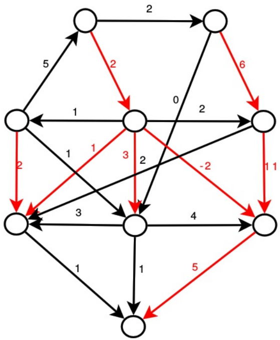
Za planove transporta posle početnog računamo samo x i z vrednosti. Poslednji plan transporta je i primarno i dualno dopustiv, pa je optimalan.

Ukupna cena transporta je

$$\zeta = x_{\mathsf{ab}} \cdot c_{\mathsf{ab}} + x_{\mathsf{bc}} \cdot c_{\mathsf{bc}} + x_{\mathsf{bi}} \cdot c_{\mathsf{bi}} + x_{\mathsf{ed}} \cdot c_{\mathsf{ed}} + x_{\mathsf{fe}} \cdot c_{\mathsf{fe}} + x_{\mathsf{gf}} \cdot c_{\mathsf{gf}} + x_{\mathsf{gi}} \cdot c_{\mathsf{gi}} + x_{\mathsf{hc}} \cdot c_{\mathsf{hc}} =$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 9 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 47$$

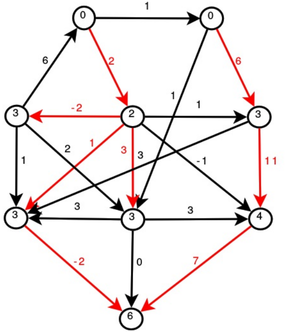




b) Izračunavamo balansirani protok po drvetu.

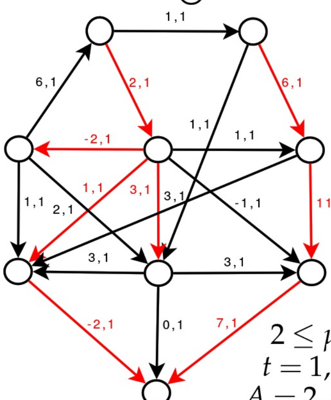
Dobijeni transport nije primarno dopustiv ($x_{\mathsf{id}} = -3$), ali jeste dualno dopustiv ($z \geq 0$). Vršićemo dualne simplex pivotizacije. Biramo granu (i d) da izađe iz baze. Onda će z_{id} ući u dualnu bazu i promeniti vrednost $0 \mapsto t$.
Čvor i ostaje izolovan. Od svih grana koje ulaze u čvor i, z vrednosti će biti ažurirane smanjivanjem za vrednost t. Da bi protok ostao dualno dopustiv, biramo $\min\{z_{\mathsf{bi}}, z_{\mathsf{gi}}, z_{\mathsf{hi}}\} = z_{\mathsf{bi}} = 1 = t$. Na granama koje izlaze iz čvora i, z vrednosti se uvećavaju za t.

Ažuriranje x vrednosti vršimo kad u postojećem transportu nađemo konturu od bazičnih promenljivih i grane (b i). Konturu čine čvorovi b i d e b. Na grani (i d) vrednost $x_{\mathsf{id}} = -3 \mapsto 0$, isto se x_{bi} uvećava sa 0 na 3. Na granama orijentisanim suprotno od (i d) umanjuje za 3.
Zatim, grana (b e) izlazi iz baze, (g i) ulazi u bazu. Tabela koja se dobija je identična optimalnoj tabeli dobijenoj pod a), dobili smo optimalno rešenje.

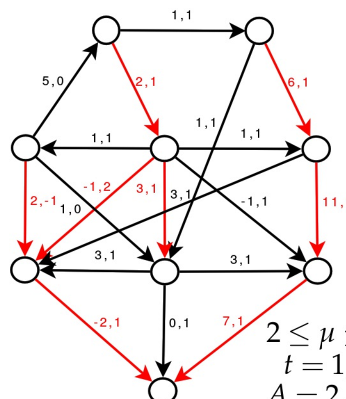


c) Dati protok nije ni primarno ni dualno dopustiv.

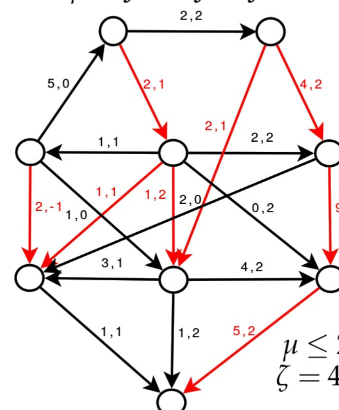
Problem perturbujemo dodavajući vrednost μ svim x i z vrednostima.
Radi lakšeg predstavljanja na grafu, x i z vrednosti koje sadrže μ ćemo prikazivati u notaciji sa zarezom: $a + b\mu = a, b$.
Pored grafa ćemo napisati za koje vrednosti μ je plan optimalan. Vršimo dualne i primarne pivotizacije sve dok ne dobijemo da dopustive vrednosti za μ koje uključuju nulu.



$2 \leq \mu$
$t = 1,1$
$A = 2,-1$



$2 \leq \mu \leq 2$
$t = 1,1$
$A = 2,-1$



$\mu \leq 2$
$\zeta = 47$