

EET20110414.01 Stolarska radionica pravi stolice, police i stolove. Za svaki proizvod je potrebno uraditi sečenje, sklapanje i bojenje.

Vreme potrebno za pojedinu operaciju u satima je dato u tabeli:

	sečenje	sklapanje	bojenje
stolica	2	2	3
polica	3	4	2
sto	4	3	3

Radionica ima na raspolaganju 300 sati za sečenje, 400 za sklapanje i 300 za bojenje.

Broj proizvedenih stolica mora biti barem tri puta veći od broja proizvedenih stolova.

Ukupan broj proizvedenih artikala mora biti barem 120.

Stolice se prodaju po ceni 30€, police 40€, stolovi 35€.

Koji plan proizvodnje daje maksimalnu zaradu?

Pri rešavanju koristiti dvostepeni Simplex postupak: Uvesti modifikovanu funkciju cilja koja će biti dualno dopustiva, vršiti dualne pivotizacije dok se ne dobije primarno dopustivo rešenje a zatim vršiti primarne pivotizacije dok se ne dobije optimalno rešenje početnog problema.

U kom intervalu može da se menja cena stolica da dobijeni plan proizvodnje ostane optimalan?

	sečenje	sklapanje	bojenje
stolica	2	2	3
polica	3	4	2
sto	4	3	3

Uvodimo veličine $x_1 =$ broj proizvedenih stolica, $x_2 =$ broj proizvedenih polica, $x_3 =$ broj proizvedenih stolova, $\zeta =$ zarada od prodaje.

$$\zeta = 30x_1 + 40x_2 + 35x_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 300$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 400$$

$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 300$$

$$-x_1 + 3x_3 \leq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 120$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0$$

Prvo radimo sa modifikovanom funkcijom cilja koja ima sve jedinice!

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	2	3	4	1	0	0	0	0	300
w_2	2	4	3	0	1	0	0	0	400
w_3	3	2	3	0	0	1	0	0	300
w_4	-1	0	3	0	0	0	1	0	0
w_5	-1	-1	-1	0	0	0	0	1	-120
	-30	-40	-35	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	0	0	0	0	0	0

[illegible]

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_1	0	0	2	1	0	1	0	5	0
w_2	0	0	1	0	1	2	0	8	40
x_2	0	1	0	0	0	-1	0	-3	60
w_4	0	0	4	0	0	1	1	2	60
x_1	1	0	1	0	0	1	0	2	60
	0	0	-5	0	0	-10	0	-60	4200
	0	0	0	0	0	0	0	1	-120

Kraj prve faze. Dobili smo dualno dopustiv problem.

Izbacujemo modifikovanu funkciju, nastavljamo sa polaznom.

3	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_5	0	0	$2/5$	$1/5$	0	$1/5$	0	1	0
w_2	0	0	$-11/5$	$-8/5$	1	$2/5$	0	0	40
x_2	0	1	$6/5$	$3/5$	0	$-2/5$	0	0	60
w_4	0	0	$16/5$	$-2/5$	0	$3/5$	1	0	60
x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	0	$3/5$	0	0	60
	0	0	19	12	0	2	0	0	4200

$$x = [60; 60; 0], \zeta = 4200\text{€}$$

3	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	
w_5	0	0	$2/5$	$1/5$	0	$1/5$	0	1	0
w_2	0	0	$-11/5$	$-8/5$	1	$2/5$	0	0	40
x_2	0	1	$6/5$	$3/5$	0	$-2/5$	0	0	60
w_4	0	0	$16/5$	$-2/5$	0	$3/5$	1	0	60
x_1	1	0	$1/5$	$-2/5$	0	$3/5$	0	0	60
	0	0	19	12	0	2	0	0	4200

$$x_B = [w_5, w_2, x_2, w_4, x_1]^T, \quad x_N = [x_3, w_1, w_3]^T.$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 1/5 \\ -11/5 & -8/5 & 2/5 \\ 6/5 & 3/5 & -2/5 \\ 16/5 & -2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{bmatrix}, \quad \Delta c_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta z_N = (B^{-1}N)^T \Delta c_B - \Delta c_N = \begin{bmatrix} 1/5 \\ -2/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad z_N^* = \begin{bmatrix} 19 \\ 12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
 19 + 1/5 \cdot t \geq 0 \\
 z_N^* + t\Delta z_N \geq 0 \Leftrightarrow 12 - 2/5 \cdot t \geq 0 \Leftrightarrow \\
 2 + 3/5 \cdot t \geq 0
 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow -10/3 \leq t \leq 30 \Leftrightarrow 30 - 10/3 \leq 30 + t \leq 30 + 30 \Leftrightarrow 30 + t \in [80/3, 60].$$

EET20110414.02 Dat je problem linearnog programiranja.

$$\begin{array}{rcll} 15x_1 & + & 9x_2 & \rightarrow \max \\ 3x_1 & + & x_2 & \leq 3 \\ -6x_1 & + & x_2 & \leq 6 \\ & & x_2 & \leq 2 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

- Postaviti dual datog problema.

$$\begin{array}{rcll} 3y_1 & + & 6y_2 & + 2y_3 \rightarrow \min \\ 3y_1 & - & 6y_2 & \geq 15 \\ y_1 & + & y_2 & + y_3 \geq 9 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.$$

- Uvesti dodatne promenljive redom: w_1 , w_2 i w_3 , napisati dati problem linearnog programiranja u matričnom obliku.

$$\begin{aligned}\zeta &= c^T x \rightarrow \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0,\end{aligned}$$

gde je

$$x = [x_1, x_2, w_1, w_2, w_3]^T, A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, b = [3, 6, 2]^T, c = [15, 9, 0, 0, 0]^T.$$

- Za izbor bazičnih promenljivih $x_B = [x_1, w_2, w_3]^T$ napisati primarni rečnik i dualni rečnik koji mu odgovara.

Pođimo od rečnika sa bazičnim $x_B = [w_1, w_2, w_3]^T$ i ubacimo x_1 u bazu Gausovim eliminacijama.

$$\begin{array}{rcll} \zeta & = & 0 & + & 15x_1 & + & 9x_2 \\ w_1 & = & 3 & - & 3x_1 & - & x_2 \\ w_2 & = & 6 & + & 6x_1 & - & x_2 \\ w_3 & = & 2 & & & - & x_2 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcll} \zeta & = & 15 & + & 4x_2 & - & 5w_1 \\ x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}w_1 \\ w_2 & = & 12 & - & 3x_2 & - & 2w_1 \\ w_3 & = & 2 & - & x_2 & & \end{array}$$

Za dualni problem u standardnom obliku sa uvedenim dodatnim promenljivama i

jednakostima

$$\begin{array}{rclclclcl}
 3y_1 & + & 6y_2 & + & 2y_3 & & & \rightarrow \min \\
 3y_1 & - & 6y_2 & & & - & z_1 & = 15 \\
 y_1 & + & y_2 & + & y_3 & & - & z_2 = 9
 \end{array}$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, z_1 \geq 0, z_2 \geq 0,$$

rečnik koji odgovara našem ima bazične promenljive $y_B = [z_2, y_1]^T$ i dobija se primenom negative-transpose osobine od odgovarajućeg primarnog rečnika:

$$\begin{array}{rclclclcl}
 -\zeta & = & -15 & - & z_1 & - & 12y_2 & - & 2y_3 \\
 \hline
 z_2 & = & -4 & + & \frac{1}{3}z_1 & + & 3y_2 & + & y_3 \\
 y_1 & = & 5 & + & \frac{1}{3}z_1 & + & 2y_2 & &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rclclcl}
 \zeta & = & 15 & + & 4x_2 & - & 5w_1 \\
 \hline
 x_1 & = & 1 & - & \frac{1}{3}x_2 & - & \frac{1}{3}w_1 \\
 w_2 & = & 12 & - & 3x_2 & - & 2w_1 \\
 w_3 & = & 2 & - & x_2 & &
 \end{array}$$

EET20100614.01 Na skladištu u Južnoj Americi se nalaze tovari $10t$ banana zapremine $250m^3$ i $8t$ narandži zapremine $160m^3$.

Avio prevoznik ima avion sa dva tovarna dela: prednji, nosivosti $12t$, zapremine $200m^3$ i zadnji, nosivosti $8t$, zapremine $120m^3$.

Zarada od prevoza $1t$ banana je 120€ , a od $1t$ narandži je 150€ .

- (a) Napisati problem linearnog programiranja koji opisuje model maksimizacije zarade uvodeći veličine: x_1 = deo tovara banana u prednjem delu, x_2 = deo tovara banana u zadnjem delu, x_3 = deo tovara narandži u prednjem delu, x_4 = deo tovara narandži u zadnjem delu.
- (b) Simplex metodom rešiti dobijeni problem.
- (c) Do koje vrednosti zarada od prevoza banana može da se poveća pa da dobijeno rešenje ostane optimalno?

$$\zeta = 120 \times 10 \times x_1 + 120 \times 10 \times x_2 + 150 \times 8 \times x_3 + 150 \times 8 \times x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & \leq 1 \\ & & x_3 & + x_4 \leq 1 \\ 10x_1 & & + & 8x_3 \leq 12 \\ & 10x_2 & & + 8x_4 \leq 8 \\ 250x_1 & & + & 160x_3 \leq 200 \\ & 250x_2 & & + 160x_4 \leq 120 \\ x_1 \geq 0 & x_2 \geq 0 & x_3 \geq 0 & x_4 \geq 0 \end{array}$$

0	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
w_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
w_3	10	0	8	0	0	0	1	0	0	0	12
w_4	0	10	0	8	0	0	0	1	0	0	8
w_5	250	0	160	0	0	0	0	0	1	0	200
w_6	0	250	0	160	0	0	0	0	0	1	120
	-1200	-1200	-1200	-1200	0	0	0	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
w_1	0	1	$-7/11$	0	1	0	0	0	0	0	$1/5$
w_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
w_3	0	0	$8/5$	0	0	0	1	0	$-1/25$	0	4
w_4	0	10	0	8	0	0	0	1	0	0	8
x_1	1	0	$7/11$	0	0	0	0	0	0	0	$4/5$
w_6	0	250	0	160	0	0	0	0	0	1	120
	0	-1200	-432	-1200	0	0	0	0	$24/5$	0	960

2	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
x_2	0	1	$-7/11$	0	1	0	0	0	0	0	$1/5$
w_2	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
w_3	0	0	$8/5$	0	0	0	1	0	$-1/25$	0	4
w_4	0	0	$32/5$	8	-10	0	0	1	$1/25$	0	6
x_1	1	0	$7/11$	0	0	0	0	0	0	0	$4/5$
w_6	0	0	160	160	-250	0	0	0	1	1	70
	0	0	-1200	-1200	1200	0	0	0	0	0	1200

3	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
x_2	0	1	0	16/25	0	0	0	0	0	1/250	12/25
w_2	0	0	0	0	25/16	1	0	0	-1/160	-1/160	9/16
w_3	0	0	0	-8/5	5/2	0	1	0	-1/20	-1/100	33/10
w_4	0	0	0	8/5	0	0	0	1	0	-1/25	16/5
x_1	1	0	0	-16/25	1	0	0	0	0	-1/250	13/25
x_3	0	0	1	1	-25/16	0	0	0	1/160	1/160	7/16
	0	0	0	0	-675	0	0	0	15/2	15/2	1725

4	x_1	x_2	x_3	x_4	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	
x_2	0	1	0	16/25	0	0	0	0	0	1/250	12/25
w_1	0	0	0	0	1	16/25	0	0	-1/250	-1/250	9/25
w_3	0	0	0	-8/5	0	-8/5	1	0	-1/25	0	12/5
w_4	0	0	0	8/5	0	0	0	1	0	-1/25	16/5
x_1	1	0	0	-16/25	0	-16/25	0	0	1/250	0	4/25
x_3	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1
	0	0	0	0	0	432	0	0	24/5	24/5	1968

$$x = [0.16; 0.48; 1; 0] \quad \zeta = 1968e$$

$$x_B = [x_2, w_1, w_3, w_4, x_1, x_3]^T, \quad x_N = [x_4, w_2, w_5, w_6]^T.$$

$$B^{-1}N = \begin{bmatrix} 16/25 & 0 & 0 & 1/250 \\ 0 & 16/25 & -1/250 & -1/250 \\ -8/5 & -8/5 & -1/25 & 0 \\ 8/5 & 0 & 0 & -1/25 \\ -16/25 & -16/25 & 1/250 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta c_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Delta c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\Delta z_N = (B^{-1}N)^T \Delta c_B - \Delta c_N = \begin{bmatrix} 0 \\ -16/25 \\ 1/250 \\ 1/250 \end{bmatrix}, \quad z_N^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 432 \\ 24/5 \\ 24/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 0 + 0 \cdot t &\geq 0 \\ z_N^* + t \Delta z_N \geq 0 &\Leftrightarrow \begin{aligned} 432 - 16/25 \cdot t &\geq 0 \\ 24/5 + 1/250 \cdot t &\geq 0 \\ 24/5 + 1/250 \cdot t &\geq 0 \end{aligned} \Leftrightarrow -1200 \leq t \leq 675. \end{aligned}$$

$$(120 + p) \cdot 10 \leq 1200 + 675 \Leftrightarrow p \leq 1875/10 - 120 = 67.5$$

Ako se zarada od prevoza banana poveća za 67.5€, odnosno, ako dođe do 187.5€, dobijeni plan prevoza daje maksimalnu zaradu.