

Prostor verovatnoće

Baca se crvena i plava kockica za igru. Skup svim mogućih ishoda predstavljaju brojevi koji "padnu" na redom crvenoj i plavoj kockici:

$$\Omega = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$$

PRIMER 1 Naći događaje i izračunati verovatnoće:

- (a) A = broj na plavoj kockici je veći od broja na crvenoj kockici.
- (b) B = broj na plavoj kockici je paran, a na crvenoj neparan.
- (c) C = zbir palih brojeva je veći od 9.

PRIMER 2 Opisati rečima događaje:

- (a) $A = \{14, 15, 16, 25, 26, 36\}$
- (b) $B = \{11, 13, 15, 31, 33, 35, 51, 53, 55\}$
- (c) $C = \{14, 15, 16, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65, 66\}$

PRIMER 3 Izračunati verovatnoće događaja: A = slučajno izabrana osoba je rođena za vikend, B = slučajno izabrana osoba je rođena u petak ili nedelju, $C = A \cup B$, $D = A \bar{B}$.

PRIMER 4 Novčić se baca dok se ne dobije grb, ali najviše 5 bacanja. Opisati skup mogućih ishoda i izračunati verovatnoću da je ukupan broj bacanja paran.

PRIMER 5 U kutiji su 3 crvene i 2 plave kuglice. Na slučajan način se izvlači dve kuglice. Izračunati verovatnoće događaja: A = izvučena je plava pa crvena kuglica. B = izvučena je jedna plava i jedna crvena kuglica. C = izvučene su kuglice iste boje.

PRIMER 6 U kutiji su 3 crvene i 2 plave kuglice. Na slučajan način se izvlači jedna kuglica, zapisuje se koje je boje, vraća se u kutiju i izvlači druga kuglica. Izračunati verovatnoće događaja: A = izvučena je plava pa crvena kuglica. B = izvučena je jedna plava i jedna crvena kuglica. C = izvučene su kuglice iste boje.

PRIMER 7 Pacijent dolazi u Dom zdravlja u slučajnom momentu između 8 i 12 časova. Pauza je od 10:00 do 10:30. Kolika je verovatnoća da će pacijent doći u vreme pauze?

PRIMER 8 U kvadrat je upisan krug. Na slučajan način se bira tačka u kvadratu. Kolika je verovatnoća da izabrana tačka leži u krugu?

PRIMER 9 Izračunati verovatnoću da se u bacanju kockice dobije šestica.

PRIMER 10 Izračunati verovatnoću da se u 10 bacanja kockice dobije barem jedna šestica.

U kutiji se nalaze 3 plave i 5 crvenih kuglica iste veličine. Na slučajan način se izvlače 3 kuglice (bez vraćanja). Posmatra se boja izvučenih kuglica.

PRIMER 1 *Kolika je verovatnoća da su izvučene redom plava, crvena, crvena kuglica?*

PRIMER 2 *Kolika je verovatnoća da su izvučene dve crvene i jedna plava kuglica?*

PRIMER 3 *Kolika je verovatnoća da je druga izvučena kuglica crvena ako se zna da je prva izvučena plava?*

PRIMER 4 *Kolika je verovatnoća da je druga izvučena kuglica crvena?*

Izračunati verovatnoće u prethodnim zadacima ako se kuglice posle izvlačenja vraćaju u kutiju.

PRIMER 9 *Oko kvadrata je opisan krug. Na slučajan način se bira tačka u krugu. Kolika je verovatnoća da je izabrana tačka u kvadratu?*

PRIMER 10 *Baca se kockica za igru. Događaji su A = pao je paran broj, B = pao je broj manji od 4. Rečima opisati događaje $A \bar{B}$ i $A \cup B$ i izračunati njihove verovatnoće.*

Uslovna verovatnoća

PRIMER 11 *Neka je: $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.4$, $P(B \cap C) = 0.25$, $P(A \cap B \cap C) = 0.15$.*

- *Izračunati $P(A \bar{B})$, $P(A \cap B \cap \bar{C})$ i $P(\bar{A} \cap B \cap C)$.*
- *Izračunati $P(A|B)$, $P(B|A)$.*

PRIMER 12 *Iz špila od 52 karte je izbačen kec herc ($A \heartsuit$). Potom se na slučajan način izvlači jedna karta. Događaj A = izvučena karta je herc ($\heartsuit$), B = Izvučena karta je dama (Q). Izračunati verovatnoće događaja A i B . Da li su A i B nezavisni?*

PRIMER 13 *Na deonici pravog puta su postavljena dva semafora. Vozila stižu u slučajnim momentima. Prvi semafor propušta 80% vozila. Drugi semafor propušta 75% vozila koja nisu stala na prvom semaforu i 60% vozila koja su stala na prvom semaforu.*

Kolika je verovatnoća da će vozilo proći deonicu sa tačno jednim zaustavljanjem?

Ako se zna da je vozilo prošlo deonicu sa jednim zaustavljanjem, kolika je verovatnoća da je zaustavljeno na prvom semaforu?

PRIMER 14 *Poznato je da 80% žena i 75% muškaraca veruje u zagrobni život. U grupi ima 51% muškaraca i 49% žena. Kolika je verovatnoća da slučajno izabrana osoba veruje u zagrobni život?*

Slučajne promenljive, numeričke karakteristike

PRIMER 15 Slučajna promenljiva X predstavlja broj koji padne na kockici za igru. Naći zakon raspodele, izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X .

PRIMER 16 Slučajna promenljiva X predstavlja broj šestica u $n = 3$ bacanja kockice za igru. Naći zakon raspodele, izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X .

PRIMER 17 Bacaju se dve kockice za igru. Slučajna promenljiva X predstavlja zbir brojeva na kockicama. Naći zakon raspodele, izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X .

PRIMER 18 Bacaju se $n = 10$ kockica za igru. Slučajna promenljiva X predstavlja zbir brojeva na kockicama. Izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X .

PRIMER 19 Baca se kockica za igru dok se ne dobije šestica, ali najviše 4 bacanja. Slučajna promenljiva X predstavlja broj bacanja. Naći zakon raspodele, izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X .

Normalna raspodela

PRIMER 20 Ako $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, za $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, izračunati $P(X < 1.645)$, $P(X > 1.96)$, $P(|X| < 1.285)$.

PRIMER 21 Ako $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, za $\mu = 0.5$ i $\sigma = 2$, izračunati $P(X < 1.645)$, $P(X > 1.96)$, $P(|X| < 1.285)$.

PRIMER 22 Kockica za igru se baca 600 puta. Slučajna promenljiva X predstavlja broj šestica. Naći zakon raspodele, izračunati očekivanje $E(X)$ i disperziju (varijansu) $D(X)$ slučajne promenljive X . Izračunati verovatnoću da broj šestica bude između 95 i 105 (uključujući i te brojeve).

Rešenje:

Slučajna promenljiva X ima Binomnu raspodelu: $X : \mathcal{B}(600, \frac{1}{6})$.

$$E(X) = 600 \cdot \frac{1}{6} = 100, D(X) = 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = 83.3333.$$

$$\begin{aligned} P(95 \leq X \leq 105) &= P\left(\frac{95-100}{\sqrt{83.3333}} \leq \frac{X-100}{\sqrt{83.3333}} \leq \frac{105-100}{\sqrt{83.3333}}\right) \approx \Phi\left(\frac{105-100}{\sqrt{83.3333}}\right) - \Phi\left(\frac{95-100}{\sqrt{83.3333}}\right) = \\ &= \Phi(0.5477) - \Phi(-0.5477) = 2 \cdot 0.7088 - 1 = 0.4176. \end{aligned}$$

Važne statistike uzorka $(X_1, X_2, \dots, X_n)$

Aritmetička sredina uzorka

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

Uzoračka disperzija (varijansa)

$$\bar{S}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^2 - \bar{X}_n^2$$

Uzoračka korigovana disperzija

$$\bar{S}_n'^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} \bar{S}_n^2$$

Uzoračka (korigovana) standardna devijacija

$$\bar{S}_n = \sqrt{\bar{S}_n^2} \quad \bar{S}_n' = \sqrt{\bar{S}_n'^2}$$

Medijana uzorka

$$Me = \begin{cases} n \text{ parno :} & \text{srednji po veličini,} \\ n \text{ neparno :} & \text{aritmetička sredina dva srednja po veličini.} \end{cases}$$

Modus uzorka

Mo = element(i) koji se najviše puta pojavio u uzorku.

PRIMER 30 Za uzorak $(1, 2, 3, 3, 5)$ izračunati uzoračku sredinu, varijansu, standardnu devijaciju, korigovanu standardnu devijaciju, medijanu i modus.

PRIMER 31 Iz populacije studenata FIMEKa odabrano je 10 muških studenata i izmerena im je visina u centimetrima:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
175.	176.5	168	170.5	172	174.5	184	170.5	177.5	186

Za visinu studenata izračunati aritmetičku sredinu, varijansu, standardnu devijaciju, korigovanu standardnu devijaciju, medijanu.

Intervalni i tabelarni uzorak

PRIMER 32 Iz jednog univerziteta odabrano je 100 muških studenata i anketirani su za visinu u centimetrima. Rezultati su dati u tabeli

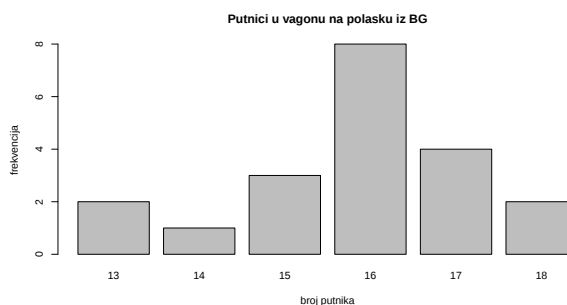
160-170	170-175	175-180	180-185	185-190	190-200
14	30	29	13	8	6

Za visinu studenata izračunati aritmetičku sredinu, varijansu, standardnu devijaciju, korigovanu standardnu devijaciju, medijanu.

Nacrtati histogram i poligon visine studenata univerziteta.

PRIMER 33

A. d. "Srbijavoz" je danima evidentirao broj putnika u vagonu prve klase na polasku iz Beograda za Novi Sad i rezultati su prikazani na stubičastom dijagramu desno.



Rekonstruisati uzorak $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ sa datog dijagrama.

$n = \underline{\hspace{2cm}}$. Uzorak: $\underline{\hspace{10cm}}$

Izračunati srednju vrednost i korigovanu standardnu devijaciju uzorka.

$\bar{x}_n = \underline{\hspace{2cm}}$ $\bar{s}'_n = \underline{\hspace{2cm}}$

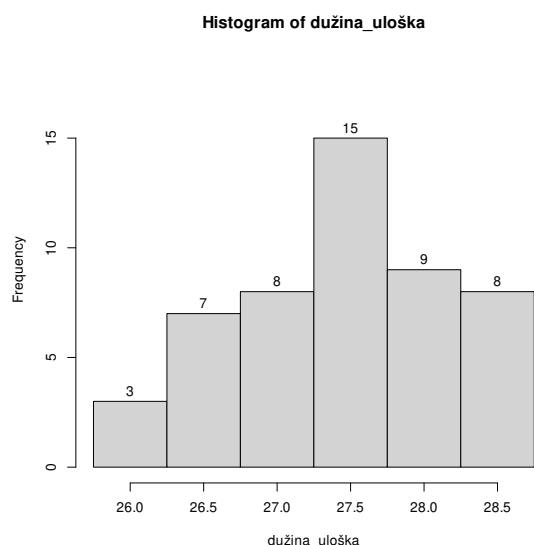
PRIMER 34 Putnici u gradskom autobusu su pitani koliko puta su u poslednjih 7 dana koristili gradski autobus. Odgovori su dati u tabeli:

1-3	4-5	6-7	8	9-13	14-20
13	30	29	7	13	8

Izračunati srednju vrednost, medijanu i korigovanu standardnu devijaciju uzorka.

PRIMER 35 Od izlaska nove serije trkačkih patika prodato je 50 pari sa dužinom uloška predstavljenoj na histogramu desno.

- Rekonstruisati uzorak i izračunati aritmetičku sredinu.
- Izračunati srednje kvadratno odstupanje dužine uloška.
- Naći 95% interval poverenja srednje vrednosti dužine uloška.



veličina	41 1/3	42	42 2/3	43 1/3	44	44 2/3
dužina uloška [cm]	26	26.5	27	27.5	28	28.5
komada	3	7	8	15	9	8

$$\bar{x}_n = (3 \cdot 26 + 7 \cdot 26.5 + \dots + 8 \cdot 28.5) / 50 = 27.44$$

$$\bar{s}_n^2 = 37673.5 / 50 - 27.44^2 = 0.5164 = 0.7186098^2$$

$$n = 50; t = 2.010; \bar{x}_n \pm t \sqrt{\frac{\bar{s}_n^2}{n-1}} = 27.234, 27.646$$

PRIMER 36 Na poslednjoj stanici autobuske linije izvršeno je brojanje putnika koji su izašli i dobijeni su sledeći rezultati.

4; 5; 4; 5; 3; 1; 2; 3; 4; 8; 0; 1; 4

- Izračunati srednju vrednost $\bar{x}_n$ i modus Mo uzorka.
- Izračunati srednje kvadratno odstupanje uzorka.
- Naći 90% interval poverenja za srednju vrednost broja putnika.

- $n = 13$; sortiran uzorak: 0, 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 8;
 $Mo = 4$; $\bar{x}_n = (4 + 5 + \dots + 4) / 13 = 3.384615$.

$$(b) \bar{s}_n^2 = 1/13 \cdot ((4 - 3.384615)^2 + \dots + (4 - 3.384615)^2) = 4.08284 = 2.020604^2.$$

$$(c) n = 13; t = 1.782; \bar{x}_n \pm t \sqrt{\frac{\bar{s}_n^2}{n-1}} = 3.384615 \pm 1.782 \cdot 2.020604 / \sqrt{12} = 2.345178, 4.424052$$

ocena	1	2	3	4	5
broj đaka	5	9	4	5	5

PRIMER 37 Za ocene na pismenom ispitu u slučajnom uzorku đaka petih razreda naći interval poverenja sa pragom značajnosti $1 - \alpha = 0.95$ ako je poznato $\sigma = 1.4$.

PRIMER 38 Merena je masa učenika jedne generacije u školi:

masa [kg]	[60, 61)	[62, 64)	[64, 66)	[66, 68)	[68, 70)
broj učenika	5	18	42	27	8

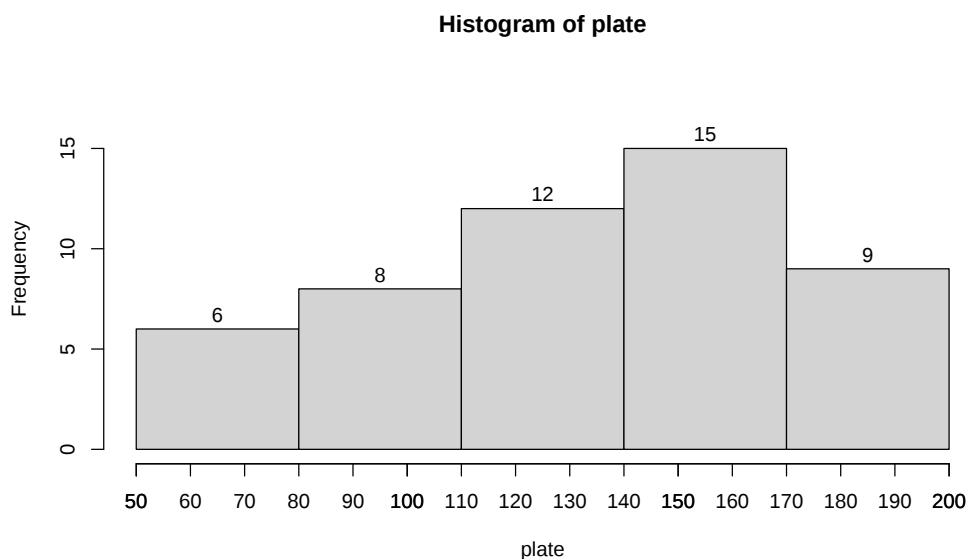
- (a) Nacrtati histogram, poligon i empirijsku funkciju raspodele.
- (b) Odrediti modus i medijanu.
- (c) Izračunati aritmetičku sredinu uzorka i uzoračku disperziju.
- (d) Naći 99% interval poverenja za masu.

PRIMER 39 U tabeli su dati podaci o plati u jednom preduzeću:

plata:	50.000 - 79.999	80.000 - 109.999	110.000 - 139.999
broj isplata:	9	15	12
plata:	140.000 - 169.999	170.000 - 200.000	
broj isplata:	8	6	

- Izračunati srednju vrednost $\bar{x}_n$, modus M_o i medijanu M_e plate.
- Nacrtati histogram plata i na njemu označiti dobijene mere centralne tendencije.
- Izračunati uzoračku varijansu, standardnu devijaciju i koeficijent varijacije.
- Naći 95% interval poverenja za srednju vrednost.

PRIMER 40 Dat je histogram godišnjih plata u jednom preduzeću u hiljadama dolara:



- Rekonstruisati uzorak, izračunati aritmetičku sredinu, Modus i Medijanu.
- Izračunati srednje kvadratno odstupanje i standardnu devijaciju uzorka.
- Naći 95% interval poverenja srednje vrednosti plate.

PRIMER 41 U časopisu 1974 Motor Trend US Magazine su objavljeni podaci testiranja 32 automobila. U tabeli levo su dati podaci:

mpg	cyl	hp
21.0	6	110
21.0	6	110
22.8	4	93
21.4	6	110
18.7	8	175
18.1	6	105
14.3	8	245
24.4	4	62
22.8	4	95
19.2	6	123
17.8	6	123
16.4	8	180
17.3	8	180
15.2	8	180
10.4	8	205
10.4	8	215
14.7	8	230
32.4	4	66
30.4	4	52
33.9	4	65
21.5	4	97
15.5	8	150
15.2	8	150
13.3	8	245
19.2	8	175
27.3	4	66
26.0	4	91
30.4	4	113
15.8	8	264
19.7	6	175
15.0	8	335
21.4	4	109

varijabla	opis
mpg	koliko milja može preći sa galonom goriva
cyl	broj cilindara motora
hp	snaga motora (horse power)

Posmatra se mpg za dva uzorka:

	uzorak
1	automobili sa 4 cilindra
2	ostali automobili

Izračunati srednje vrednosti $\bar{x}_1$ i $\bar{x}_2$ oba uzorka i uzoračke disperzije $\bar{s}_1^2$ i $\bar{s}_2^2$.

Izračunati vrednost statistike $t := \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\bar{s}_1^2}{n_1-1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2-1}}}$.

Testirati hipotezu o jednakosti srednjih vrednosti mpg za uzorke sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rešenje:

br. uzorka	n	$\bar{x}$	$\bar{s}^2$
1	11	26.6636	18.4896
2	21	16.6476	9.4511

$$t = |26.6636 - 16.6476| / \sqrt{18.4896/10 + 9.4511/20} = 6.5737$$

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\left(\frac{\bar{s}_1^2}{n_1-1} + \frac{\bar{s}_2^2}{n_2-1}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1} \left(\frac{\bar{s}_1^2}{n_1-1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1} \left(\frac{\bar{s}_2^2}{n_2-1}\right)^2} = \\ &= \frac{\left(\frac{18.4896}{11-1} + \frac{9.4511}{21-1}\right)^2}{\frac{1}{11-1} \left(\frac{18.4896}{11-1}\right)^2 + \frac{1}{21-1} \left(\frac{9.4511}{21-1}\right)^2} = 15.266. \end{aligned}$$

$$t > t_{1-\alpha} = 2.131 \Rightarrow \text{odbacujemo } H_0.$$

PRIMER 42 Anketirano je 10 osoba za masu u kg pre i posle Uskršnjih praznika:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pre	75.5	72.0	65.5	85.5	92.0	91.2	72.5	62.5	53.0	49.5
posle	76.5	73.2	66.0	86.6	91.5	93.0	72.5	63.5	54.5	49.5

Testirati hipotezu da su se ljudi ugojili tokom praznika.

Rešenje:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
pre – posle	-1.0	-1.2	-0.5	-1.1	0.5	-1.8	0.0	-1.0	-1.5	0.0

$$n = 10, \bar{x}_n = -0.76, \bar{s}_n^2 = 0.4864,$$

$$t = \frac{|\bar{x}_n - 0|}{\sqrt{\bar{s}_n^2}} \sqrt{n-1} = \frac{0.76}{\sqrt{0.4864}} \sqrt{9} = 3.2692 > t_{1-\alpha} = 2.262$$

95% interval poverenja: $0 \notin (-1.2858941, -0.2341059)$.

Odbacujemo $H_0(\mu_1 = \mu_2)$ sa pragom značajnosti $\alpha = 0.05$.

P-vrednost je $\alpha^* = 0.009696 < 0.05$.