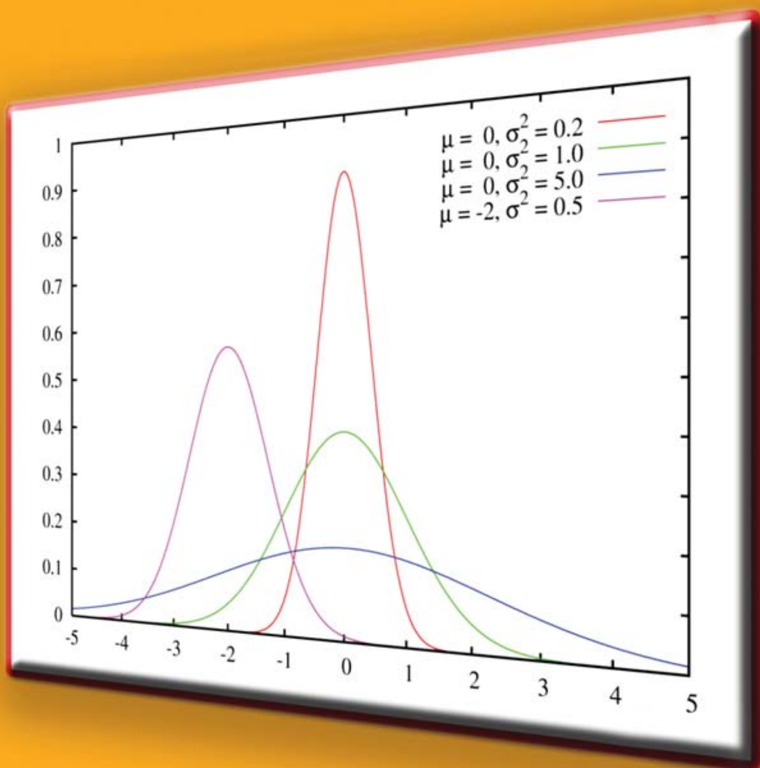
UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kovačević

VEROVATNOĆA I STATISTIKA

sa zbirkom zadataka



BEOGRAD, 2011.

UNIVERZITET SINGIDUNUM

Ivana Kovačević

VEROVATNOĆA I STATISTIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA

Prvo izdanje

Beograd, 2011.

VEROVATNOĆA I STATISTIKA SA ZBIRKOM ZADATAKA

Autor:
Prof. dr Ivana Kovačević

Recenzenti:
Prof. dr Nenad Cakić, Elektrotehnički fakultet, Univerzitet u Beogradu
Mr. Zoran Mišković, Visoka škola elektrotehnike i računarstva, Beograd

Izdavač:
UNIVERZITET SINGIDUNUM
Beograd, Danijelova 32

Za izdavača:
Prof. dr Milovan Stanišić

Tehnički urednik:
Novak Njeguš

Dizajn korica:
Nenad Tolić

Godina izdanja:
2011.

Tiraž:
300 primeraka

Štampa:
Mladost Grup
Loznica

ISBN: 978-86-7912-378-7

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik predstavlja osnovni, jednosemestralni kurs, za studente koji se po prvi put sreću sa verovatnoćom i matematičkom statistikom. Posvećena je studentima informatike i računarstva, pa je udžbenik pisan bez strogih matematičkih dokaza, kako bi se čitaoci upoznali sa osnovnim pojmovima teorije i prakse, prihvatili ih i osposobili se da ih primene u struci.

Beograd, avgust 2011. Autor

SIMBOLI - upotreba grčke azbuke

μ -(mi) oznaka za matematičko očekivanje slučajne promenljive

σ -(sigma) oznaka za standardno odstupanje slučajne promenljive

σ^2 -(sigma) oznaka za disperziju slučajne promenljive

Φ -(fi) oznaka za funkciju raspodele normalne slučajne promenljive

λ -(lambda) oznaka za parametar Poasonove raspodele

ε -(epsilon) oznaka za mali pozitivan broj

Σ -(veliko sigma) oznaka za zbir

SADRŽAJ

UVOD

Teorija verovatnoće je matematička disciplina koja izučava zakonitosti slučajnih pojava.

Prvi problemi koji pripadaju verovatnoći potiču iz 10 i 11 veka i odnose se na rezultate pri bacanju kocke i drugih hazardnih igara. Rađanje teorije verovatnoće vezano je za imena Bleza Paskala (1623-1662), Pjera de Ferma (1601-1665) i Kristijana Hajgensa (1629-1695). Između Paskala i Ferma počela je 1654. godine prepiska o nizu problema, među kojima je bio i zadatak o podeli uloga prilikom prekida kockarske igre. Naime Paskalu se obratio njegov prijatelj kockar sa sledećim problemom: Dva igrača A i B se dogovore da čitav ulog pripadne onom koji prvi dobije tri igre. Kada je igrač A dobio 2 igre, a igrač B jednu morali su da prekinu igru. Postavlja se pitanje kako da podele ulog? Paskal je odgovorio 3:1. Ovaj zanimljivi primer se često uzima kao početak nastanka verovatnoće.

Prvu knjigu iz verovatnoće " *O računu u hazardnim igrama*" napisao je Hajgens 1657g. i istakao je da je knjiga manje o hazardnim igrama, a više o osnovama jedne nove teorije. U njoj Hajgens po prvi put spominje pojmove kao što su matematičko očekivanje, slučajne promenljive i sl.

Period formiranja verovatnoće kao nauke započinje pojavom knjige švajcarskog matematičara Jakoba Bernulija (1654-1705) "*Veština predviđanja*". U ovoj knjizi je strogo definisana prva granična teorema, ***zakon velikih brojeva***, koja se danas naziva i Bernulijeva teorema. Ona utvrđuje da je verovatnoća većih odstupanja frekvencije $\frac{m}{n}$ od verovatnoće p mala, ako je samo n dovoljno veliko. Eksperimenti koji se bave bacanjem novčića potvrdli su Bernulijevu teoremu. Bufon je bacio novčić 4040 puta i 2060 puta je dobio grb. Pirson je 12 000 puta bacio novčić i dobio 6019 puta grb, a kada ga je bacio 24 000 puta dobio je 12 012 puta. Frekvencije pojave grba u ovim eksperimentima su 0,5100, 0,5016 i 0,5005.

Početak 18 veka obeležen je radovima Abrahama de Muavra (1667-1754). U radu "*Učenje o slučajevima*" on razmatra niz pitanja koja su vezana za Bernulijevu teoremu. Razmatrao je pitanje, sa kakvim verovatnoćama odstupanja frkvencije $\frac{m}{n}$ od verovatnoće p mogu da uzmu različite vrednosti.

Pjer Laplas (1749-1827) proširio je Muavrovu teoremu. U knjizi ”*Analitička teorija verovatnoća*” definiše pravilo koje se smatra klasičnom definicijom verovatnoće. Sumirajući svoje radove i radove svojih predhodnika produbio je matematičke i filozofske probleme vezane za verovatnoću.

Nemački matematičar Karl Gaus (1777-1855) daje normalni zakon raspodele slučajnih grešaka, zatim ocenu parametara normalne raspodele, metod najmanjih kvadrata i sl. Njegovi rezultati iz teorije grešaka i sada se, bez izmena, nalaze u matematičkim udžbenicima.

Svakako treba spomenuti i mnoge druge matematičare koji su se bavili ovom oblašću i ostavili veliki doprinos i to: T. Bajes (1702-1763), L. Ojler (1707-1788), Puason (1781-1840) i dr.

U drugoj polovini 19 veka u Zapadnoj Evropi dolazi do zastoja u razvoju teorije verovatnoće. Međutim, u Rusiji mnogi veliki matematičari ozbilnjo se bave ovom disciplinom i to prvo Bunjakovski i Ostrogradski, a pod nihovim uticajem Pafnuti Čebišev (1821-1894) koji je uneo nove ideje u teoriju verovatnoće. Njegovi najznačajniji sledbenici su bili Andrej Markov (1856-1922) i Aleksandar Ljapunov (1858-1918). Za ime Markova vezani su ”lanci Markova”, to jest nizovi slučajnih promenljivih povezanih tako da verovatnoća realizacije jednog eksperimenta uzima određenu vrednost ako je poznat rezultat predhodnog eksperimenta. Poseban doprinos dao je Ljapunov. Definisao je teoremu koja je dobila naziv ”centralna granična teorema”. Zahvaljujući uspehu ruskih matematičara postepeno se tokom 20 veka povratio interes za verovatnoću u Evropi i Americi.

Primene verovatnoće postavile su zahtev za preciziranjem njene logičke osnove, odnosno definisanjem aksiomatskog metoda koji je već bio uveden u mnoge druge matematičke discipline. Prvu aksiomatiku verovatnoće dao je Berštajn 1917.godine, a zatim ju je proširio Andrej Kolmogorov 1933. godine.

I danas su mnogima najinteresantniji kockarski aspekti primene teorije verovatnoće. Povremeno se čuje kako je neki ’genijalan matematičar’ doveo kazino na rub propasti, jer je našao sistem koji sigurno dobija.

Mnogo značajnije od kockarskih problema je to da je verovatnoća danas sastavni deo nauke i tehnike. Sa verovatnoćom kao matematičkim modelom, praktični problemi transformišu se u teorijske i tako će jednostavnije i lakše rešavaju.

Zapravo, veliki interes za verovatnoću i statistiku počeo je posle drugog svetskog rata. Naučni interes usmeren je u više pravaca. Jedni produbljuju klasične granične teoreme, drugi se posvećuju primenama u različitim oblastima, treći razrađuju nove oblasti. Jedna izuzetno značajna nova oblast je teorija *slučajnih procesa* koju je zasnovao Kolmogorov. Od posebnog praktičnog značaja su *procesi Markova* koji se primenjuju u problemima masovnog opsluživanja (telefonija, saobraćaj, trgovina). Metodi simulacije (Monte Karlo metodi) koristeći se računarima, koriste se u najrazličitijim oblastima. Zahvaljujući razvoju teorije verovatnoće nastale su i nove matematičke discipline:

- teorija masovnog opsluživanja,
- teorija informacija,
- teorija pouzdanosti tehničkih sistema,
- teorija zaliha.

Ostaje nerazjašnjena dilema da li su zakoni prirode deterministički, ili mi vidimo slučajnost samo zato što ne umemo da proučimo brojne uzročno posledične veze, ili ona stvarno postoji u prirodi. Laplas zastupa strogi determinizam i smatra da poznavanje parametara koji definišu stanje kosmosa omogućio bi tačno predviđanje rezultata svakog slučajnog eksperimenta. Događaji bi se delili samo na nemoguće i sigurne. Međutim, jedno je sigurno, da slučajne pojave postoje, imaju svoje zakonitosti i njima se bavi teorija verovatnoće.

Reč ***statistika*** potiče od latinske reči *status* , tako da bi statistika bila opisivanje stanja.

U 17-om veku su se pojavile dve velike statističke škole, nemačka i engleska.

Po nemačkoj školi zadatak statistike je sistematizacija podataka o stanovništvu i privredi u cilju vođenja državne politike, bez naglaska na otkrivanje zakonitosti. Zadatak statistike se uglavnom zasnivao na opisu, pa je kasnije ovaj pravac nazvan još i deskriptivna škola ili državopis.

Engleska škola istakla je zahtev za matematičkom obradom statističkih podataka i za otkrivanjem zakonitosti u ponašanju posmatranih pojava što je doprinelo bržem razvoju savremene statistike. Postigli su značajne rezultate u istraživanju odnosa demografskih, socioloških i ekonomskih pojava.

Matematička statistika kao naučna disciplina je počela da se razvija tek nedavno. Tek početkom 20 veka pojavile su se prve tačne formulacije osnova matematičke statistike. Savremena statistička metodologija vezana je za imena amerikanaca Nejmana i Volda. Zahvaljujući njihovim radovima razvile su se tri oblasti:

- teorija estimacije (ocene),
- teorija provere (verifikacije) statističih hipoteza,
- teorija planiranja eksperimenta.

Teorija estimacije se sastoji u konstruisanju metoda za ocenu vrednosti jednog ili više parametara zakona raspodele verovatnoća slučajnih promenljivih. Njen tvorac je Nejman.

Osnovni zadatak teorija provere (verifikacije) statističkih hipoteza je u određivanju pravila ili kriterijuma na osnovu kog se pomoću eksperimentalnih vrednosti slučajnih promenljivih može rešiti, da li prihvatiti ili odbaciti predloženu hipotezu.

Treća, najmlađa oblast statistike je teorija planiranja eksperimenta. Praksa je pokazala da bitnu ulogu u primeni statistike igra sama šema eksperimenta, jer u zavisnosti od nje može da se dobije nepotpuna ili potpunija i kvalitetnija informacija. Unapred je utvrđen broj posmatranja na osnovu kojih se izvode statistički zaključci. Nova metoda koju je zasnovao A. Vold, takozvana sekvencijalana metoda , odlikuje se time što broj posmatranja nije stalna veličina, unapred zadata, nego je slučajnog karaktera.

Matematička statistika je savremeno oruđe inženjera, ekonomista, lekara, biologa i drugih. Na početku veka na prste jedne ruke mogle su se nabrojati oblasti ljudskog istraživanja koje su koristile teoriju verovatnoće i matematičku statistiku. U naše vreme situacija je potpuno obrnuta.

Statistika je svuda oko nas, na primer, bez nje se ne može predstaviti novi proizvod jer se za njega traži procena uspešnosti. Pomoću statistike pokazuje se otprilike koji mesec ili nedelja su bili najproduktivniji i po tim podacima se odlučuje u kom pravcu dalje raditi.

Statistika je korisna u predviđanju budućnosti, jer nema boljeg načina da se odredi koliko vremena, resursa, napora, novca i sl. treba upotrebiti da bi se realizovao neki projekat. Pošto se to ne može tačno unapred predvideti, na osnovu iskustava, prakse, odnosno koristeći statističke metode donose se zaključci.

U teoriji verovatnoće izučavaju se matematički modeli stvarnih pojava, dok se u statistici, metodom slučajnog uzorka, uspostavlja veza između stvarnih pojava i odgovarajućih modela. Statistika je bliža realnosti od verovatnoće.

Čebišev je u polu šaljivoj formi istoriju matematike podelio na tri perioda:

- u prvom su zadatke postavljali bogovi (delfski problem udvajanja kocke, kvadratura kruga, trisekcija ugla i td.),
- u drugom su zadatke postavljali polubogovi (Paskal, Ferma i dr),
- u trećem zadatke postavljalja praksa.

1. VEROVATNOĆA

Neke od pojava koje se događaju oko nas možemo da predvidimo, objasnimo i kontrolišemo pošto poznajemo zakonitosti njihovog nastanka. Tako na primer, možemo da predvidimo pomračenje sunca i meseca, pojavu plime i oseke, elektriciteta i sl.

Nasuprot tome postoje pojave čije uzroke nismo u stanju da odredimo, pa takve pojave ne možemo u potpunosti da predvidimo i objasnimo. Tu spadaju na primer, meterološke pojave, pojava zemljotresa, ali i dobitak na lutriji, sportskoj prognozi i sl. To su pojave, događaji, koji se ne moraju nužno dogoditi, ali nisu ni nemogući. Takve i slične događaje proučava teorija verovatnoće.

Da bismo bolje objasnili čime se bavi teorija verovatnoće posmatrajmo sledeći primer.

Prilikom bacanja novčića može da padne pismo ili grb i obe mogućnosti su jednako verovatne. Ako novčić bacamo više puta onda očekujemo da se broj grbova neće mnogo razlikovati od broja pisama. Kod malog broja bacanja to ne mora da se dogodi, ali pri velikom broju bacanja to će u velikoj meri biti ispunjeno. Izvršeni su sledeći eksperimenti: Bufon je bacio novčić 4040 puta i 2060 puta je dobio grb, Pirson je 12 000 puta bacio novčić i dobio 6019 puta grb, a kada ga je bacio 24 000 puta dobio ga je 12 012 puta. Frekvencije pojave grba u ovim eksperimentima su 0,5100; 0,5016 i 0,5005. Vidimo da veliki broj ponavljanja eksperimenta izražava neku zakonitost u pogledu broja grbova.

Kod ovog i sličnih primera možemo uočiti da pri pojedinačnim posmatranjima događaji se realizuju bez ikakvog reda, po čistoj slučajnosti, bez mogućnosti predviđanja. Tako, kada bacamo dinar mi ne znamo da li će pasti pismo ili glava. Ali pri velikom broju ponavljanja uočene pojave, možemo da uočimo neke zakonitosti. Takvim zakonitostima se bavi teorija verovatnoće. Ove zakonitosti su drugačijeg tipa od onih na koje smo navikli, je se one uočavaju tek pri velikom broju ponavljanja uočene pojave, odnosno ponavljanja eksperimenta.

Osnovna dilema sa kojom se sreću matematičari i filozofi nauke, je da li su zakoni prirode suštinski deterministički, i pri čemu se slučajnost javlja samo kao nemogućnost poznavanja realnosti, odnosno brojnih uzročno-posledičnih veza u realnosti, ili slučajnost objektivno postoji kao suprotnost determinisanosti.

1.1. SLUČAJNI EKSPERIMENTI I SLUČAJNI DOGAĐAJI

Eksperimentima se u nauci prikupljaju podaci koji se zatim obrađuju i dobijeni rezultati koriste u praksi ili za dokazivanje novih teorija. Međutim, kod nekih eksperimenata nismo u mogućnosti da tačno odredimo i kontrolišemo vrednosti dobijenih rezultata, odnosno ti rezultati ne mogu pouzdano da se predvide.

Takvi eksperimenti su predmet izučavanja verovatnoće i nazivaju se ***slučajni eksperimenti.***

Primer:
Bacamo novčić. Ovaj eksperiment možemo ponavljati proizvoljno mnogo puta, a mogući ishodi ovog su 'grb' i 'pismo'.

Primer:
Rezultat eksperimenta koji se sastoji u bacanju kocke su brojne vrednosti koje pripadaju sledećem skupu $\{1,2,3,4,5,6\}$.

Teorija verovatnoće za svoja istraživanja koristi ***idealni eksperiment*** koji može da se,

- ponavlja proizvoljan broj puta pod istim uslovima,
- svi njegovi ishodi su unapred definisani,
- ishod pojedinog eksperimenta nije unapred poznat.

Slučajni eksperimenti nazivaju se još i ***statistički*** ili ***stohastički eksperimeni.***

Ishod slučajnog eksperimenta je ***slučajan događaj***.

Primer:
Pol deteta ili pojava grba pri bacanju novčića su slučajni događaji.

Slučajni događaji mogu da budu ***elementarni,*** koji ne mogu da se redukuju na jednostavnije i ***složeni*** koji mogu da se dalje redukuju na elementarne događaje.

Kao polazna osnova za proučavanje slučajnih događaja je određivanje ***skupa (prostora) elementarnih događaja***.

- Svaki mogući ishod eksperimenta naziva se ***elementaran događaj*** i obeležava sa ω.
- ***Skup svih elementarnih događaja***, odnosno skup ***svih ishoda eksperimenta*** zove se i ***prostor elementarnih događaja,*** a obeležava se sa $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.
- Svaki podskup skupa Ω naziva se ***događaj***. Događaji se obeležavaju velikim slovima A,B,C...
- Događaj koji se pojavljuje prilikom svake realizacije eksperimenta je ***sigurnan događaj***. Skup svih elementarnih događaja je ***siguran događaj*** .
- Događaj koji se nikada ne može pojaviti pri realizaciji eksperimenta zove se ***nemoguć događaj***.
- ***Nemoguć*** događaj se obeležava kao prazan skup $\varnothing$.
- Ako su $A_1, A_2, \ldots, A_n$ slučajni događaji takvi da je $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ i da se svaka dva događaja isključuju, tj. $A_i A_j = \varnothing; \quad i, j \in [1, n]$, tada ovi događaji čine ***potpuni sistem događaja.***

Primer:
U eksperimentu bacanja jednog novčića ishodi su G i P (glava ili pismo). Dakle $\Omega = \{G, P\}$.

Primer:
U eksperimentu bacanja kocke ishodi su 1,2,3,4,5,6. Dakle $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Događaj da padne paran broj ima ishode $A = \{2, 4, 6\}$.

Primer:
Događaj da kada bacamo kocku za igru padne bilo koji broj od jedan do šest je siguran događaj, a da padne broj 7, je nemoguć događaj.

1.2. ALGEBRA DOGAĐAJA

Pošto se događaji definišu kao podskupovi skupa elementarnih događaja Ω, moguće je veze između događaja izraziti pomoću odgovarajućih skupovnih realcija i operacija.

Ako su A i B događaji, tada:

- događaj A ili B označavamo sa $A \bigcup B = A + B$,
- događaj A i B označavamo sa $A \bigcap B = AB$,
- događaj A ali ne B označavamo sa $A \setminus B$,
- suprotan događaj događaju A obeležavamo sa A' ili $\overline{A}$, gde se komplement posmatra u odnosu na Ω.
- Ako događaj A povlači (implicira) događaj B, tada kažemo da je $A \subset B$.
- Ako za događaje A i B važi da je $A \subset B$ i $B \subset A$, tada kažemo da su događaji A i B jednaki i pišemo $A = B$.

Primer:
Događaj A da se na gornjoj strani kocke pojavi broj pet, odnosno događaj B da se pojavi paran broj, su događaji koji se isključuju, odnosno disjunktni su.
Primer:
Zbir događaja A, koji se sastoji da se na kocki pojavi broj veći od tri ili događaja B, koji se sastoji u pojavi parnog broja, je događaj koji se sastoji u pojavi brojeva 2,4,5 ili 6, odnosno

$$A \bigcup B = \{4,5,6\} \bigcup \{2,4,6\} = \{2,4,5,6\}$$

Primer:
Proizvod događaja koji se sastoji u pojavi parnog broja na gornjoj strani kocke i događaja da se pojavi broj veći od tri je $\{2,4,6\} \bigcap \{4,5,6\} = \{4,6\}$.

1.3. AKSIOME TEORIJE VEROVATNOĆE

Osnovni zadatak teorije verovatnoće jeste određivanje metoda i pravila za izračunavanje verovatnoća slučajnih događaja. Teorija verovatnoće je strogo matematički formalizovana i zasniva se na aksiomama i teoremama koje proističu iz njih.

1.3.1. AKSIOME

Ako je Ω skup svih elementarnih događaja i neka su događaji $A, B \subset \Omega$. Funkcija P naziva se ***verovatnoćom*** na skupu Ω, ako važe sledeće aksiome:

1. $P(\Omega) = 1$,
2. $0 \le P(A) \le 1$,
3. Ako se događaji A i B međusobno isključuju onda važi
   $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Uopšteno možemo reći da je $P(A) = \sum_i P(A_i)$, ako se događaj A razlaže na n konačnih ili prebrojivo mnogo događaja koji se međusobno isključuju.

Verovatnoća je dakle funkcija, preslikavanje, oblika, $P : \textit{skup događaja} \to [0,1]$.

Drugim rečima, ova funkcija događaje iz skupa svih događaja preslikava u interval $[0,1]$ realne ose.

Napomena*:* Oznaka P za verovatnoću potiče od početnog slova latinske reči *probalilitas,* sto znači verovatnoća.

1.3.2. VAŽNE TEOREME

Teorema: Ako događaji A_i čine potpuni sistem, odnosno važi $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, onda je

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1.$$

Dokaz:

Dokaz direktno sledi iz aksiome 3

Teorema: Verovatnoća događaja $\overline{A}$ koji je suprotan (komplementaran) događaju A iznosi

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Dokaz:

Kako je $A+\overline{A}=\Omega$, pri čemu se događaji A i $\overline{A}$ isključuju, a $P(\Omega)=1$, dobijamo da je $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=P(\Omega)=1$, odakle sledi $P(\overline{A})=1-P(A)$.

Teorema: Verovatnoća nemogućeg događaja je 0.

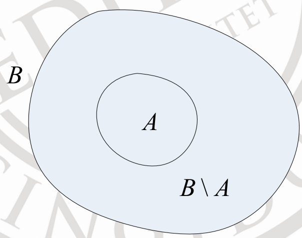
Dokaz:

Kako je $\overline{\Omega}=\varnothing$, na osnovu predhodne teoreme sledi $P(\varnothing)=1-P(\Omega)=1-1=0$.

Teorema: Ako je $A\subseteq B$, onda je $P(A)\leq P(B)$.

Dokaz:

Ako je $A\subseteq B$, onda je $B=A\bigcup(B\setminus A)$, odnosno pošto se događaji A i $B\setminus A$ isključuju $P(B)=P(A)+P(B\setminus A)$, odakle sledi $P(B\setminus A)=P(B)-P(A)\geq 0$, čime je teorema dokazana.



1.4. STATISTIČKA DEFINICIJA VEROVATNOĆE

Verovatnoća slučajnog događaja je numerička mera objektivne mogućnosti ostvarivanja tog događaja. Do pojma verovatnoće može se doći i iskustveno (empirijski) korišćenjem pojma relativne frekvence.

Pretpostavimo da se eksperiment u kome se može realizovati događaj A ponavlja n puta. Neka je broj m broj povoljnih realizacija događaja A u n ponavljanja eksperimenta.

Broj $r = \dfrac{m}{n}$ predstavlja ***relativnu učestalost (frekvencu)*** pojave događaja A u n ponavljanja eksperimenta. U nekoj drugoj seriji od n ponavljanja istog eksperimenta dobićece se m_1 realizacija događaja i neki drugi broj koji predstavlja frekvenciju $r_1 = \dfrac{m_1}{n}$.

Ako bi nastavili sa ponavljanjem eksperimenta dobili bi niz različitih vrednosti koje se u velikim serijama, kada je broj ponavljanja eksperimenta neograničeno veliki, grupišu oko nekog broja $P(A)$ koji nazivamo i ***statistička definicija verovatnoće***

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}.$$

Primer:
Izvršene su 3 serije bacanja kocke od 600, 6 000, 60 000 puta. Broj 2 se u tim bacanjima pojavio 106, 982, 10 190 puta, tako da relativne frekvence iznose 0,18; 0,164; 0,170.

Ove relativne frekvence pojavljivanja broja 2 grupišu se oko broja $\dfrac{1}{6} = 0{,}166\ldots$
Naravno i intuitivno je jasno da će se svaki broj sa kocke pojaviti podjednak broj puta.

Ova definicija ukazuje na tesnu povezanost sa realnošću, ali nedostatak joj je zato što granični proces kojim je data definicija nije jasno definisan. I pored svih nedostataka ova definicija omogućava da se definiše verovatnoća na konačnom skupu elementarnih događaja.

1.5. KLASIČNA DEFNICIJA VEROVATNOĆE

Klasičnu definiciju verovatnoće dao je markiz P. Laplas (1749-1827), francuski matematičar i astronom.

Definicija se odnosi samo na one slučajne eksperimente kod kojih je skup elementarnih događaja konačan, a događaji su jednako verovatni.

Tipičan ovakav eksperiment je bacanje novčića. Skup elementarnih događaja je dvočlani skup {glava, pismo}, a oba događaja su jednako verovatna, jer kada bacamo novčić obe opcije su ravnopravne.

Definicija:

Neka skup Ω sadrži n elementarnih događaja koji su disjunktni i jednako mogući. Ako je $m\,(0 \le m \le n)$, broj svih povoljnih ishoda događaja A, onda je verovatnoća $P(A)$ jednaka

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

Primer:
Kolika je verovatnoća događaja A da prilikom bacanja novčića padne glava?
$P(A) = \frac{1}{2}.$

Primer:
Kolika je verovatnoća događaja A da prilikom bacanja kocke za igru pojavi se paran broj?
$P(A) = \frac{3}{6}.$

Klasična definicija verovatnoće se naziva i definicija ***apriori.*** Primenljiva je kao što smo već naglasili samo u slučaju kada je Ω konačan skup, a svi ishodi imaju jednaku verovatnoću. Jednakost verovatnoća pojavljuje se samo u malom broju slučajeva, kao što su primeri bacanja novčića ili kocke. To najčešće nije slučaj u primenama, statistici, biologiji, ekonomiji i sl. Nema smisla očekivati jednakost verovatnoća. Čak ni rađenje dečaka i devojčice nisu dva jednako verovatna događaja. Ipak i pored svojih nedostataka ova definicija je imala izuzetan značaj jer je dovela do nastanka drugih, preciznijih definicija verovatnoće.

Napomena: U eksperimentima čiji su ishodi jednako verovatni, ishode je potrebno prebrojati, pa se u ovim zadacima koristi kombinatorika.Podsetimo se nekih osnovnih pojmova i obrazaca.

Neka je dat skup $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Broj ***permutacija*** skupa od n elemenata, bez ponavljanja, iznosi

$$P(n) = n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

Broj ***permutacija sa ponavljanjem,*** skupa od n elemenata, među kojima ima $k_1, k_2, \ldots, k_m$ jednakih iznosi $P_{k_1, k_2, \ldots k_m}(n) = \dfrac{n!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}$.

Varijacijak klase od n elemenata je bilo koja k -torka različitih elemenata skupa A.

Broj varijacija iznosi $V_k^n = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Varijacija sa ponavljanem k klase od n elemenata je bilo koja k -torka elemenata skupa A.

Broj varijacija iznosi $\overline{V}_k^n = n^k$.

Kombijacija klase od k elemenata je bilo koja k -torka različitih elemenata skupa A, bez obzira na redosled elemenata.

Broj kombinacija iznosi $C_k^n = \dfrac{V_k^n}{k!} = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Izraz $\dbinom{n}{k}$ čita se **'*n nad*'**.

Kombijacija sa ponavljenjem k klase od n elemenata je bilo koja k -torka elemenata skupa A

Broj kombinacija iznosi $\overline{C}_k^n = \dbinom{n+k-1}{k}$.

Primer:

Od 10 istovetnih proizvoda jedne fabrike 7 je ispravnih, a ostali su neispravni. Nasumice se bira 5 proizvoda. Kolika je verovatnoća da će među izvučenim proizvodima biti 3 ispravna?

$$P(A) = \frac{C_3^7 C_2^3}{C_5^{10}} = \frac{\dbinom{7}{3}\dbinom{3}{2}}{\dbinom{10}{5}} = \frac{105}{252}.$$

Primer:

Kocka se baca 3 puta. Kolika je verovatnoća da se bar jednom pojavi broj 6?

Izračunaćemo prvo verovatnoću suprotnog događaja, da se ne pojavi broj 6.

$$P(\overline{A}) = \frac{\overline{V}_3^5}{\overline{V}_3^6} = \frac{5^3}{6^3} = \frac{125}{216}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

1.6. VEROVATNOĆA ZBIRA DOGAĐAJA

Definicija

Neka je dat skup Ω i događaji $A, B \subset \Omega$. Ako se događaji međusobno isključuju, tj. $A \cap B = \varnothing$, onda je verovatnoća zbira događaja

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

- Za konačno mnogo događaja važi formula

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Primer:

U kutiji se nalazi 100 cedulja na kojima su ispisani prirodni brojevi od 1 do 100. Izvlačimo jednu cedulju. Kolika je verovatnoća da je broj koji smo izvukli deljiv sa 2 ili deljiv sa 15 ili deljiv sa 29?

Ako sa A, B, C označimo ove događaje, onda je njihova verovatnoća

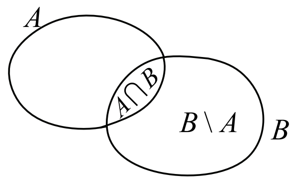
$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{50}{100} + \frac{6}{100} + \frac{3}{100} = \frac{59}{100}.$$

Teorema: Ako se događaji A i B međusobno ne isključuju, tj. $A \cap B \neq \varnothing$, onda je verovatnoća zbira događaja

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Dokaz:

Događaj $A+B$ može se prikazati kao zbir događaja A i $B \setminus (A \cap B)$, pri čemu se ovi događaji isključuju.



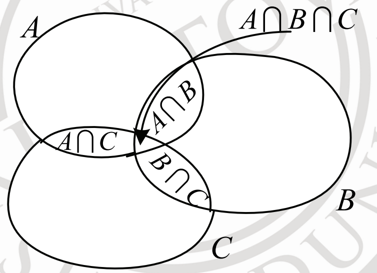
Zato je

$$P(A+B)=P(A)+P(B\setminus AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Na osnovu ove formule mogu se izvesti i formule za zbir više od dva događaja koji se ne isključuju.

Za tri događaja imamo formulu:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$



Primer:

Bacamo kocku. Kolika je verovatnoća da dobijemo broj koji je deljiv sa 2 ili sa 3?

Neka je A događaj da je dobijeni broj deljiv sa 2, a B događaj da je deljiv sa 3. Događaji A i B se ne isključuju, jer postoji broj 6 koji je deljiv i sa 2 i sa 3.

Kako je $P(A)=\frac{3}{6}$, $P(B)=\frac{2}{6}$, $P(AB)=\frac{1}{6}$, dobijamo

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

VAŽNI OBRASCI

Klasična definicija verovatnoće

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Verovatnoća zbira događaja koji se isključuju

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

Verovatnoća zbira događaja koji se ne isključuju

$$P(A+B)=P(A)+P(B\setminus AB)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

1.8. ZADACI

1. Odrediti suprotne događaje događajima:

A- pojava dva grba pri bacanju 2 dinara,
B- pojava bele kuglice prilikom izvlačenja jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 2 bele, 3 crne i 4 crvene kuglice,
C- tri pogotka u tri gađanja,
D- makar jedan pogodak u pet gađanja,
E- ne više od dva pogotka u pet gađanja.

Rešenje:

$\overline{A}$ - pojava bar jednog pisma,
$\overline{B}$ - pojava crne ili crvene,
$\overline{C}$ - bar jedan promašaj,
$\overline{D}$ - svih pet promašaja,
$\overline{E}$ - više od dva pogotka.

2. U prodavnici se nalaze sijalice iz dve fabrike. Događaj da je slučajno izabrana sijalica iz prve fabrike obeležimo sa A, a da je dobrog kvalteta sa B. Šta znače sledeći događaji: $\overline{A},\ A+\overline{A},\ A\overline{A},\ AB,\ A+B,\ A\overline{B},\ \ \overline{A}B$?

Rešenje:

$\overline{A}$ - je događaj da je sijalica iz druge fabrike,

$A+\overline{A}$ - je događaj da je sijalica iz prve ili druge fabrike,

$A\overline{A}$ - događaj je nemoguć,

AB - da je iz prve fabrike i da je dobra,

$A+B$ - ili da je iz prve fabrike ili da je dobra,

$A\overline{B}$ - da je iz prve fabrike i da nije dobra,

$\overline{A}B$ - da je iz druge fabrike i da je dobra.

3. Meta se gađa sa tri metka. Neka je $A_i, \quad i=1,2,3$ događaj pogotka mete iz i-tog gađanja.

Predstaviti sledeće događaje:

A - sva tri pogotka,

B - sva tri promašaja,

C - makar jedan pogodak,

D - ne manje od dva pogotka,

E - ne više od jednog pogotka.

Rešenje:

$A = A_1A_2A_3$,

$B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$,

$C = A_1 + A_2 + A_3$,

$D = \overline{A}_1A_2A_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + A_1A_2\overline{A}_3 + A_1A_2A_3$

$E = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.

4. Navesti skup svih događaja za sledeće eksperimente

A – bacanje jednog dinara,

B – bacanje dva dinara,

C – bacanje kocke i dinara,

D – bacanje dve kocke,

E - bacanje tri kocke.

Rešenje:

$\Omega = \{G, P\}$,

$\Omega = \{GG, PP, GP, PG\}$,

$\Omega = \{G1, G2, G3, G4, G5, G6, P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$

Eksperiment bacanja dve kocke ima $6^2 = 36$ elementarnih događaja:

11,12,13,14,15,16,
21,22,23,24,25,26,
31,32,33,34,35,36,
41,42,43,44,45,46,
51,52,53,54,55,56,
61,62,63,64,65,66,

Eksperiment bacanja tri kocke ima $6^3 = 216$ elementarnih događaja.

5. Ako je A događaj da dve kocke pri istovremenom bacanju pokažu brojeve čiji je zbir paran broj, a B događaj da pokažu brojeve čiji je proizvod paran broj, naći zbir A+B?

Rešenje:

$$A + B = \Omega$$

6. U poslednjih 10 godina beležen je broj padavina i temperatura u martu mesecu u Beogradu i dobijeni su sledeći podaci:

događaj A-105 dana je bilo je sa padavinama,
događaj B-135 dana je bilo hladno i
53 dana je bilo hladno sa padavinama.

Odrediti verovatnoće

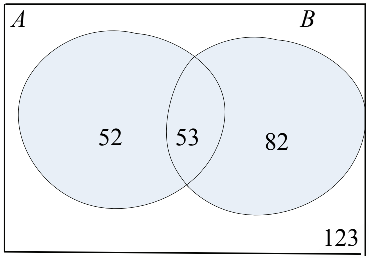
$$P(A), P(B), P(AB), P(A+B), P(\overline{A}B), P(A/B), P(\overline{A}\overline{B})$$

Rešenje:

Kako mesec mart ima 31 dan, ukupno je posmatrano 310 dana.

$$P(A) = \frac{105}{310},\ P(B) = \frac{135}{310},\ P(AB) = \frac{53}{310},$$

Iskoristimo Venove dijagrame da prikažemo događaje



dan sa padavinama ili hladan $P\left(A+B\right)=\dfrac{187}{310}$

dan bez padavina i hladan $P\left(\overline{A}B\right)=\dfrac{82}{310}$

dan sa padavinama i nije hladan $P\left(A/B\right)=\dfrac{52}{310}$

dan bez padavina i nije hladan $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=P\left(\overline{A+B}\right)=\dfrac{123}{310}$

7. U jednoj prodavnici tokom 10 dana prodavan je isti proizvod i to:

dani	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Br. proizv.	42	16	11	10	8	8	12	23	56	300

Odrediti verovatnoću prodaje drugog dana i od trećeg do sedmog dana.

Rešenje:

$$P\left(A\right)=\frac{16}{300}=0{,}533$$

$$P\left(B\right)=\frac{11+10+8+8+12}{300}=0{,}163$$

8. U posudi se nalazi 12 belih, 13 crvenih i 14 plavih kuglica. Kolika je verovatnoća da izvučemo plavu kuglicu pod uslovom da su sve mogućnosti jednako verovatne?

Rešenje:

$$P(A)=\frac{14}{39}$$

9. Ako se kocka za igru baci jednom, kolika je verovatnoća pojave a) parnog broja b) pojave broja tačaka koji je manji od 5.

Rešenje:

a) Neka je A događaj da padne paran broj. U tom slučaju je $A=A_2\bigcup A_4\bigcup A_6$ i

$$P(A)=P(A_2)+P(A_4)+P(A_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}.$$

b) Događaj da se pojavi broj tačaka koji je manji od 5 je suprotan događaju da je broj tačaka veći ili jednak 5.

$$P(B)=1-\left(P(A_5)+P(A_6)\right)=1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{3}.$$

10. Na osam listića napisani su brojevi 2,4,6,7,8,11,12,13. Na slučajan način biraju se dva listića. Odrediti verovatnoću da se razlomak dobijen od ovih brojeva može skratiti.

Rešenje:

$$P(A)=\frac{C_2^5}{C_2^8}=\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}=\frac{5}{14}.$$

11. Deset kartica numerisano je brojevima od 1 do 10. Izvlače se dve kartice istovremeno. Naći verovatnoću da je zbir brojeva na izvučenim karticama jednak 10.

Rešenje:

$$P(A)=\frac{4}{\binom{10}{2}}=\frac{4}{45}.$$

12. U kutiji se nalazi 8 crvenih i 6 plavih kuglica. Nasumice izvlačimo 2 kuglice. Kolika je verovatnoća da će:

a) izvučene kuglice biti različitih boja
b) da će obe kuglice biti crvene
c) da će obe kuglice biti plave

Rešenje:

a) $P(A) = \frac{6 \cdot 8}{\binom{14}{2}} = \frac{48}{45}$, **b)** $P(B) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{28}{91}$, **c)** $P(C) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{15}{91}$.

Ovi događaji čine potpuni sistem i $P(A) + P(B) + P(C) = \frac{48 + 28 + 15}{91} = 1$.

13. U kutiji se nalazi 8 crvenih i 6 plavih kuglica. Nasumice izvlačimo 5 kuglica. Kolika je verovatnoća da će među njima biti tačno 3 plave?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{8}{2}}{\binom{14}{5}} = \frac{20 \cdot 28}{2002} = \frac{560}{2002}.$$

14. Kolika je verovatnoća da ćemo izvlačenjem 5 brojeva na lutriji od 50 brojeva izvući brojeve 7,13,33?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{\binom{47}{2}}{\binom{50}{5}} = \frac{1}{1960}.$$

Povoljan je svaki dodađaj da izvučemo 7,13,33 pa je ostalo da od preostalih 50-3=47 cedulja izvučemo 2.

15. U seriji od 5 sijalica jedna je neispravna. Kolika je verovatnoća da između 3 nasumično izabrane sijalice

a) bude neispravna sijalica

b) ne bude neispravna.

Rešenje:

a) $P(A)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{3}}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}.$

Ako je jedna neispravna onda od preostale 4 treba birati 2.

b) $P(\overline{A})=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}.$

16. U jednoj seriji od 10 istovetnih sijalica nalazi se jedna neispravna. Nasumice se biraju 3 sijalice. Kolika je verovatnoća da nisu sve tri izabrane sijalice ispravne?

Rešenje:

$$P(A)=0,3.$$

17. Među n proizvoda m je lošeg kvaliteta. Naći verovatnoću da je među k slučajno izabranih proizvoda bar jedan lošeg kvaliteta.

Rešenje:

Događaj A je suprotan događaju da su svi proizvodi dobri.

$$P(A)=1-\frac{\binom{n-m}{k}}{\binom{n}{k}}.$$

18. U pakovanju od n proizvoda ima m neispravnih. Naći verovatnoću da se u uzorku od r slučajno izabranih proizvoda nađe k neispravnih.

Rešenje:

$$P(A)=\frac{\binom{m}{k}\binom{n-m}{r-k}}{\binom{n}{r}}.$$

19. Dete ima 4 pločice za igru na kojima piše 2,3,5,6. Od tih brojeva prave se razni četvorocifreni brojevi. Kolika je verovatnoća da dete dobije broj

a) deljiv sa 4

b) deljiv sa 2

Rešenje:

a) Broj svih ishoda su permutacije od 4 elementa, tj. 4!=24. Brojeva deljivih sa 4 ima 8 . To su brojevi koji se završavaju sa dvocifrenim brojevima deljivim sa 4. (32,36,52,56). Tada preostale 2 cifre čine 2 različite permutacije, tj 4.2=8.

$$P(B)=\frac{2\cdot 4}{4!}=\frac{8}{24}=\frac{1}{3}$$

b) $P(B)=\frac{12}{4!}=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}.$

20. Problem rođendana: Koja je verovatnoća da u društvu od n osoba postoje bar dve koje su rođene istog dana u godini?

Rešenje:

Problem treba rešiti kao suprotan događaj, događaju, da svi imaju različit datum rođenja.

$$P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{365\cdot 364\cdot\ldots(365-n+1)}{365^n}=P_n(A).$$

Može se izračunati da je $P_{22}\approx 0,467$, a $P_{23}\approx 0,507$. Dakle, ako postoje više od 22 osobe, onda je veća verovatnoća da postoje 2 osobe sa istim datumom rođendana.

A kako je $P_{68}\approx 0,999$, onda za više od 68 osoba sa sigurnošću od 99,9%, možemo tvrditi da postoje bar dve osobe rođene istog datuma.

21. Bacamo 3 novčića jedan za drugim. Naći verovatnoću da ćemo dobiti 2 pisma i jedan grb.

Rešenje:

Broj svih ishoda je $n = \overline{V}_3^2 = 8$. Povoljni ishodi su grb i dva pisma. Njih ima 3, jer grb može da se pojavi u prvom, drugom ili trećem bacanju. Dakle $P(A) = \frac{3}{8}$.

22. Šest porodica se sastoje od oca, majke i troje dece. Izaberu se slučajno jedan otac, jedna majka i jedno dete. Kolika je verovatnoća da pripadaju istoj porodici?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{6 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 18} = \frac{1}{36}.$$

23. Imamo 7 pertli različitih boja, od kojih je jedna crvena, a jedna zelena. Naći verovatnoću da će crvena i zelena pertla biti jedna pored druge, ako se pertle ređaju na slučajan način

a) na prav konac, b) u krug.

Rešenje:

a) Broj svih načina da se nanižu pertle na prav konac je $7!$. Da bismo odredili povoljne realizacije, zamislimo da su crvena i zelena pertla jedna pored druge i to crvena pa zelena. Dakle imamo 6 objekata, (ove dve kao 1 i ostalih 5) koje treba raspodeliti na 6 mesta, dakle $6!$ Dve pertle još mogu da razmene mesta pa je $P(A) = \frac{2 \cdot 6!}{7!} = \frac{2}{7}$.

b) Ako se pertle ređaju u krug, odnosno ako im se mesta ne razlikuju. U jednom kružnom rasporedu ima 7 različitih mesta, jer ogrlicu možemo raseći na 7 mesta.
Prema tome broj različitih kružnih rasporeda je 7 puta manji od broja linijskih rasporeda, dakle $6!$ Slično je i za povoljne ishode, pa je

$$P(B) = \frac{2 \cdot 5!}{6!} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

24. Šest kuglica raspoređeno je nasumice u 12 kutija. Naći verovatnoću da je tačno 10 kutija prazno.

Rešenje:

Ukupan broj ishoda je 12^6, jer prvu kuglicu možemo da stavimo u bilo koju od 12 kutija, drugu takođe i td.

Ako je 10 kutija prazno, znači da smo svih 6 kuglica stavili u 2 kutije. Broj načina za 2 kuglice je $\binom{12}{2}$. Broj načina da 6 kuglica stavimo u 2 kutije je 2^6.

Ali među ovim načinima postoje i 2 načina u kojima je jedna od dve kutije prazana. Zato broj načina rasporeda 6 kuglica u 2 kutije, a da nijedna nije prazna je $2^6 - 2$.

$$P(A) = \frac{\binom{12}{2}\left(2^6 - 2\right)}{12^6}.$$

25. Iz špila od 52 karte za igru na slučajan način izvlače se 3 karte. Naći verovatnoću da to budu tri različite slike.

Rešenje:

$$P(A) = \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}} = 0{,}0029 \text{ ili } P(A) = \frac{12}{52}\cdot\frac{8}{51}\cdot\frac{4}{50} = 0{,}0029.$$

26. Telefonski broj se sastoji od 6 cifara. Ako se pretpostavi da postoje svi telefonski brojevi od 000 000 do 999 999, koja je verovatnoća da u proizvoljno izabranom broju sve cifre budu različite?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{V_6^{10}}{\overline{V}_6^{10}} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6} = 0{,}1512.$$

27. U televizijskom studiju ima 3 kamere. Verovatnoća da je kamera uključena za svaku kameru iznosi 0,6. Odrediti verovatnoću da je u datom trenutku uključena bar jedna.

Rešenje:

$$P(A)=1-0,4^3=0,936.$$

28. Kocka čije su sve strane obojene rasečena je na 1000 kockica istih dimenzija. Sve kockice su stavljene u jednu kutiju. Kolika je verovatnoća da izvučena kockica ima:

a) 3 obojene strane,

b) 2 obojene strane,

c) 1 obojenu stranu.

Rešenje:

a) $P(A)=\dfrac{8}{1000}=0,008$

b) $P(B)=\dfrac{96}{1000}=0,096$

c) $P(C)=\dfrac{384}{1000}=0,384$.

29. Posmatramo 3 zatvorene kutije. U jednoj od njih se nalazi poklon koji želimo da dobijemo, a ostale 2 su prazne.Vlasnik kutija zna u kojoj se nalazi poklon. Igrač pokazuje jednu kutiju, kao svoj izbor. Ona se ne otvara. Zatim vlasnik otvara jednu od preostale dve kutije i ona je obavezno prazna. Zatim vlasnik pita igrača da li želi da promeni kutiju, izmeni svoj prvobirni izbor. Da li je za igrača bolje da promeni odluku o izboru kutije?

Rešenje:

A je događaj da je u prvom pokazivanju izabrao praznu,

B promenio je izbor i osvaja poklon.

Očigledno je A=B, odnosno $P(A)=P(B)=\dfrac{2}{3}$.

Znači, bolje je da promeni kutiju.

30. Jedan student je od 30 ispitnih pitanja naučio 24, a drugi 15. Na ispitu su dobili po 3 pitanja . Kolika je verovatnoća da će prvi, odnosno drugi da odgovorio na:

a) najmanje 2 pitanja

b) najviše 1 pitanje

Rešenje:

$$P(A)=\frac{\binom{24}{2}\binom{6}{1}+\binom{24}{3}}{\binom{30}{3}}=0,96,\quad P(B)=\frac{\binom{15}{2}\binom{15}{1}+\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}}.$$

$$P(A)=\frac{\binom{24}{1}\binom{6}{2}+\binom{6}{3}}{\binom{30}{3}},\quad P(B)=\frac{\binom{15}{1}\binom{15}{2}+\binom{15}{3}}{\binom{30}{3}}.$$

31. Bacamo istovremeno kocku i novčić. Kolika je verovatnoća da ćemo dobiti na novčiću pismo ili na kocki broj 5?

Rešenje:

Neka je A događaj da dobijemo pismo, a B događaj da dobijemo broj 5.
Događaji A i B se isključuju.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}.$$

32. Dva strelca gađaju cilj. Verovatnoća da prvi pogodi cilj je 0,7, a drugi je 0,4. Obojica istovremeno opale prema cilju. Kolika je verovatnoća da ce cilj biti pogođen?

Rešenje:

A je događaj da cilj pogodi prvi strelac,
B je događaj da cilj pigodi drugi srelac.

Događaji A i B se ne isključuju jer je moguće da oba strelca istovremeno cilj pogode.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0,7+0,4-0,7\cdot 0,4=0,82\,.$$

33. U grupi je 20 studenata i 10 studentkinja. Polovina od ove grupe puši. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrana osoba biti ili studentkinja ili pušač.

Rešenje:

A je događaj da je izabrana osoba studentkinja

B je događaj da je izabrana osoba pušač

$$P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{15}{30}=\frac{1}{2},\ P(AB)=\frac{10}{30}\cdot\frac{15}{30}=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}$$

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

34. Kolika je verovatnoća da pri bacanju dve kocke jedna kocka prikaže broj deljiv sa 3 ili deljiv sa 4?

Rešenje:

A je dodađaj da se na jednoj kocki pojavi broj delji sa 3, odnosno jedan od brojeva je 3 ili 6, onda je $P(A)=\frac{20}{36}$.

B je dodađaj da se na jednoj kocki pojavi broj deljiv sa 4, odnosno jedan od brojeva je 4, onda je $P(B)=\frac{11}{36}$.

Događaji *A* i *B* se ne isključuju, pa je $P(AB)=\frac{4}{36}$.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{36}+\frac{11}{36}-\frac{4}{36}=\frac{3}{4}\,.$$

35. Bacamo dinar tri puta. Neka je događaj A pojavljivanje samo jednog pisma, događaj B pojavljivanje najmanje jednog grba, i događaj C pojavljivanje prvi put pisma, a druga dva puta grb. Izračunati $P(A+B+C)$.

Rešenje:

Broj svih elementarnih događaja je 2^3.

$$A=\{(PGG),(GPG),(GGP)\},\ P(A)=\frac{3}{8}$$

$$B=\{,(GPP),(PGP),(PPG),(PGG),(GPG),(GGP),(GGG)\},\ P(B)=\frac{7}{8}$$

$$C=\{(PGG)\},\ P(C)=\frac{1}{8}.$$

$$A\bigcap B=A,\quad A\bigcap C=B\bigcap C=A\bigcap B\bigcap C=C.$$

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)=$$
$$\frac{3}{8}+\frac{7}{8}+\frac{1}{8}-\frac{3}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

36. Kolika je verovatnoća da se istovremenim bacanjem 3 kocke dobiju bar 2 jednaka broja?

Rešenje:

$$P(A)=\frac{4}{9}.$$

37. Iz špila od 32 karte za igru izvlačimo jednu kartu. Kolika je verovatnoća sa ćemo izvući karo kartu ili kralja?

Rešenje:

$$P(A)=\frac{11}{32}.$$

2. USLOVNA VEROVATNOĆA I NEZAVISNOST

2.1. USLOVNA VEROVATNOĆA

Verovatnoća događaja A, znajući da se događaj B već realizovao ili predpostavljajući da će se realizovati naziva se ***uslovna verovatnoća***.

Definicija:

Verovatnoća $P(A|B)$ zove se ***uslovna verovatnoća*** događaja A pod uslovom B i definiše se sa $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$, za $P(B)>0$.

Primer:

Kolika je verovatnoća da će se na kocki prilikom bacanja pojaviti paran broja, pod uslovom da je taj broj manji od 4 ?

Neka je A događaj pojave parnog broja, a B pojava brojeva manjih od 4.

$A=\{2,4,6\}$, $B=\{1,2,3\}$, $A\cap B=\{2\}$, $P(AB)=\dfrac{1}{6}$, $P(B)=\dfrac{3}{6}$,

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(\omega_2)}{P(\omega_1+\omega_2+\omega_3)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}$$

Primer:

U kesi se nalazi 5 belih i 9 crnih kuglica. Izvlačimo nasumice 2 kuglice, jednu po jednu, bez vraćanja. Kolika je verovatnoća da ćemo iz drugog puta izvući crnu, ako znamo da je prvo izvučena bela kuglica?

Neka je A događaj izvlačenja crne kuglice, a B verovatnoća pojave bele kuglice iz prvog izvlačenja.

$P(B)=\frac{5}{14}$.

$P(AB)=\frac{45}{V_2^{14}}=\frac{45}{14\cdot 13}=\frac{45}{182}$, ali mogli smo da izračunamo i kao

$P(AB)=\frac{5}{14}\cdot\frac{9}{13}=\frac{45}{182}$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{9}{13}$$

Primer:

Dinar se baca ili do pojave grba ili do tri uzastopne pojave pisma. Pod uslovom da je rezultat prvog bacanja pismo, naći verovatnoću da dinar bude bačen 3 puta.

Prilikom bacanja novčića moguće je da se dogodi G, PG, PPG, PPP.

$$P(G)=\frac{1}{2}, P(PG)=\frac{1}{4}, P(PPG)=\frac{1}{8}, P(PPP)=\frac{1}{8},$$

Neka je B događaj pojave pisma u prvom bacanju (B=PG+PPG+PPP) , pa je

$$P(B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}.$$

Ako je A događaj da se dinar baca 3 puta, onda je (A=PPG+PPP) i

$P(A)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$.

Kako je AB=A i $P(AB)=\frac{1}{4}$.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

2.2. VEROVATNOĆA PROIZVODA DOGAĐAJA-NEZAVISNI I ZAVISNI DOGAĐAJI

Neka je dat skup Ω i $A, B \subset \Omega$. Događaj A je ***zavisan*** od događaja B, ako ostvarivanje događaja B utiče na verovatnoću događaja A. U suprotnom su ***nezavisni***.

Primer:
Bacamo dve kocke. Neka je A događaj da prva kocka pokaže broj 5, a B događaj da druga kocka pokaže broj 6.
$P(A) = \frac{1}{6}$ bez obzira da li se događaj B realizovao ili ne. Isto važi i u obrnutom slučaju.
Dakle događaji A i B su nezavisni.

Primer:
Imamo 6 artikala jedne fabrike od kojih je 3 neispravno. Biramo dva artikla, jedan pa drugi.
Neka je A događaj da u prvom izvlačenju dobijemo neispravan artikal, a B događaj da i u drugom izvlačenju izvučemo neispravan artikal.
Jasno je da će realizacija događaja A uticati na realizaciju događaja B.
Ako ne bi obraćali pažnju na događaj A, onda je $P(B) = \frac{3}{6}$. Pod predpostavkom da se događaj A realizovao, tada je $P(B) = \frac{2}{6}$.
Događaji A i B su zavisni.

Definicija:
Ako su događaji A i B međusobno ***zavisni,*** tada je

$$P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Za konačno mnogo događaja važi formula

$$P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2|A_1\right)P\left(A_3|A_2A_1\right)\ldots P\left(A_n|A_{n-1}\ldots A_2A_1\right)$$

Definicija

Događaji A i B međusobno ***nezavisni*** ako je

$$P\left(A|B\right)=P\left(A\right),\quad P\left(B|A\right)=P\left(B\right)\ \text{ili}$$

$$P\left(AB\right)=P\left(A\right)P\left(B\right).$$

Za konačno mnogo događaja važi formula

$$P\left(A_1A_2\ldots A_n\right)=P\left(A_1\right)P\left(A_2\right)\ldots P\left(A_n\right)$$

Izuzetno je važno praviti razliku između nezavisnosti i disjunktnosti (događaji koji se isključuju). Nezavisni događaji se definišu nad skupom Ω, za razliku od disjunktnosti koja postoji nezavisno od definicije verovatnoće.

Primer:

Eksperiment se sastoji u bacanju 2 dinara. Neka su događaji:

A: pojava grba na prvom dinaru

B: pojava makar jednog grba

C: pojava makar jednog pisma

D: pojava grba na drugom dinaru

Ispitati da li su događaji A i C, A i D, B i C, B i D, zavisni ili nezavisni.

Događaji A i C su zavisni, $P\left(C\right)=\frac{3}{4}\ P\left(C|A\right)=\frac{1}{2}$.

Događaji A i D su nezavisni, $P\left(A\right)=\frac{1}{2}\ P\left(A|D\right)=\frac{1}{2}$.

Događaji B i C su zavisni, $P\left(B\right)=\frac{3}{4}\ P\left(B|C\right)=\frac{2}{3}$.

Događaji B i D su zavisni, $P\left(B\right)=\frac{3}{4}\ P\left(B|D\right)=1$.

Primer:
Radnik radi na 3 automatske mašine.Verovatnoća da tokom 1 sata mašina ne zahteva intervenciju je za prvu mašinu 0,9, za drugu 0,8 i za treću 0,85.
Kolika je verovatnoća da nijedna od 3 mašine ne zahteva intervenciju tokom sata.
U pitanju su nezavisni događaji i ako sa A, B, C označimo događaje da nije potrebna intervencija, onda je $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)=0,9\cdot 0,8\cdot 0,85=0,612$

Primer:
Među proizvodima jedne fabrike ima 5% škarta, a od proizvoda koji su dobri 80% je prve klase. Naći verovatnoću da je slučajno izabrani proizvod prve klase.
Neka je A događaj da proizvod nije škart, $P(A)=0,95$ i ako je B događaj da proizvod prve klase $P(B|A)=0,8$, onda je
$P(AB)=P(A)P(B|A)=0,95\cdot 0,8=0,76$.

2.3. TOTALNA VEROVATNOĆA

Neka nezavisni događaji $H_1,H_2,\ldots,H_n$ čine jedno ***razlaganje*** skupa Ω, ***potpuni sistem hipoteza,*** odnosno $\sum_{k=1}^{n} H_k=\Omega$, gde su verovatnoće $P(H_k)$ unapred poznate.

Neka se proizvoljni događaj A ostvaruje uz realizaciju bar jednog od ovih događaja.

Da bismo odredili verovatnoću događaja *A* potrebno je naći uslovne verovatnoće $P(A|H_k)$, tj. realizacije pojedinih hipoteza koje su dovele do ostvarivanja događaja A.

Definicija:
Formula totalne verovatnoće: Ako događaji $H_1,H_2,\ldots,H_n$ čine ***potpuni sistem hipoteza*** u odnosu na događaj *A*, tada je

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k).$$

Primer:
Na ispit iz matematike izašlo je 60% studenata koji polažu prvi put i 40% ostalih. Verovatnoća da će student koji polaže prvi put položiti ispit je 0,3, a za ostale 0,4. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrani student položiti ispit.

Neka su H_1, H_2 verovatnoće da student polaže prvi put, odnosno više puta.

$P(H_1) = 0,6 \quad P(H_2) = 0,4$

A je događaj da student položi ispit, $P(A|H_i) \quad i = 1,2$ su verovatnoće da položi ispit iz prvog, odnosno ostalih puta.

$P(A|H_1) = 0,3 \quad P(A|H_2) = 0,4$

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,6 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,4 = 0,34$.

Primer:
U nekoj fabrici 30% proizvodnje otpada na prvu mašinu, 25% na drugu mašinu i ostalo na treću mašinu. Na prvoj mašini pojavljuje se 1% škarta, na drugoj mašini 1,2% i na trećoj mašini 2% škarta. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrani proizvod biti škart?

A je događaj da je slučajno izabrani proizvod škart.

H_1, H_2, H_3 su proizvodi izrađeni na mašinama.

$P(H_1) = 0,30, \quad P(H_2) = 0,25, \; P(H_3) = 0,45$

$P(A|H_1) = 0,01, \quad P(A|H_2) = 0,012, \; P(A|H_3) = 0,02$

$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) = 0,015.$

Primer:
Određeni artikal proizvode 3 fabrike. Poznato je da prva fabrika proizvodi dva puta više od druge, a druga i treća isto. Takođe 2% proizvoda iz prve i druge fabrike je defektno, a 4% iz treće. Svi proizvodi nalaze se na istom skladištu. Slučajno se bira jedan proizvod. Naći verovatnoću da je on defektan.

Ako sa H_1, H_2, H_3 obeležimo događaje da je proizvod iz ovih fabrika respektivno. Iz uslova zadatka imamo da je

$$P(H_1) = 2P(H_2), \quad P(H_2) = P(H_3), \quad P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 1,$$

pa dobijamo da je $P(H_1) = \frac{1}{2} \quad P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{4}$.

Ako je događaj A da je izabrani proizvod defektan imamo da je

$$P(A|H_1) = P(A|H_2) = 0,02 \quad P(A|H_3) = 0,04.$$

Na osnovu formule totalne verovatnoće dobijamo da je

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

$$\frac{1}{2} \cdot 0,02 + \frac{1}{4} \cdot 0,02 + \frac{1}{4} \cdot 0,04 = 0,025$$

2.4. BAJESOVA FORMULA

Na osnovu formule totalne verovatnoće ne možemo da u prethodnom primeru odgovorimo na pitanje iz koje fabrike potiče izabrani proizvod. Odgovor na ovo pitanje daje Bajesova formula.

Definicija:

Bajesova formula:

Ako događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čine ***potpuni sistem hipoteza*** u odnosu na događaj A i $P(A) > 0$, tada je

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)} = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}, \; i = 1, \ldots, n.$$

Bajesova formula se zove i ***formula verovatnoća hipoteza (uzoraka)***, jer na događaje $H_1, H_2, \ldots, H_n$ možemo gledati kao na različite uzroke koji mogu dovesti do realizacije događaja A.

Primer:

U predhodnom primeru verovatnoća da je traženi proizvod iz prve fabrike je

$$P\left(H_1|A\right)=\frac{0,5\cdot 0,02}{0,025}=0,4.$$

Primer:

Baca se kocka. Ako se na kocki pojavi 1 ili 6 uzima se kuglica iz prve kutije, u suprotnom se uzima iz druge kutije. Prva kutija sadrži 3 crne, 2 bele i 1 zelenu kuglicu, a druga kutija sadži 4 bele i 2 zelene kuglice.

a) Naći verovatnoću da je izvučena bela kuglica

b) Naći verovatnoću da je izvučena iz prve kutije, ako znamo da je bela.

a) Ako su H_1, H_2 događaji da su izabrane prva odnosno druga kutija , imamo

$$P\left(H_1\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P\left(H_2\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$P\left(A|H_1\right)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P\left(A|H_2\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},$$

$$P(A)=P\left(H_1\right)P\left(A|H_1\right)+P\left(H_2\right)P\left(A|H_2\right)=\frac{1}{5}$$

b) $P\left(H_1|A\right)=\dfrac{P\left(H_1\right)P\left(A|H_1\right)}{P(A)}=\dfrac{1}{5}.$

2.5. VAŽNI OBRASCI

Uslovna verovatnoća

$$P\left(A|B\right)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

Zavisni događaji

$$P(AB)=P(B)\cdot P\left(A|B\right)=P(A)\cdot P\left(B|A\right)$$

Nezavisni događaji

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Formula totalne verovatnoće

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A|H_k)$$

Bajesova Formula

$$P(H_i|A)=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}=\frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{k=1}^{n}P(H_k)P(A|H_k)},\ i=1,\dots,n$$

2.6. ZADACI

1. U jednoj kutiji nalaze se 4 bele i 8 crnih kuglica, a u drugoj 3 bele i 9 crnih. Izvlačimo iz svake kutije po jednu kuglicu. Odrediti verovatnoću da je iz obe kutije izvučena bela?

Rešenje:
Događaj *A*: bela kuglica iz prve kutije.
Događaj *B*: bela kuglica iz druge kutije,
Događaji *A* i *B* su nezavisni.

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{4}{12}\cdot\frac{3}{12}=\frac{1}{12}.$$

2. U magacinu se nalazi 12 proizvoda, od kojih je 8 ispravnih. Radnik nasumice bira 2 proizvoda, prvo jedan pa drugi. Naći verovatnoću da su oba proizvoda ispravna .

Rešenje:
Događaji *A* i *B* su zavisni.

$$P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=0,4242.$$

3. Iz špila za igru izvučena je jedna karta, a zatim je vraćena u špil, a zatim je ponovo izvučena jedna karta.

a) kolika je verovatnoća da su oba puta izvučene petice?

b) kolika je verovatnoća da su oba puta izvučene petice, ako se posle prvog izvlačenja karta ne vraća u špil?

Rešenje:

A- je događaj da je u prvom izvlačenju izvučena petica

B- je događaj da je u drugom izvlaćenju izvučena petica

a) Događaji su nezavisni, pa je $P(AB)=P(A)P(B)=\frac{4}{52}\cdot\frac{4}{52}=\frac{16}{52^2}$,

b) Događaji su zavisni, pa je $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}=\frac{12}{2652}$.

4. Pri bacanju dve kocke posmatramo zbir koji se pojavljuje na njima. Kolika je verovatnoća da je zbir 6, ako se zna da je zbir paran broj?

Rešenje:

Događaj A: zbir je 6.

Događaj B: zbir je paran broj.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{18}{36}}=\frac{5}{18}.$$

5. U jednom odeljenju od 30 učenika, 12 nosi naočare, 8 piše levom rukom, a 6 ima obe te osobine. Kolika je verovatnoća da slučajno izabrani učenik piše levom rukom, ako znamo da nosi naočare?

Rešenje:

Neka je A događaj da učenik piše levom rukom.

Neka je B događaj da učenik nosi naočare.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{6}{30}}{\frac{8}{30}}=\frac{3}{4}.$$

6. Student je izašao na ispit znajući 20 od 25 pitanja. Ispitivač je postavio 3 pitanja. Naći verovatnoću da je student znao odgovor na sva 3 pitanja.

Rešenje:

Ako sa A, B C označimo događaje da su izvlačena pitanja koje student zna, onda

$$P = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB) = \frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\cdot\frac{18}{23} = 0,496.$$

Zadatak se mogao rešiti primenom klasične definicije verovatnoće

$$P = \frac{\binom{20}{3}\binom{5}{0}}{\binom{25}{3}}.$$

7. Iz špila od 32 karte za igru slučajno se, odjednom, izvlače 2 karte. Neka je A događaj da je izvučena bar jedna dama i B događaj da je izvučen bar jedan pik. Naći verovatnoću da je izvučena bar jedna dama i bar jedan pik.

Rešenje:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\binom{28}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{236}{992},\ P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{24}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{440}{992}$$

$$P(AB) = 1 - P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - \frac{\binom{21}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{572}{992}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{104}{992}$$

8. U kutiji se nalaze 6 cvenih i 4 bele kuglice. Izvlačimo 2 kuglice jednu za drugom.. Kolika je verovatnoća da, ako je prva izvučena kuglica crvana, druga bude bela?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{4}{9}.$$

9. Dat je niz prirodnih brojeva 1,2,3,4,5,6,7,8, 9. Biramo 2 broja. Kolika je verovatnoća da njihov zbir bude veći od 12 i neparan?

Rešenje:

$$P(A) = \frac{1}{12}.$$

10. Letilica se gađa 2 puta. U prvom gađanju verovatnoća pogotka je 0,3 a u drugom 0,6. Jednom pogođena letilica se ruši sa verovatnoćom 0,2 a dva puta pogođena ruši se sa verovatnoćom 0,9. Kolika je verovatnoća da letilica padne?

Rešenje:

H1- letilica je pogođena jedanput

H2 -letilica je pogođena dva puta

A- letilica je pogođena

$$P(H_1) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,7 \cdot 0,6 = 0,56$$

$$P(H_2) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0,56 \cdot 0,2 + 0,18 \cdot 0,9 = 0,29$$

11. Fabrika proizvodi televizore. Tri pogona proizvode respektivno 25%, 35% i 40% celokupne proizvodnje. Pogoni redom daju 5%, 4% i 2% škartova.

a) Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani televizor škart?

b) Kolika je verovatnoća da je taj televizor proizveden u drugom pogonu?

Rešenje:

$P(H_1)=0,25$, $P(H_2)=0,35$, $P(H_3)=0,40$

$P(A|H_1)=0,05$, $P(A|H_2)=0,04$, $P(A|H_3)=0,02$

a) $P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=\dfrac{345}{100^2}$

b) $P(H_2|A)=\dfrac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)}=\dfrac{\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}}{\frac{345}{100^2}}=\dfrac{28}{69}$.

12. Na magacinu se nalaze proizvodi iste vrste, proizvedeni u tri različita pogona, respektivno 20%, 40% i 40% proizvoda. Pogoni redom daju 0,01; 0,02 i 0,04 škartova.

a) Kolika je verovatnoća da je slučajno izabrani prozvod škart?
b) Kolika je verovatnoća da je taj proizvod izrađen u prvom pogonu?

Rešenje:

a)

$P(H_1)=0,2;\ P(H_2)=0,4;\ P(H_3)=0,4;$

$P(A|H_1)=0,01;\ P(A|H_2)=0,02;\ P(A|H_3)=0,04;$

$P(A)=P(H_1)P(A|H_1)+P(H_2)P(A|H_2)+P(H_3)P(A|H_3)=0,026$

b) $P(H_1|A)=\dfrac{P(H_1)P(A|H_1)}{P(A)}=\dfrac{0,2\cdot 0,01}{0,026}=0,769$.

13. U dve kutije nalaze se kuglice. U prvoj kutiji se nalazi 2 crvene i 4 bele, a u drugoj 6 crvenih i 2 bele. Izvlači se jedna kuglica iz slučajno izabrane kutije. Ona je bela. Kolika je verovatnoća da je iz prve kutije?

Rešenje:

Događaj B: kuglica je bele boje.

Događaj $A_i, i=1,2$: Kuglica je iz i –te kutije.

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\ P(A_2)=\frac{1}{2},\ P(B|A_1)=\frac{4}{6},\ P(B|A_2)=\frac{2}{8}$$

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)}=\frac{8}{19}$$

14. Od tri jednaka pištolja bira se jedan na slučajan način.

a) Odrediti verovatnoću da je cilj pogođen ako verovatnoća pogotka za prvi pištolj iznosi $\frac{3}{4}$, za drugi $\frac{17}{20}$ i za treći $\frac{1}{20}$.

b) Ako je cilj pogođen, odrediti verovatnoću da je pogođen prvim pištoljem ?

Rešenje:

$$a)\ P(A)=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{17}{20}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{20}=0,55$$

$$b)\ P(H_1|A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}}{0,55}=0,45$$

15. Verovatnoća da će student A rešiti neki zadatak je 0,7, a za studenta B je 0,9.

a) Naći verovatnoću da će zadatak biti rešen ako ga rešavaju oba studenta, nezavisno jedan od drugog.

b) Ako je zadatak rešen, koja je verovatnoća da ga je rešio student B?

Rešenje:

a) $P(R)=P(A\overline{B})+(\overline{A}B)+(AB)=0,7\cdot 0,1+0,3\cdot 0,9+0,7\cdot 0,9$

Ili

$P=1-(\overline{A}\overline{B})=1-0,3\cdot 0,1$.

b) $P=\frac{1}{2}\cdot 0,7+\frac{1}{2}\cdot 0,9=0,8$.

16. Tri kutije sadrže po 10 proizvoda. U prvoj kutiji ima 4 neispravna proizvoda, u drugoj 2 , a u trećoj 5. Odrediti verovatnoću da uzorak sadrži 0,1,2,3 neispravna proizvoda.

Rešenje:

Kako svaka kutija može da se izabere sa istom verovatnoćom imamo da je

$$P(K_1) = P(K_2) = P(K_3) = \frac{1}{3}.$$

Posmatrajmo prvo prvu kutiju.

$$P(k|K_1) = \frac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}, k = 0,1,2,3.$$

$$P(0|K_1) = \frac{1}{6}, P(1|K_1) = \frac{1}{2}, P(2|K_1) = \frac{3}{10}, P(3|K_1) = \frac{1}{30}.$$

Na isti način bi izračunali $P(k|K_2), P(k|K_3)$.

Na osnovu formule totalne verovatnoće imamo da je

$$P(0) = P(K_1)P(0|K_1) + P(K_2)P(0|K_2) + P(K_3)P(0|K_3) =$$

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cdot\frac{7}{15} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{12} = \frac{43}{180}$$

$$P(1) = \frac{83}{120}, P(2) = \frac{47}{180}, P(3) = \frac{7}{180}.$$

17. U prodavnici se nalaze cipele iz dve fabrike i to 70% je iz prve fabrike, a 30% je iz druge. 2% cipela iz prve fabrike je lošeg kvaliteta, a 5% iz druge fabrike.

a) Odrediti verovatnoću da slučajni kupac kupi kvalitetne cipele?

b) Kolika je verovatnoća da su to cipele proizvedene u prvoj fabrici?

Rešenje:

a) 0,97

b) 0,71

18. Svaka od 3 kutije za nakit ima 2 pregrade. U prvoj od kutija u jednoj od predgrada nalazi se zlatni prsten, a u drugoj srebrni. U drugoj kutiji u obe pregrade su zlatni prstenovi, a u trećoj u obe pregrade srebrni prstenovi. Na slučajan način biramo jednu od kutija, otvaramo jednu pregradu i nalazimo srebrni prsten. Kolika je verovatnoća da je u drugoj pregradi zlatan prsten?

Rešenje:

1/3

19. Na jednom uskom putu u susret jedan drugom idu 2 vozača. Ako su oba vozača trezna verovatnoća da neće doći do sudara je 0,999, ako je jedan vozač pripit verovatnoća je 0,7 i ako su oba vozača pripita verovatnoća je 0,4. Ako sa zna da je svaki deseti vozač pripit odrediti verovatnoću da neće doći do sudara.

Rešenje:

$P(H_1) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81$, $P(H_2) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,9 = 0,18$,

$P(H_3) = 0,1 \cdot 0,1 = 0,01$

$P(A|H_1) = 0,99$, $P(A|H_2) = 0,7$, $P(A|H_3) = 0,4$

$P(A) = 0,94$ **.**

20. Na ispitu ima 20 pitanja. Od 10 kandidata koji su izašli na ispit 3 su se pripremili odlično, 4 vrlo dobro, 2 dobro i 1 slabo. Student koji se odlično pripremio zna odgovore na sva pitanja, vrlo dobro pripremljeni student zna odgovore na 14 pitanja, a slabo pripremljeni zna odgovore na 7 pitanja. Slučajno izabrani student je odgovorio na sva tri pitanja. Kolika je verovatnoća da je to vrlo dobro pripremljeni student?

Rešenje:

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{\binom{16}{3}}{\binom{20}{3}}}{0,3 \cdot 1 + 0,4 \cdot 0,49 + 0,2 \cdot 0,32 + 0,1 \cdot 0,03} = \frac{0,4 \cdot 0,49}{0,563} = 0,348$$

3. SLUČAJNE PROMENLJIVE – FUNKCIJA RASPODELE

U predhodnim razmatranjima slučajne događaje smo okarakterisali rečima. Međutim, mnogo je svrsishodnije slučajne događaje okarkterisati kao brojnu vrednost, kao neki realni broj. Na taj način dolazimo do pojma ***slučajne promenljive.***

Primer:

Novčić se baca dva puta. Kako je $\Omega = \{PP, PG, GP, GG\}$ i ako je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama onda je

$X(PP) = 2,\ X(GP) = 1,\ X(PG) = 1,\ X(GG) = 0.$

Znači slučajna promenljiva X uzima 3 vrednosti, a to su 0,1,2.

Definicija:

Funkcija X koja svakom slučajnom događaju $\omega \in \Omega$ dodeljuje neki realni broj $X(\omega)$ zove se ***slučajna promenljiva,*** gde je $X : \Omega \to R$.

Slučajne promenljive obeležavamo velikim slovima X,Y,Z....., a njihove vrednosti malim slovima x,y,z......Da bismo okarakterisali slučajnu promenljivu moramo znati sve vrednosti koje ona može da ima.

Značajno je uočiti da ovako definisana slučajna promenljiva predstavlja jedan apstraktan matematički model. Na primer, ako bi u eksperimentu bacanja kocke sa X=0 označili pojavu parnog broja, a sa X=1 neparnog, a u eksperimentu bacanja novčića sa X=0 pojavu pisma, a sa X=1 pojavu glava, dobili bi da se različiti slučajni događaji preslikavaju u iste realne brojeva. Znači, u pitanju je jedan isti apstraktani model sa dva podjednako verovatna ishoda.

Slučajna promenljiva predstavlja preslikavanje događaja iz skupa Ω u skup realnih brojeva, dok je verovatnoća preslikavanje događaja iz skupa Ω na interval $[0,1]$.

Važno je shvatiti da slučajna promenljiva nema neku određenu vrednost, već se samo govori o verovatnoćama da uzme neku vrednost.

Razlikujemo dva osnovna tipa slučajnih promenljivih, ***diskretne*** i ***neprekidne*** slučajne promenljive. Podela se vrši u zavisnosti da li slučajna promenljiva uzima vrednosti u konačnom, odnosno prebrojivom ili neprebrojivom skupu vrednosti.

3.1. DISKRETNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Definicija:

Neka slučajna promenljiva X može da uzme vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sa verovatnoćama $p_1, p_2, \ldots, p_n$, pri čemu je $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Skup parova $\left(x_{i,} p_i = P\left(X = x_i\right)\right), i = 1,2,\ldots,n$ ili napisano

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$$

čini ***raspodelu verovatnoća*** slučajne promenljive X ili ***zakon raspodele*** diskretne slučajne promenljive.

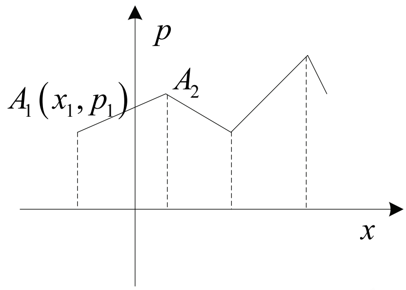
Napomena: Definicija zakona raspodele je identična i u slučaju prebrojivo mnogo vrednosti.

Raspodela ***verovatnoća*** kao potpuna karakteristika odnosi se samo na diskretnu slučajnu promenljivu.

Dakle u predhodnom primeru bacanja dva novčića , gde je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama, raspodela verovatnoća bi bila $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

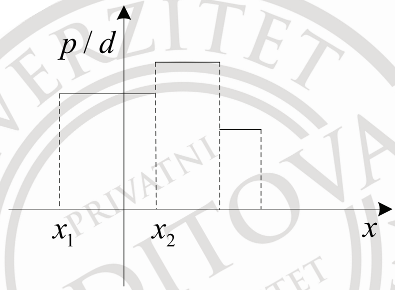
Raspodele slučajne promenljive mogu se prikazati i grafički, u koordinatnom sistemu, na dva načina.

a) Ako se na x-osu nanesu vrednosti x_i, slučajne promenljive X, a na y-osu njihove verovatnoće p_i, tada tačke $A_i\left(x_i, p_i\right)$, kada se spoje daju ***poligon raspodela.***



b) Ako se nacrtaju pravougaonici, tako da je $d_i = x_{i+1} - x_i$, $A_i\left(x_i, \dfrac{p_i}{d_i}\right)$, dobija se

histogram raspodela

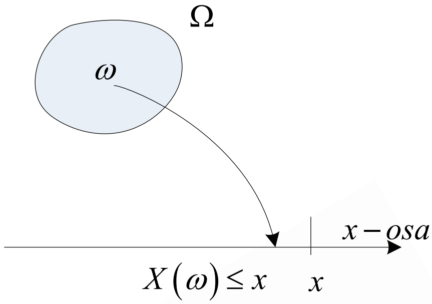


3.2. FUNKCIJA RASPODELE

Vrednost slučajne promenljive ne može se predvideti pre obavljenog eksperimenta.

Funkcija raspodele je karakteristika slučajne promenljive X koja omogućava da se izračuna verovatnoća da slučajna promenljiva uzme vrednost na nekom intervalu na x osi. Drugim rečima, slučajna promenljiva $X(\omega)$ uzima neku vrednost x sa verovatnoćom $P(\omega)$.

Umesto verovatnoće da slučajna promenljiva uzme neku vrednost, češće govorimo o verovatnoći da vrednost slučajne promenljive pripada nekom intervalu. Razlog za ovakvo rezonovanje su eksperimenti koji nemaju ishode na diskretnom skupu vrednosti.



Funkcija $F(x)=P(X(\omega)<x)$,

zove se ***funkcija raspodele*** verovatnoća slučajne promenljive.

Definicija:
Neka je X slučajna promenljiva. Realna funkcija (preslikavanje) F definisana kao

$$\{\omega\in\Omega | X(\omega)\le x\} \xrightarrow{P} P\{\omega\in\Omega | X(\omega)\le x\} = F(x)$$

naziva se ***funkcijom raspodele*** slučajne promenljive X.

Funkcija raspodele daje sve bitne osobine slučajne promenljive. Za razliku od vrednosti slučajne promenljive koja se ne zna pre obavljenog eksperimenta, funkcija raspodele je potpuno poznata. Iz ovih razloga predmet proučavanja teorije verovatnoće nisu slučane promenljive, već njihove raspodele i funkcije raspodela.

Primer:
Ako je slučajna promenljiva X ishod bacanja kocke, i pre bacanja kocke znamo da je $F(x)=P(X\le 4)=\dfrac{4}{6}$, iako ne možemo da tačno predvidimo koju vrednost će slučajna promenljiva X imati u konkretnom bacanju.

OSOBINE FUNKCIJE RASPODELE:

Neka je F funkcija raspodele slučajne promenljive X. Tada je:

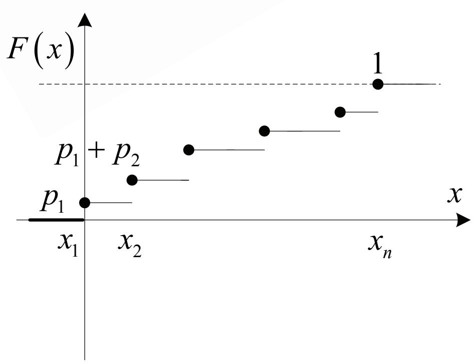
1. $0 \le F(x) \le 1, \quad \forall x \in R,$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1,$

   jer je verovatnoća nemogućeg događaja $(X < -\infty)$ jednaka 0, a sigurnog $(X < +\infty)$ jednaka 1
3. Funkcija F je monotono ne opadajuća, $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
4. Funkcija je neprekidna s leva, $\lim\limits_{h \to -0} F(x-h) = F(x)$.

Kod diskretne slučajne promenljive, funkcija raspodele se zove i ***kumulativna funkcija*** i oblika je:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ p_{1,} & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x_n \le x < \infty \end{cases}$$

Grafički prikaz kumulativne funkcije raspodele dat je na sledećoj slici:



Primer:

Bacamo novčić. Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama. Onda je $X(P)=1,\ X(G)=0,$ znači slučajna promenljiva uzima dve moguće vrednosti 0,1. Zakon raspodele i funkcija raspodele slučajne promenljive X su:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1 \end{cases}$$

Primer:

Novčić se baca dva puta. Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih pisama. Kako je $\Omega=\{PP,PG,GP,GG\}$, onda je

$X(PP)=2, X(GP)=1, X(PG)=1, X(GG)=0.$

Znači slučajna promenljiva uzima 3 moguće vrednosti 0,1,2.

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{4}, & 0\le x<1 \\ \frac{3}{4}, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2 \end{cases}$$

3.3. NEPREKIDNA SLUČAJNA PROMENLJIVA

Slučajna promenljiva X je ***neprekidna*** (kontinualna) ako je domen njenih vrednosti interval na realnoj osi.

Definicija:
Kod neprekidne slučajne promenljive X ***funkcija raspodele*** može se predstaviti kao

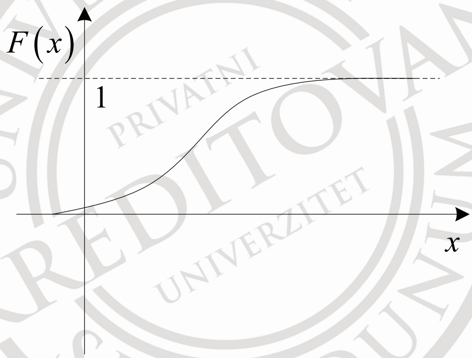
$$F(x) = P(X(\omega) \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad -\infty < x < \infty$$

gde je

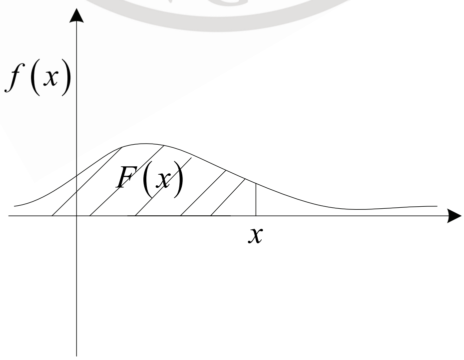
1. $f(x) \geq 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$

Funkcija $f(x)$ naziva se ***funkcija gustine.***

Grafički prikaz funkcije raspodele za neprekidu slučajnu promenljivu dat je na sledećoj slici:



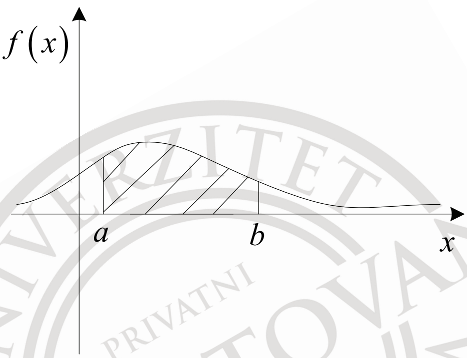
Kriva na narednoj slici naziva se ***kriva gustine***.



Polazeći od geometrijskog tumačenja određenog integrala, funkcija raspodele F(x) predstavlja površinu dela ravni između krive gustine i apscisne ose u granicama od $-\infty$ do x.

Funkcija gustine verovatnoće omogućava da se izračuna verovatnoća da se realizacija slučajne veličine nađe u nekom intervalu. Ta verovatnoća je jednaka površini koja je ograničena funkcijom gustine i granicama datog intervala.

$$P\left(a < X < b\right) = \int_a^b f\left(x\right) dx .$$



Prema tome možemo zaključiti:

1. $P\left(a < X < b\right) = F\left(b\right) - F\left(a\right)$.
2. $P\left(X = x\right) = 0, \forall x \in R$

Kod neprekidne funkcije, nemoguće je svakom elementu x iz intervala (a,b) dodeliti pozitivnu verovatnoću, jer bi njihov zbir bio beskonačan, a zbir verovatnoća skupa vrednosti promenljive X mora biti jednak 1. Zato se uzima da je $P\left(X = x\right) = 0$.

Prividno ovo je paradoks. Međutim, ovakvi paradoksi postoje u nauci. U geometriji duž ima pozitivnu dužinu, a dužina svake tačke je 0. U mehanici, masa tela postoji, a masa svakog pojedinog dela je nula.

Jednakost $P\left(X = x\right) = 0$ ne znači da će da se u praksi događaj $X = x$ nikada neće ostvariti, već samo da je mala, veoma mala verovatnoća da će se on ostvariti. To je prihvatljivo, jer slučajna promenljiva X može da uzme bilo koju vrednost sa intervala (a,b), a njih je neprebrojivo mnogo, pa su mali izgledi da uzme baš vrednost x .

Kao posledica navedenog važi i:

$$P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b).$$

Teorema:

Između funkcije raspodele i funkcije gustine postoju veza $F'(x) = f(x)$.

Dokaz:

Verovatnoća slučajne promenljive X na intervalu $(x, x+\Delta x)$ iznosi

$P(x \le X \le x+\Delta x) = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)\,dt$ ili aproksimativno

$$P(x \le X \le x+\Delta x) = f(x)\Delta x.$$

Primer:

Odrediti konstantu a tako da funkcija $f(x) = \begin{cases} ax^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$,

bude funkcija gustine raspodele verovatnoće neprekidne slučajne promenljive.

Zatim naći funkciju raspodele i izračunati $P(0 < X < 2)$.

Kako je

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int\limits_{0}^{1} ax^2 dx = 1 \Rightarrow a = 3.$$

Funkcija gustine glasi $f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0, x > 1 \end{cases}$.

Ova funkcija je definisana za svako R, pozitivna, i neprekidna svuda osim u tački x=1, pa može da bude funkcija gustine.

Funkcija raspodele prema formuli glasi: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int\limits_0^x 3x^2 dx = x^3, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$

Tražena verovatnoća $P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = 8$.

3.4. VAŽNI OBRASCI

Zakon raspodele diskretne slučajne promenljive

$$X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$$

Kumulativna funkcija raspodele diskretne slučajne promenljive

$$F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ p_{1,} & x_1 \le x < x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 \le x < x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ 1, & x_n \le x < \infty \end{cases}$$

Funkcija raspodele neptekidne slučajne promenljive

$$F(x)=P\big(X(\omega)\le x\big)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad -\infty < x < \infty$$

Vrednost verovatnoće neprekidne slučajne promenljive u intervalu

$$P(a < X < b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

3.5. ZADACI

1. Eksperiment se sastoji od bacanja dve kocke. Neka slučajna promenljiva predstavlja zbir brojeva koji se dobijaju prilikom bacanja. Naći zakon raspodele.

Rešenje:

Slučajna promenljiva uzima 11 mogućih vrednosti 2,3,………,12

Verovatnoće vrednosti slučajne peomenljive X su:

$$P(X=2)=\frac{1}{36}, P(X=3)=\frac{2}{36}, P(X=4)=\frac{3}{36}, \dots, P(X=12)=\frac{1}{36}.$$

Zakon raspodele je:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$$

2. U kesi se nalaze 5 belih i 3 crne kuglice. Vade se po 2 kuglice. Neka slučajna promenljiva X
predstavlja broj belih kuglica. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X.

Rešenje:
Slučajna promenljiva uzima 3 moguće vrednosti 0,1,2.
Broj belih kuglica je slučajna promenljiva sa verovatnoćama:

$$P(X=0)=\frac{3}{28}, P(X=1)=\frac{15}{28}, P(X=2)=\frac{10}{28}.$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{3}{28} & \frac{15}{28} & \frac{5}{14} \end{pmatrix}.$$

3. U bacanju 3 dinara broj grbova koji se može pojaviti na gornjim stranama dinara je 0,1,2,3. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj grbova, kao i funkciju raspodele.

Rešenje:
Neka je slučajna promenljiva X broj registrovanih grbova.

El.dog.	GGG	GGP	GPG	PGG	GPP	PGP	PPG	PPP
Broj grbova	3	2	2	2	1	1	1	0
verovatnoće	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8

Slučajna promenljiva uzima 4 moguće vrednosti 0,1,2,3

Broj grbova je slučajna promenljiva sa verovatnoćama:

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=1)=\frac{3}{8}, P(X=2)=\frac{3}{8}, P(X=3)=\frac{1}{8}.$$

Zakon raspodele verovatnoća broja grbova je: $X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$

Funkciju raspodela:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{8}, & 0\le x<1 \\ \frac{4}{8}, & 1\le x<2 \\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3 \\ 1, & x\ge 3 \end{cases}$$

4. U kutiji se nalaze 4 bele i 3 crne kuglice. Kuglice se vade do prvog pojavljivanja bele. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive X koja predstavlja broj izvlačenja kuglica.

Rešenje:

$$P(X=1)=\frac{4}{7},\ P(X=2)=\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{2}{7},$$

$$(X=3)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{4}{35},\ P(X=4)=\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}=\frac{1}{35}.$$

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{4}{7} & \frac{2}{7} & \frac{4}{35} & \frac{1}{35} \end{pmatrix} \qquad F(x)=\frac{6}{7}\begin{cases} 0 & x<1 \\ \frac{4}{7} & 1\le x<2 \\ \frac{6}{7} & 2\le x<3 \\ \frac{34}{35} & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

5. Slučajna promenljiva X data je zakonom raspodele

$$X:\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 \\ 0,08 & 0,4 & 0,32 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Naći verovatnoće događaja

$$P(X<2),\quad P(1\le X<3),\quad P(1<X\le 3).$$

Rešenje:

$$P(X<2)=P(X=-2)+P(X=1)=0,48$$
$$P(1\le X<3)=P(X=1)+P(X=1)=0,72$$
$$P(1<X\le 3)=P(X=2)+P(X=3)=0,52$$

6. Kocka za igru se baca do pojave petice, a najviše 4 puta. Neka je X broj bacanja. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X, funkciju raspodele i nacrtati grafik.

7. Kocka za igru se baca dva puta. Neka je X maksimum dobijenih brojeva. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X.

8. Data je $f(x)=\begin{cases} ce^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$. Odrediti nepoznati parametar c tako da ova funkcija bude funkcija gustine slučajne promenljive X. Zatim odrediti funkciju raspodele i izračunati $P(1<X<2)$, $P(X\ge 3)$ i $P(X<1)$.

Rešenje:

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} ce^{-3x}dx=-\frac{c}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=-\frac{c}{3}\left(\lim_{x\to\infty}e^{-3x}-1\right)=\frac{c}{3}.$$

$$\frac{c}{3}=1\Rightarrow c=3$$

$$F(x)=\begin{cases}\int_0^x 3e^{-3x}dx = 1-e^{-3x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$P(1<X<2)=F(2)-F(1)=e^{-3}-e^{-6}$$

$$P(X\ge 3)=1-P(X<3)=1-F(3)=e^{-9}$$

$$P(X<1)=F(1)=1-e^{-3}.$$

9. Data je $f(x)=\begin{cases}cx^2, & 1\le x\le 2\\ cx, & 2<x<3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}$.

Odrediti nepoznati parametar c tako da ova funkcija bude funkcija gustine slučajne promenljive X. Zatim odrediti funkciju raspodele i izračunati $P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)$, $P(X>2)$.

Rešenje:

Kako je

$$1=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_1^2 cx^2dx+\int_2^3 cxdx=c\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^2+c\frac{x^2}{2}\Bigg|_2^3\Rightarrow c=\frac{6}{29}.$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{6}{29}x^2, & 1\le x\le 2\\ \frac{6}{29}x, & 2<x<3\\ 0, & x\ge 3\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1\\ \int_1^x \frac{6}{29}x^2dx=\frac{2x^3-2}{29}, & 1\le x\le 2\\ \int_2^x \frac{6}{29}xdx=\frac{3x^2-4}{29}, & 2<x<3\\ 1, & x\ge 3\end{cases}$$

$$P\left(\frac{1}{2}<X<\frac{3}{2}\right)=P\left(1<X<\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{116},$$

$$P(X>2)=1-P(X<2)=\frac{15}{29}.$$

10. Odrediti konstantu a tako da funkcija $f(x)=\frac{a}{x^2+1}$, bude funkcija gustine raspodela verovatnoća neprekidne slučajne promenljive.
Zatim naći funkciju raspodela i izračunati $P(-1<X<1)$.

Rešenje:

Kako je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{a}{1+x^2}dx=a\left(arctg\infty-arctg(-\infty)\right)=$$
$$a\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1\Rightarrow a=\frac{1}{\pi}.$$

Funkcija gustine glasi $f(x)=\frac{1}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

Ova raspodela se zove ***Košijeva raspodela.***

Tražena verovatnoća

$$P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\pi\left(1+x^2\right)}=\frac{1}{\pi}\left(arctg1-arctg(-1)\right)=\frac{1}{2}.$$

11. Funkcija raspodele slučajne promenljive X data je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Naći:

a) funkciju gustine ,

b) verovatnoće $P(X > 2)$,

c) i $P(-3 < X \leq 4)$.

Rešenje:

a) Kako je $f(x) = F'(x) = \dfrac{dF}{dx} = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

b) $P(X > 2) = \int_2^{\infty} 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_2^{\infty} = e^{-4}.$

Ovaj izraz je bilo moguće i izračunati kao

$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-4}$, a kako je

$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \left(1 - e^{-4}\right) = e^{-4}$

c) $P(-3 < X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq -3) = F(4) - F(-3) =$

$\left(1 - e^{-8}\right) - 0 = 1 - e^{-8}$

Ili $P(-3 < X \leq 4) = \int_{-3}^{4} f(x) dx = \int_{-3}^{0} 0 dx + \int_0^4 2e^{-2x} dx = -e^{-2x} \Big|_0^4 = 1 - e^{-8}$.

12. Data je $f(x) = \begin{cases} a\left(4x - 2x^2\right), & x \in [0,2] \\ 0, & x > 2, x < 0 \end{cases}$. Odrediti nepoznati parametar a tako da ova funkcija bude funkcija gustine slučajne promenljive X. Zatim odrediti funkciju raspodele i skicirati oba grafika.

13. Data je $f(x) = ke^{-2|x|}$. Odrediti nepoznati parametar k tako da ova funkcija bude funkcija gustine slučajne promenljive X. Zatim odrediti funkciju raspodele $F(x)$ i izračunati $P(X > 2)$

4. PARAMETRI ILI BROJNE KARAKTERISTIKE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

Funkcija raspodele ili zakon raspodele, za diskretnu slučajnu promenljivu, i funkcija raspodele ili gustina raspodele verovatnoća, za neprekidnu slučajnu promenljivu predstavljaju potpune karakteristike tih promenljivih. Međutim, u mnogim praktičnim problemima, nije potrebno okarakterisati slučajnu promenljivu u potpunosti. Najčešće je potrebno ukazati samo na neke parametre (numeričke pokazatelje) koji do izvesne mere karakterišu bitne osobine raspodele verovatnoća.
Najveći praktični značaj imaju dve grupe parametara.

- Parametri koji reprezentuju centar rasturanja vrednosti slučajne promenljive,
- parametri koji mere to rasturanje oko centra rasturanja.

4.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA

Matematičko očekivanje je očekivana vrednost, srednja (prosečna) vrednost, nada, slučajne promenljive.

Definicija:
Ako je X diskretna slučajna promenljiva čija je raspodela verovatnoća jednaka

$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots x_n \\ p_1 & p_2 & \dots p_n \end{pmatrix}$ i $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, onda je ***matematičko očekivanje*** slučajne promenljive X

$$E(X) = x_1 P(X = x_1) + x_2 P(X = x_2) + \dots + x_n P(X = x_n) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Diskretna slučajna promenljiva može da uzima konačno mnogo, kao u predhodnoj definiciji ili prebrojivo mnogo vrednosti.

U specijalnom slučaju, kada je slučajna promenljiva X vezana za eksperiment koji se nezavisno n puta realizuje i verovatnoće su jednake. Ako slučajna promenljiva X uzima vrednost x_1 u f_1 u prvom eksperimenatu, x_2 u f_2 u drugom eksperimenatu i td. gde je $f_1 + f_2 + \dots f_n = n$, matematičko očekivanje iznosi

$$E(X) = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{n}$$

i predstavlja aritmetičku sredinu vrednosti $x_1, x_2, \dots x_n$.

Definicija:
Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $f(x)$, onda je ***matematičko očekivanje***

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx .$$

Napomena: Da bi postojalo matematičko očekivanje, nesvojstveni integral kod neprekidne slučajne promenljive, odnosno red kod diskretne slučajne promenljive, moraju da konvergiraju.

OSOBINE MATEMATIČKOG OČEKIVANJA

Neka je C proizvoljni realni broj, a X i Y slučajne promenljive. Tada važi:

$$E(C) = C$$

$$E(CX) = CE(X)$$

$$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Primer:

Neka je $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$ zakon raspodele diskretne slučajne promenljive X. Naći matematičko očekivanje $E(X)$ i zatim $E(5X+1), E(X^2)$.

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} + 2 \cdot \frac{3}{10} = \frac{39}{10}$$

$$E(5X+1) = 5E(X) + 1 = \frac{41}{2}$$

$$E(X^2) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 = 9 \cdot \frac{1}{10} + 25 \cdot \frac{6}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} = \frac{171}{10}.$$

Primer:

Data je neprekidna slučajna promenljiva sa funkcijom gustine

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & x < a, x > b \end{cases}.$$

Naći matematičko očekivanje $E(X)$ i $E(X^2)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \Big|_a^b = \frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{b^3 - a^3}{3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}.$$

Za matematičko očekivanje umesto oznake $E(X)$ se koriste oznake μ_X ili μ.

Iako se naziva očekivanje, matematičko očekivanje nije vrednost koju treba očekivati, čak ne mora da bude ni moguća vrednost slučajne promenljive.

Primer:
Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj pisama u tri bacanja novčića.

Zakon raspodele slučajne promenljive X je $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

Matematičko očekivanje $E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1,5$.

Matematičko očekivanje se naziva i momentom ***prvog reda.***

Moment k-tog reda definiše se kao $E\left(X^k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P\left(X = x_i\right)$.

Primer:
Dva igrača bacaju kocku. Pre bacanja prvi igrač uplati unapred neku svotu. Posle bacanja drugi igrač plaća prvom onoliko dinara koliki broj padne. Koliko treba da uplati prvi igrač da bi igra bila fer?

Ako bi prvi igrač uplatio 1 dinar, posle prvog bacanja drugi igrač bi morao da uplati prvom bar dinar, a verovatno i više, znači igra je nepovoljna za njega, drugog igrača. Ako prvi uplati 6 dinara, može da dobije uloženi novac, ali je verovatnije da će dobiti manje, pa je to nepovoljnije za prvog igrača.
Ali ako posmatramo matematičko očekivanje slučajne promenljive X koja predstavlja broj koji može da se dobije kada kocka padne, sa podjednakim verovatnoćama 1/6,

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5 .$$

Znači prvi igrač treba da uplatiti 3,5 dinara da bi igra bila podjednako povoljna za obojicu.

4.2. PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA

U nekim situacijama srednja vrednost nije dovoljna karakteristika za opisivanje pojava. To možemo da vidimo iz sledećih primera.

Primer:
Ako se kaže da je prosečna temperatura u nekom mestu tokom godine 15 stepeni, imamo utisak prijatne klime, ali možda je leti 40^0, a zimi -10^0.

Primer:
Posmatrajmo dve diskretne slučajne promenljive čiji su zakoni raspodele dati sa:

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \text{ i } Y:\begin{pmatrix} -60 & -30 & 44,5 \\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}.$$

U oba slučaja matematička očekivanja su ista, tj $E(X)=E(Y)=4$.

Odstupanja za prvu slučajnu promenljivu, $X-E(X)$, su redom -3, -2, 2 dok su za drugu promenljivu, $Y-E(Y)$, redom -64, -34, 40,5. Iako su im matematička očekivanja ista, odstupanja za promenljivu X su relativno mala, dok su za promenljivu Y velika, pa se raspodele slučajnih promenljivih dosta razlikuju.

Prema tome, osim srednje vrednosti potrebno je znati kolika su odstupanja, odnosno kolika je rasprostranjenost mogućih vrednosti slučajne promenljive oko očekivane vrednosti.

Definicija:
Neka je X slučajna promenljiva sa matematičkim očekivanjem $E(X)$.
Disperzija ili varijansa slučajne promenljive X se definiše kao matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive X od matematičkog očekivanja

$$D(X) = E(X - E(X))^2$$

Kvadratni koren varijanse naziva se ***standardna devijacija*** ili ***standardno odstupanje***

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

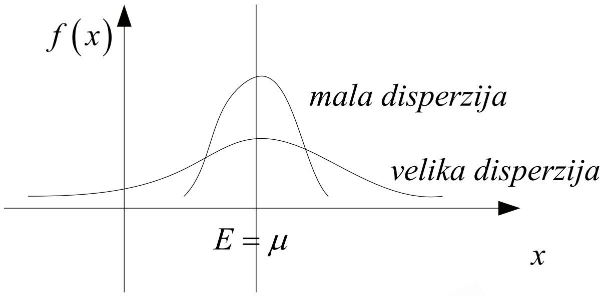
Definicija:
Ako je X diskretna slučajna promenljiva , onda je ***disperzija***

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i$$

Definicija:
Ako je X neprekidna slučajna promenljiva sa gustinom raspodele $f(x)$, onda je ***disperzija***

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)\, dx$$

Disperzija predstavlja meru rasturanja vrednosti slučajne promenljive X oko sredine $E(X)$. Ako je koncentracija vrednosti oko sredine velika, disperzija je mala, dok ako se vrednosti slučajne promenljive značajno rasipaju oko sredine, disperzija je velika. Ova činjenica je ilustrovana na narednom grafiku.



OSOBINE VARIJANSE

Neka je C proizvoljni realni broj, a X i Y slučajne promenljive. Tada važi:

$$D(C)=0$$
$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$
$$D(CX)=C^2D(X)$$
$$D(X+a)=D(X)$$

Ako su X i Y nezavisne slučajne promenljive

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

Primer:

Izračunati disperziju i standardno odstupanje slučajne promenljive X, ako je definisana sa $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$.

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{8},$$

$$D(X)=E(X-E(x))^2=E\left(X-\frac{5}{8}\right)^2=\left(0-\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{2}+\left(1-\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{3}{8}+\left(2-\frac{5}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{8}=\frac{31}{64}.$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{31}{64}},$$

ili koristeći osobinu po kojoj je $D(X)=E(X^2)-E(X)^2$

$$X^2:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$E(X^2)=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{3}{8}+4\cdot\frac{1}{8}=\frac{7}{8},$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{7}{8}-\left(\frac{5}{8}\right)^2=\frac{31}{64}.$$

Primer:
Neka je data gustina raspodele verovatnoće slučajne promenljive X

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x+1\right), & 0\le x\le 2 \\ 0, & x<0, x>2 \end{cases}.$$

Izračunati disperziju i standardnu devijaciju slučajne promenljive X.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx=\int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\frac{10}{9},$$

$$D(X)=\int_0^2\left(x-\frac{10}{9}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=\frac{26}{81},$$

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{26}{81}}$$

4.3. VAŽNI OBRASCI

Matematičko očekivanje diskretne slučajne promnljive

$$E(X)=x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+\ldots+x_nP(X=x_n)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_iP(X=x_i)$$

Matematičko očekivanje neprekidne slučajne promenljive

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx$$

Osobine matematičkog očekivanja

$$E(C)=C$$
$$E(CX)=CE(X)$$
$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

Disperzija ili varijansa slučajne promenljive

$$D(X)=E(X-E(X))^2$$

Standardna devijacija ili standardno odstupanje

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$$

Disperzija ili varijansa diskretne slučajne promenljive

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(X))^2\,p_i$$

Disperzija ili varijansa neprekidne slučajne promenljive

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-E(x))^2\,f(x)\,dx$$

Osobine disperzije

$$D(C)=0$$
$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$
$$D(CX)=C^2D(X)$$
$$D(X+a)=D(X)$$
$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$

4.4. ZADACI

1. Neka je dat zakon raspodele za X izrazom $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \frac{2}{10} & \frac{3}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}$.

Naći matematičko očekivanje.

Rešenje:

U ovom primeru aritmetička sredina bila bi $\overline{x}=\frac{1}{10}(2x_1+3x_2+5x_3)$,

ili $x_1P(X=x_1)+x_2P(X=x_2)+x_3P(X=x_3)$, što je u stvari matematičko očekivanje.

2. Data je slučajna promenljiva X zakonom raspodele $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Naći

$E(X), E(3X+4), E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X)=-2\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$E(3X+4)=E(3X)+4=3E(X)+4=7$$

$$E(X^2)=(-2)^2\cdot\frac{1}{3}+1^2\cdot\frac{1}{6}+3^2\cdot\frac{1}{2}=6.$$

3. Prvi igrač baca 2 kocke, a drugi igrač mu plaća onoliko dinara koliko iznosi zbir dobijenih brojeva bačenih kocki. Kolika je srednja dobit prvog igrača?

Rešenje:

$$X:\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & 7 & \cdots & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \cdots & \frac{6}{36} & \cdots & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix},$$

$$E(X)=2\cdot\frac{1}{36}+3\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}+5\cdot\frac{4}{36}+6\cdot\frac{5}{36}+7\cdot\frac{6}{36}+8\cdot\frac{5}{36}+9\cdot\frac{4}{36}+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=7.$$

4. Prvi igrač baca 2 kocke, a drugi igrač mu plaća onoliko dinara koliko iznosi proizvod dobijenih brojeva bačenih kocki. Kolika je srednja dobit prvog igrača?

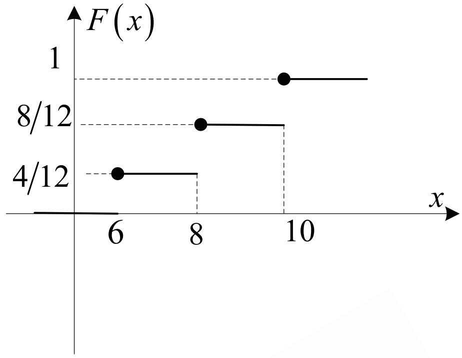
Rešenje: 12,15.

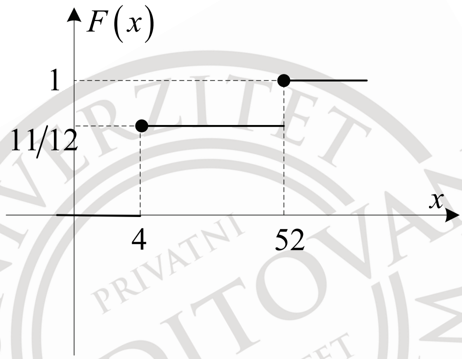
5. Dve košarkaške ekipe su postigle 96 poena. U prvoj 4 igrača su postigla po 6 , 4 igrača po 8 i 4 po 10 poena, a u drugij ekipi 11 igrača po 4 i 1 po 52 poena. Neka su X i Y slučajne promenljive – broj poena slučajno izabranog igrača. Odrediti njihove funkcije raspodele, grafički ih prikaži i nađi matematička očekivanja.

Rešenje:

$$X=\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ \frac{4}{12} & \frac{4}{12} & \frac{4}{12} \end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix} 4 & 52 \\ \frac{11}{12} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<6 \\ \frac{4}{12}, & 6\le x<8 \\ \frac{8}{12}, & 8\le x<10 \\ 1, & x\ge 10 \end{cases} \qquad F(x)=\begin{cases} 0, & x<4 \\ \frac{11}{12}, & 4\le x<52 \\ 1, & x\ge 52 \end{cases}$$





$$E(X)=\frac{1}{3}(6+8+10)=8,\quad E(Y)=\frac{11}{12}\cdot 4+\frac{1}{11}\cdot 52=0\,.$$

6. Lutrija ima sledeće dobitke:

1 dobitak	od 500 000 dinara
2 dobitka	od 100 000 dinara
5 dobitaka	od 50 000 dinara
20 dobitaka	od 10 000 dinara
100 dobitaka	od 5 000 dinara
1000 dobitaka	od 1 000 dinara

Ako cena jednog loza iznosi 100 dinara i izdato je 50 000 lozova, koliko je matematičko očekivanje osobe koja kupi loz?

Rešenje:

Verovatnoća da učesnik izvuče loz sa nekim dobitkom je

$$P = \frac{k}{50\,000}, \quad k = 1,2,3,4,5\,.$$

$$E(X) = \frac{1}{50000}\left(1\cdot 500000 + 2\cdot 100000 + 5\cdot 50000 + 20\cdot 10000 + 100\cdot 5000 + 1000^2\right) - 100 = -47$$

Može se dakle zaključiti da je lutrija nepovoljna za učesnika, od svakog kupljenog loza gubi 47 dinara.

7. Prodavac sladoleda zaradi 120 dinara kada je lep dan i 40 dinara kada je hladno.Koliko može da očekuje da zaradi u danu za koji je verovatnoća da će biti hladno 0,35?

Rešenje:

$$E(X) = 120\cdot 0{,}65 + 40\cdot 0{,}35 = 84$$

8. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkcija gustine

$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x < 0; x > 1 \end{cases}$. Naći $E(X), E(3X-2), E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(3x^2\right)dx = \int_0^1 3x^3 dx = \frac{3}{4}$$

$$E(3X-2) = 3E(X) - 2 = 3\cdot\frac{3}{4} - 2 = \frac{1}{4}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2\left(3x^2\right)dx = \int_0^1 3x^4 dx = \frac{3}{5}$$

9. Neka je X neprekidna slučajna promenljiva čija je funkcija gustine

$f(x) = \begin{cases} 3e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$. Naći $E(X), E(3X-2), E(X^2)$.

Rešenje:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} x\left(2e^{-2x}\right)dx=\int_{0}^{\infty} 2xe^{-2x}\,dx=$$

$$2\lim_{a\to\infty}\left(-x\frac{e^{-2x}}{2}-\frac{e^{-2x}}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}$$

$$E(3X-2)=3E(X)-2=3\cdot\frac{1}{2}-2=-\frac{1}{2}$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx=\int_{0}^{\infty} x^2\left(2e^{-2x}\right)dx=\int_{0}^{\infty} 2x^2e^{-2x}\,dx=$$

$$2\lim_{a\to\infty}\left(-x^2\cdot\frac{e^{-2x}}{2}-2x\cdot\frac{e^{-2x}}{4}-\frac{e^{-2x}}{4}\right)\Big|_0^a=\frac{1}{2}$$

10. Dokazati teoremu $D(X)=E\left(X^2\right)-E^2(X)$.

Rešenje:

$$D(X)=E\left(X-E(X)\right)^2=E\left(X^2-2XE(X)+E^2(X)\right)=E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)+E^2(X)=$$
$$E\left(X^2\right)-E^2(X)$$

11. Odrediti disperziju slučajne veličine X čiji je zakon raspodele dat sa

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Rešenje:

$$E(X)=\frac{1}{10}(2\cdot 1+3\cdot 6+5\cdot 3)=3,5$$

$$X^2:\begin{pmatrix} 4 & 9 & 25 \\ \frac{1}{10} & \frac{6}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$E\left(X^2\right)=\frac{1}{10}(4\cdot 1+9\cdot 6+25\cdot 3)=13,3$$

$$D(X)=E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2=13,3-(3,5)^2=1,05\,.$$

12. U kutiji se nalazi 5 belih i 7 crvenih kuglica. Slučajno se bira odjednom 8 kuglica. Neka je X broj belih kuglica među izabranima. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive X , njeno matematičko očekivanje i disperziju.

13. Funkcija gustine data je izrazom $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0<x<2\\ 0, & x\le 0; x\ge 2\end{cases}$. Odrediti matematičko očekivanje i disperziju.

Rešenje:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\int_0^2 \frac{1}{2}x^2dx=\frac{4}{3}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(x-E(X)\right)^2 f(x)\,dx=\int_0^2\left(x-\frac{4}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{2}{9}$$

14. Televizori sa različitim kvarovima donose se u radionicu na opravke. Neka je vreme popravke slučajna promenljiva X. Ako je funkcija raspodele data sa

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1-e^{-kt}, & t\ge 0\end{cases}$$

Naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive .

Rešenje:

Kako je $f(t)=F'(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ ke^{-kt}, & t\ge 0\end{cases}$

$$E(X)=\int_0^{\infty} tf(t)\,dt=\int_0^{\infty} tke^{-kt}dt=\frac{1}{k}$$

$$E(X^2)=\int_0^{\infty} t^2 f(t)\,dt=\int_0^{\infty} t^2ke^{-kt}dt=\frac{2}{k^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1}{k^2}.$$

15. Matematičko očekivanje slučajne promenljive X jednako je 12,5 a disperzija 3,48. Izračunati matematičko očekivanje i disperziju sledećih slučajnih promenljivih:

a) $3X$; b) $X-10$; c) $\frac{X}{5}$; d) $\frac{2X+5}{6}$; e) X^2

16. Baca se dinar. Označimo sa X broj bacanja dinara do prve pojave glave. Naći matematičko očekivanje slučajne promenljive X.

Rešenje:

U pitanju je slučajna promenljiva koja ima prebrojivo mnogo vrednosti.

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\ldots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3}\ldots \end{pmatrix}.$$

$$E(X)=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+3\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}.$$

Znajući da je $1+x+x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}$, diferenciranjem dobijamo

$$1+2x+3x^2+\ldots=\frac{1}{(1-x)^2}, \text{ pa je}$$

$$E(X)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2.$$

5. RASPODELE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH

5.1. BERNULIJEVI EKSPERIMENTI-BINOMNA RASPODELA

Dve najvažnije raspodele diskretne slučajne promenljive su ***binomna raspodela*** i njena generalizacija ***Puasonova raspodela.***

Binomna raspodela vezana je za Bernulijeve eksperimente.

Bernulijevi eksperimenti su niz nezavisnih eksperimenata, sa dva moguća ishoda, koji se izvode pod istim uslovima. U datim eksperimentima događaj A se ili može realizovati ili ne realizovati. Verovatnoća realizacije događaja A je ista u svim ponavljanjima eksperimenta.

.

Primer:
Ishodi uzastopnih bacanja novčića čine niz Bernulijevih eksperimenata.
Ako je A događaj da padne pismo, verovatnoća događaja A je
$P(A)=\frac{1}{2}$ u svakom uzastopnom bacanju..

Definicija:
Binomna raspodela
Neka promenljiva X predstavlja broj ponavljanja dodađaja A u n ponavljanja eksperimenta.
Verovatnoća da se u n eksperimenata događaj A realizuje k puta, ako je verovatnoća svake realizacije događaja p, iznosi

$$P(A)=P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Za binomnu raspodelu se koristi oznaka $X:B(n,p)$.

Primer:
Kolika je verovatnoća da se u 10 uzastopnih bacanja novčića 6 puta pojavi glava?
Neka je A događaj pojave glave. Verovatnoća događaja A u svakom bacanju iznosi $p=\frac{1}{2}$.

$$P(A)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-6}=0,205.$$

Primer:
Verovatnoća da je jedan proizvod defektan je 0,01. Iz skladišta se uzima 100 proizvoda. Kolika je verovatnoća da
a) bude tačno 5 defektnih,
b) broj defektnih nije veći od 10?

Neka je A događaj da je proizvod defektan, tada je $p=0,01$. Neka je slučajna promenljiva X broj defektnih proizvoda.
a) Za $n=100$ i $k=5$ sledi

$$P(X=5)=\binom{100}{5}0,01^5\cdot 0,99^{95}=0,00579.$$

b)

$$P=P(X=0)+P(X=1)+\ldots+P(X=10)=$$

$$P\left(\sum_{k=0}^{10}(X=k)\right)=\sum_{k=0}^{10}\binom{100}{k}0,01^k\cdot 0,99^{100-k}$$

Matematičko očekivanje, ***disperzija*** i ***standardno odstupanje*** diskretne slučajne promenljive date binomnim zakonom raspodele iznose:

$$E(X)=np,$$
$$D(X)=npq,$$
$$\sigma=\sqrt{D(X)}=\sqrt{npq}.$$

Dokaz:

Ako znamo da je $p+q=1$, onda

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}p^{k}q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}=$$

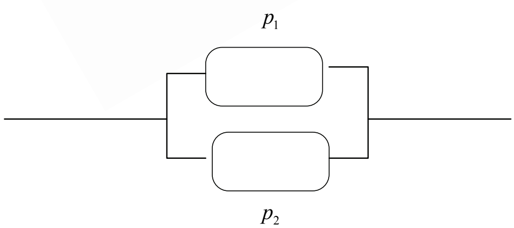
$$np\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-1-(k-1)}=np(p+q)^{n-1}=np.$$

Dokaz za disperziju se slično izvodi.

Funkcija raspodele za slučajnu promenljivu koja ima binomnu raspodelu je:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \sum_{k<x}\binom{n}{k}p^{k}q^{n-k}, & 0\le x<n\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

Pouzdanost nekog uređaja se definiše kao verovatnoća da uređaj ispravno radi. Ako je sistem sačinjen od nezavisnih komponenata, tada se pouzdanost može odrediti ako znamo pouzdanost pojedinačnih komponenti. Osnovni načini povezivanja komponenti su ***redna*** i ***paralelna*** veza.



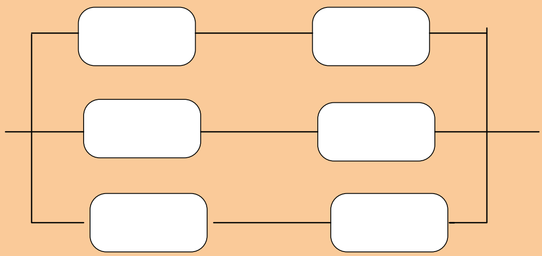
Sistem od dve redne komponente radi samo ako obe komponente rade. Pouzdanost sistema je dakle $p=p_1p_2$.

Sistem od dve paralelne komponente ne radi samo ako ni jedna komponenta ne radi. Dakle verovatnoća da sistem ne radi je $(1-p_1)(1-p_2)$. Pouzdanost sistema je dakle $p = 1-(1-p_1)(1-p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

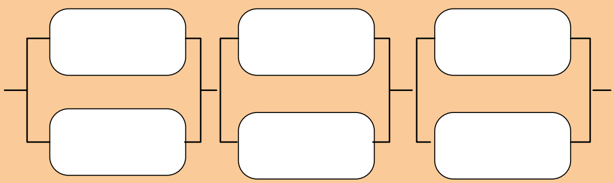
Primer:

Data su dva sistema na slici. Koji od njih ima veću pouzdanost?

I



II



Neka su p_1, p_2 pouzdanosti datih sistema.

Sistem I se svodi na paralelnu vezu 3 komponente od kojih je svaka redna sa pouzdanošću $p_1 = 1-(1-p^2)^3 = 3p^2 - 3p^4 + p^6$.

Sistem II se svodi na rednu vezu 3 komponente od kojih je svaka paralelna sa pouzdanošću $2p - p^2$, pa dobijamo $p_2 = (2p-p^2)^3 = 8p^3 - 12p^4 + 6p^5 - p^6$.

Dakle

$$p_1 - p_2 = p^2(p-1)^2(2p^2 - 2p + 3) > 0,$$

Pa prema tome sistem I ima veću pouzdanost.

5.2. POASONOVA RASPODELA

Poasonova (Simeon Denis Poisson 1781-1840) raspodela definiše verovatnoće broja slučajnih događaja u jedinici vremena ili prostora.

Može da se koristi kao model za broj telefonskih poziva u jedinici vremena, broj osoba u nekom redu, broj autobusa koji dolaze na stanicu u jedinici vremena, broj radioaktivnih raspada nekog materijala u jedinici vremena, broj retkih bolesti u jednoj državi i sl.

Ovi događaji su međusobno nezavisni, a u teorijskom smislu može da ih bude i beskonačno mnogo, za razliku od binomne raspodele kojih ima konačno mnogo.

Definicija:
Neka je X slučajna promenljiva za koju važi zakon raspodele

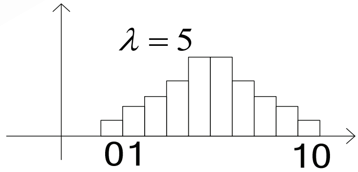
$$P(X=k)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \quad k=0,1,2,\cdots$$

Ova raspodela se naziva ***Poasonova raspodela*** u oznaci $X:P(\lambda)$,

k je broj realizovanih događaja u jedinici vremena ili prostora, a λ je parametar raspodele i predstavlja prosečan broj ovih događaja .

Zakon raspodele je $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)=e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$,

i može se prikazati grafikom koji nazivamo ***histogram.***



Osnove pravougaonika su centrirane u tačkama $k = 0,1,\ldots,10$, a njihova visina jednaka je $P(X = k)$. Ukupna površina svih pravougaonika je 1. Na slici je prikazano samo nekoliko, jer je visina preostalih pravougaonika zanemarljivo mala.

Primer:
Sekretarica firme prima u proseku 5 telefonskih poziva u 10 minuta.

a) Kolika je verovatnoća da će u periodu od 10 min. primiti tačno 1 poziv?
b)Kolika je verovatnoća da u periodu od 10 min. neće biti poziva?

U pitanju je Poasonova raspodela sa paramertom $\lambda = 5$

a) $P(X = 1) = e^{-5}\dfrac{5^1}{1!} = 0,0336$,

b) $P(X = 0) = e^{-5}\dfrac{5^0}{0!} = 0,0067$.

Matematičko očekivanje, ***disperzija*** i ***standardno odstupanje*** diskretne slučajne promenljive date Poasonovim zakonom raspodele iznose:

$$E(X) = \lambda,$$
$$D(X) = \lambda,$$
$$\sigma = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}.$$

5.3. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE POASONOVOM

Poasonova raspodela je nastala kao granični slučaj binomne raspodele. Naime, kada u binomnoj raspodeli sa parametrima n i p proizvod $np \to \lambda$, ako je n veliko, a p malo, tada binomna raspodela teži Poasonovoj raspodeli sa parametrom λ.
U praksi zamena se vrši ako je $np \le 10$.

a) $P(X=k)\approx e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$,

b) $P(X\le m)\approx \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$,

c) $P(X>m)\approx 1-\sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

Primer:
Verovatnoća proizvodnje defektnog proizvoda je 0,003. Naći verovatnoću da će od 1000 slučajno izabranih proizvoda biti:

a) 4 defektna,
b) bar 1 defektan,
c) ne više od 2 defektna.

Kako je $n=1000$, $p=P(A)=0,003$; $q=1-p=P(\overline{A})=0,997$, a slučajna promenljiva je broj defektnih elemenata koja ima binomnu raspodelu $X:B(1000;0,003)$, imamo:

a) $P(X=4)=\binom{1000}{4}0,003^4\cdot 0,997^{996}$.

U ovom slučaju $np=3=\lambda<10$, pa će raspodela slučajne promenljive X imati približno Poasonovu raspodelu

$$P(X=4)\approx e^{-3}\cdot\frac{3^4}{4!}\approx 0,1680.$$

b)

$$P(X\ge 1)=P(1\le X\le 1000)=1-P(X<1)=1-P(X=0)\approx$$

$$1-e^{-3}\cdot\frac{3^0}{0!}=1-\frac{1}{e^3}\approx 1-0,04978=0,95022$$

c)

$$P(0\le X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$$

$$\approx e^{-3}\cdot\frac{3^0}{0!}+e^{-3}\cdot\frac{3^1}{1!}+e^{-3}\cdot\frac{3^2}{2!}\approx 0,423190$$

5.4.NORMALNA – GAUSOVA RASPODELA

Normalna raspodela zauzima centralno mesto u teoriji verovatnoće i njenim primenama. Nosi naziv po nemačkom naučniku Karlu Friederichu Gaussu (1777-1855). Međutim, normalnu raspodelu prvi je proučavao francuski matematičar i sveštenik Abraham de Moivre (1667-1754). Osnovna Gausova zasluga je otkriće da se slučajne greške raznih merenja mogu predstaviti normalnom raspodelom.

Slučajne promenljive koje imaju normalnu raspodelu nastaju kao rezultat velikog broja uticaja, pri čemu je efekat pojedinačnog uticaja neznatan u odnosu na celokupnu sumu efekata svih pojedinačnih uticaja.

Tipičan primer su promenljive koje nastaju iz ponovljenih merenja jednog istog objekta, jer istim aparatom i sa istom preciznošću ne dobijaju se uvek isti rezultati. Na rezultate merenja utiču slučajni faktori (šum merenja) koji se ne mogu kontrolisati i koji variraju od jednog merenja do drugog.

Ako neka slučajna promenljiva nema normalnu raspodelu može se transformosati na normalnu slučajnu promenljivu relativno jednostavnim transformacijama, tako da se neke složene raspodele mogu aproksimirati normalnom raspodelom.

Neka je X data neperekidna slučajna promenljiva.
Ako je njena ***funkcija gustine*** verovatnoće

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad ,x\in(-\infty,+\infty),$$

odnosno funkcija raspodele verovatnoće

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad ,x\in(-\infty,+\infty),\ \mu,\sigma^2\in R,$$

onda slučajna promenljiva ima ***normalnu*** ili ***Gausovu raspodelu.***
Za normalnu raspodelu koristi se oznaka $X\sim N(\mu,\sigma^2)$.

Može se dokazati da su ***matematičko očekivanje i disperzija*** slučajne promenljive koja ima normalnu raspodelu:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

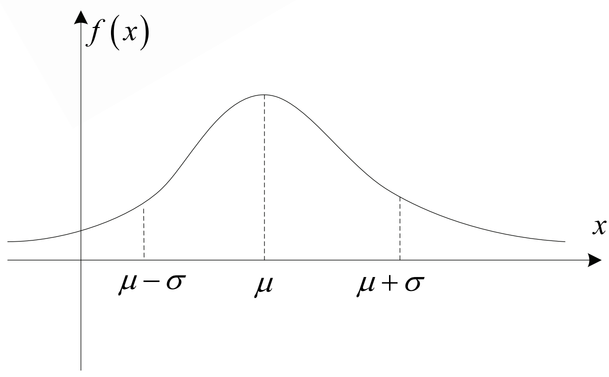
$$\sigma^2 = D(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Dakle Gausova raspodela je raspodela sa centrom u μ i standardnim odstupanjem σ.

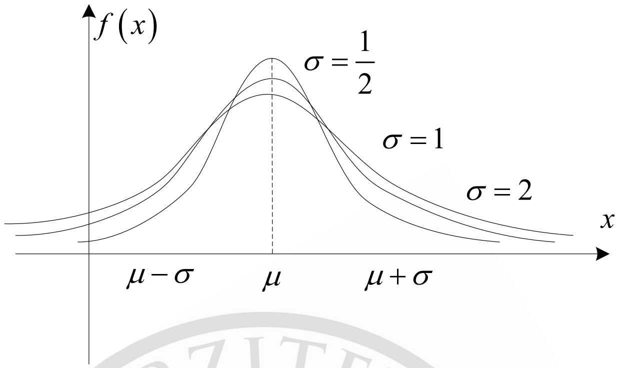
Kao što znamo funkcija gustine verovatnoće $f(x)$ zadovoljava uslove:

1. Funkcija $f(x)$ je definisana za sve realne brojeve,
2. $f(x) \geq 0$,
3. Kriva gustine je simetrična u odnosu na pravu $x = \mu$, tj. $f(x-\mu) = f(-(x-\mu))$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$,
5. U tački $x = \mu$ funkcija dostiže maksimum $f_{\max}(\mu) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.
6. Prevojne tačke su tačke sa apscisama $\mu \pm \sigma$.

Grafik funkcije gustine prikazan je na sledećoj slici:



Ukoliko je manje standardno odstupanje σ, utoliko je veća koncentracija verovatnoća oko očekivane, srednje vrednosti μ, slučajne promenljive X.



Definicija:
Ako je $\mu = 0$, a $\sigma = 1$, tada se normalna raspodela zove ***standardna raspodela.***
Funkcija gustine je oblika

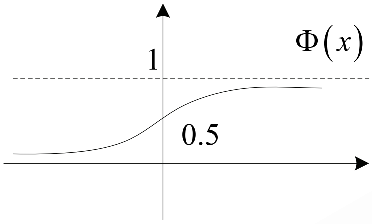
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , x \in (-\infty, +\infty),$$

odnosno funkcija raspodele

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad , x \in (-\infty, +\infty), \ \mu, \sigma^2 \in R .$$

Oznaka za standardnu normalnu raspodelu je $N(0,1)$.

Grafik funkcije raspodele prikazan je na sledećoj slici:



Funkcija $\Phi(x)$ ima sledeće osobine:

1. $\Phi(0) = 0,5$
2. $\Phi(+\infty) = 1, \Phi(-\infty) = 0$
3. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
4. $P(a < X < b) = \Phi(b) - \Phi(a)$

Funkcija gustine nema primitivnu funkciju u skupu elementarnih funkcija. Prema tome, vrednosti funkcije raspodele, koja je definisana nesvojstvenim integralom, mogu da se odrede samo numeričkom inregracijom. Za praktična izračunavanja vrednosti funkcije raspodele standardne raspodele isključivo se koristi tablica približnih vrednosti funkcije $\Phi(x)$, koja se nalazi i na kraju udžbenika.

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$, onda slučajna promenljiva Z ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$, ako je $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$.

Normalna raspodela

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	7054	.7088	.7123	.7157	.7190	7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	9846	9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	9994	.9995	9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	9996	.9996	.9996	.9997
3.4	9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Neka slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N\left(\mu,\sigma^2\right)$. Iz tablica za standardnu normalnu raspodelu nalazimo da je

$$\left(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma\right) = 0,68$$

$$\left(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma\right) = 0,955$$

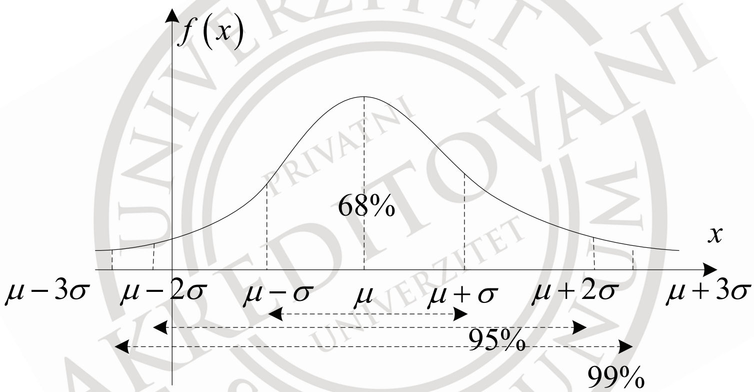
$$\left(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma\right) = 0,997$$

Ovo znači da možemo očekivati da će veliki broj vrednosti slučajne promenljive X biti raspodeljen na sledeći način:

Oko68% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu-\sigma, \mu+\sigma$,

Oko 95% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu-2\sigma, \mu+2\sigma$,

Oko 99% svih vrednosti naći će u intervalu $\mu-3\sigma, \mu+3\sigma$.



Poslednji rezultat znači da će se skoro sve vrednosti slučajne promenljive naći u intervalu $\left(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma\right)$. Ova osobina normalne raspodele poznata je pod nazivom ***3 sigme.***

Ovo znači da će se u ovom intervalu skoncentrisati skoro sva 'masa' verovatnoća.

Tako na primeru, ako na pakovanju nekog proizvoda piše da je težina $1kg \pm 10g$, to znači da je težina proizvoda normalna slučajna promenljiva sa $\mu = 1kg \ i \ \sigma = \frac{10}{3} g$.

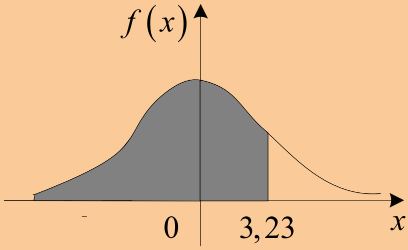
Pravilo tri sigme omogućava da se otkriju grube greške merenja. Podaci koji nisu u opsegu $\mu \pm 3\sigma$, su najverovatnije pogrešni.

Primer:

Izračunati

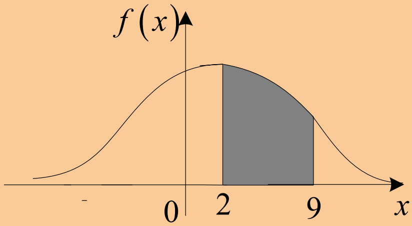
a) $P\left(X \le 3,23\right)$ ako je $N\left(0,1\right)$

$P\left(X \le 3,23\right) = \Phi\left(3,23\right) = 0,999381$



b) $P\left(2 \le X \le 9\right)$ ako je $N\left(0,1\right)$

$P\left(2 \le X \le 9\right) = \Phi\left(9\right) - \Phi\left(2\right) = 1 - 0,9772 = 0,0228$



Primer:

Ako je $\mu = 6, \sigma^2 = 4$ izračunati

a) $P\left(X < 8\right)$

$$P\left(X < 8\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{8-6}{2}\right) = P\left(Z < 1\right) = \Phi\left(1\right) = 0,8413$$

b) $P\left(X < 3\right)$

$$P\left(X < 3\right) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{3-6}{2}\right) = P\left(Z < -1,5\right) = \Phi\left(-1,5\right) = 1 - \Phi\left(1,5\right) = 0,0668$$

Primer:

Izračunati $P\left(2 \le X \le 9\right)$ ako je $N\left(4,1\right)$.

$$P(2 \le X \le 9) = P\left(\frac{2-4}{1} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{9-4}{1}\right) = P(-2 \le Z \le 5) = \Phi(5) - \Phi(-2) =$$

$$\Phi(5) - 1 + \Phi(2) = 1 - 1 + 0{,}9772 = 0{,}9772$$

Primer:
Težina određene grupe dece u jednom obdaništu normalno je raspoređena sa matematičkim očekivanjem 15kg i standardnim odstupanjem od 3kg. Kolika je verovatnoća da će slučajno izabrano dete imati težinu između 11kg i 17kg.

Neka je slučajna promenljiva X težina dece normalnom raspodelom $N(15,9)$, tada

$$P(11 \le X \le 17) = P\left(\frac{11-15}{3} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{17-15}{3}\right) = P(-1{,}33 \le Z \le 0{,}66) =$$

$$\Phi(0{,}66) - \Phi(-1{,}33) = \Phi(0{,}66) - 1 + \Phi(1{,}33) = 0{,}7454 - 1 + 0{,}9082 = 0{,}6539$$

Slučajne promenljive koje imaju normalnu raspodelu nastaju kao rezultat velikog broja uticaja , pri čemu je efekat pojedinačnog uticaja zanemarljiv. Kao tipični primeri ovakvih slučajnih promenljivih mogu se uzeti promenljive koje se dobijaju ponovljenim merenjima (merenje zemljišta u geodeziji, merenje težine tela, merenje dimenzija raznih predmeta, merenja otpora u električnim kolima i sl), iz ponovljenih eksperimenata, merenja u serijskim proizvodnjama proizvoda i sl.

5.5. APROKSIMACIJE BINOMNE RASPODELE NORMALNOM

Ako slučajna promenljiva X ima binomnu raspodelu sa parametrima n i p, kod koje je $np \ge 10$, bez velike greške aproksimacija se vrši normalnom raspodelom i to:

a) $P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \Phi(Z)$, gde je $Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}}$,

b) $P(a \le X \le b) \approx P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}} \le Z \le \frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right)$.

Primer:

Naći verovatnoću dobijanja između 30 i 60 glava u 100 bacanja novčića.

$$n = 100, \quad p = P(A) = 0,5, q = P(\overline{A}) = 0,5$$

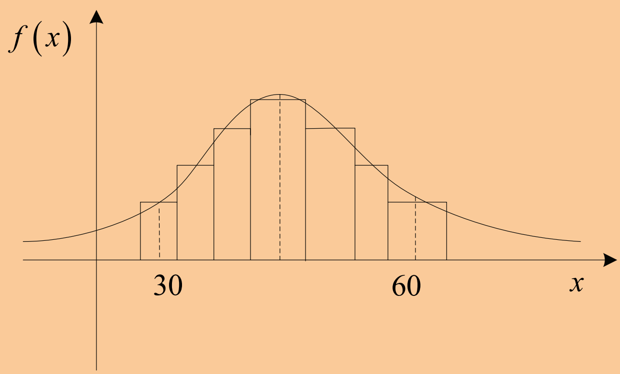
$$X : B(100;0,5)$$

$$P(30 \le X \le 60) = \sum_{k=30}^{60} \binom{100}{k} \cdot 0,5^{k} \ 0,5^{40-k}$$

Kako je $np = 50 > 10$, vrši se aproksimacija normalnom raspodelom

$$P(30 \le X \le 60) = P\left(\frac{30-50}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{60-50}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\right) = P(-4 \le Z \le 2) =$$

$$\Phi(2) - \Phi(-4) = \Phi(2) - 1 + \Phi(4) = 0,97725 - 1 + 1 = 0,97725$$



Primer:

Verovatnoća proizvodnje defektnog proizvoda je 0,05. Naći verovatnoću da među 500 slučajno izabranih proizvoda bude između 5 i 15 defektnih proizvoda.

$$n = 100, \quad p = P(A) = 0,05, q = P(\overline{A}) = 0,95$$

$$X : B(500;0,05)$$

$$P(20 \le X \le 40) = \sum_{k=5}^{15} \binom{500}{k} \cdot 0,05^{k} \ 0,95^{40-k}$$

Kako je $np = 25 > 10$, vrši se aproksimacija normalnom raspodelom.

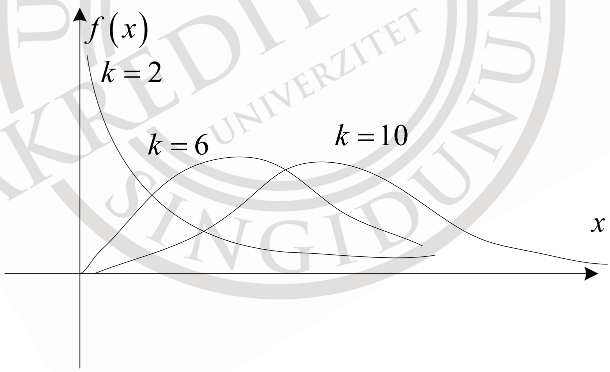
$$P(5 \le X \le 15) = P\left(\frac{5-25}{\sqrt{500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}} \le \frac{X-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{15-25}{\sqrt{500 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95}}\right) = P(-4{,}1 \le Z \le -2{,}09) =$$
$$P(2{,}09 \le Z \le 4{,}1) = \Phi(4{,}1) - \Phi(2{,}09) = 1 - 0{,}98169 = 0{,}01831$$

5.6. χ^2 RASPODELA

Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neprekidne slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom $N(0,1)$.

Zbir njihovih kvadrata $\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2$ definiše slučajnu promenljivu koja ima χ^2 raspodelu sa $k = n-1$ stepena slobode.

Funkcija gustine kod χ^2 raspodele zavisi samo od stepena slobode i ona je Ojerova gama funkcija, $\Gamma(x)$, što prevazilazi elementarna znanja ovog kursa.



Grafik predstavlja funkciju gustine za tri vrednosti stepena slobode $k = 2, 6, 10$.

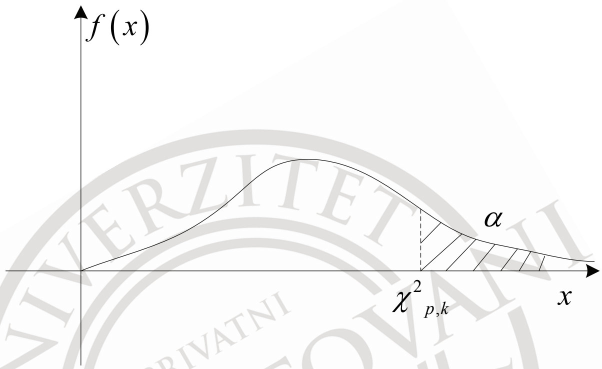
Funkcija gustine ima sledeće osobine:

Asimetrična
Sa povećanjem broja k transformoše se u Posonovu raspodelu
Kada je k dovoljno veliki broj raspodela se asimptotski približava normalnoj.

Matematičko očekivanje je $E(X) = k$

Disperzija $\sigma^2(X) = 2k$

Za izračunavanje vrednosti χ^2 raspodele koriste se tablice koje za dati stepen slobode, obično 1,2,....30 i dati broj α, obično 0,01; 0,05, čitamo vrednosti $\chi^2_{k,\alpha}$, takve da je $P\left(\chi^2 < \chi^2_{k,\alpha}\right) = 1 - \alpha$.



Grafik predstavlja funkciju gustine, a verovatnoća α predstavlja osenčenu površinu sa slike.

Ova raspodela se koristi za određivanje intervala poverenja disperzije, za testiranje saglasnosti varijansi i sl.

5.7. STUDENTOVA RASPODELA

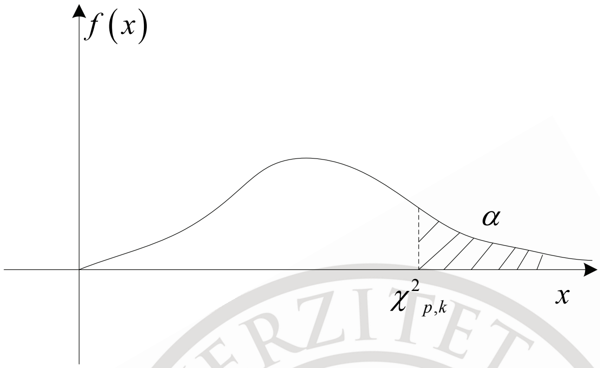
Neka su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ neprekidne slučajne promenljive sa standardnom normalnom raspodelom $N(0,1)$, ali čija funkcija gustine sadrži parametar *k* koji se naziva ***broj stepena slobode***.

U ovom slučaju se definiše slučajna promenljiva $t = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} = \dfrac{Z}{\sqrt{\dfrac{\chi^2}{k}}}$,

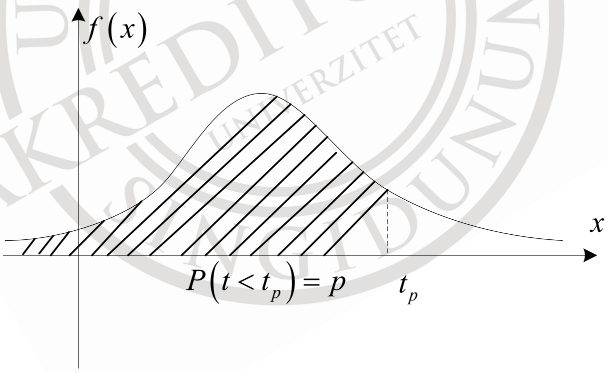
gde je $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, a

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)$ procena nepoznate disperzije σ^2.

Ova raspodela se zove ***studentova*** ili ***t -raspodela.***

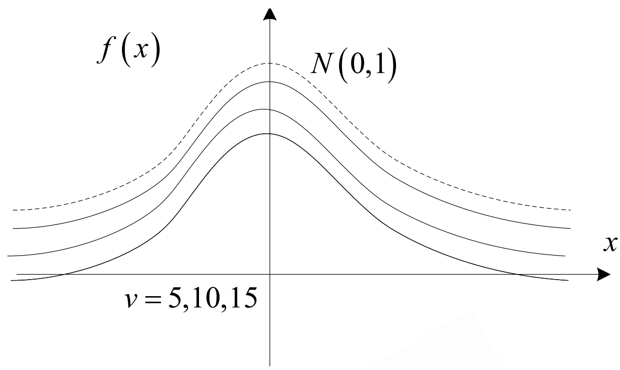


Za određeni stepen slobode v i verovatnoću p na osnovu tablica se izračunava pozitivna vrednost t_p, tako da je $P\left(t < t_p\right) = p$.



Grafik predstavlja funkciju gustine, a osenčena površina verovatnoću p za koju važi da je $P\left(t < t_p\right) = p$, kada je u pitanju jednostrai interval ili $P\left(|t| < t_p\right) = p$, ako je u pitanju dvostrani interval.

Za veliko n, odnosno za $n \geq 30$ t -raspodela se aproksimira sa normalnom.



Funkcija gustine kod studentove t-raspodele je gama funkcija, $\Gamma(x)$, što prevazilazi elementarna znanja ovog kursa.

Studentova raspodela se koristi u testiranju srednjih vrednosti, definisanju intervala poverenja ocene srednih vrednosti, oceni grubih grešaka u uzorku i sl.

Napomena: Ovu raspodelu otkrio je početkom dvadesetog veka Vilijam Goset koji je radio u pivari, pa je svoje radove izdavao pod pseudonimo student.

V	*995	'.99	'.975	'.95	'90	'.80	'.75	'.70	'.60	'.55
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2 88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
OC	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

Primer:
Za $v = 15$ i $p = 0,99$, na osnovu tablice dobićemo
$f\left(v-1, p\right) = f\left(14; 0,99\right) = 2,62$.

5.8. VAŽNI OBRASCI

Binomna raspodela

$$P\left(A\right) = P\left(X = k\right) = \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k}$$

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje za binomnu raspodelu

$$E\left(X\right) = np$$

$$D\left(X\right) = npq$$

$$\sigma = \sqrt{D\left(X\right)} = \sqrt{npq}$$

Funkcija raspodele za binomnu raspodelu

$$F\left(x\right) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sum\limits_{k<x} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, & 0 \le x < n \\ 1, & x \ge 0 \end{cases}$$

Poasonova raspodela

$$P\left(X = k\right) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

Matematičko očekivanje, disperzija i standardno odstupanje za Poasonovu raspodelu

$$E\left(X\right) = \lambda$$

$$D\left(X\right) = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{D\left(X\right)} = \sqrt{\lambda}$$

Aproksimacija binomne raspodele Poasonovom, ako je $np \le 10$

$$P\left(X = k\right) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

$$P\left(X \le m\right) \approx \sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},$$

$$P(X>m)\approx 1-\sum_{k=0}^{m} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Funkcija gustine kod normalne raspodele

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

Funkcija gustine kod standardne normalne raspodele

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funkcija raspodele

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Funkcija standardne raspodele

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Matematičko očekivanje i disperzija za normalnu raspodelu

$$\mu=E(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$\sigma^2=D(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Aproksimacija binomne raspodele normalnom, ako je $np\geq 10$

$$P(X=k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\Phi(Z),\text{ gde je } Z=\frac{X-np}{\sqrt{npq}},$$

$$P(a\leq X\leq b)\approx P\left(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}\leq Z\leq\frac{b-np}{\sqrt{npq}}\right).$$

5.9. ZADACI

1. Kontrolor proverava proizvod jedne partije koja sadrži 20% škarta i obustavlja proveru kada naiđe na škart. Ako je slučajna promenljiva X broj pregledanih proizvoda, naći raspodelu verovatnoća slučajne promenljive X.

Rešenje:

Provera se završava na n- tom proizvodu, ako je prvih n-1 proizvod dobar, onda je n-ti škart.

$$P\left(X=n\right)=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4^2}{5^3} & \ldots & \frac{4^{n-1}}{5^n} \end{pmatrix}.$$

2. Cilj se gađa sa četiri metka. Naći zakon raspodele i funkciju raspodele slučajne promenljive X koja označava broj pogodaka, ako je u svakom gađanju verovatnoća pogotka cilja $\frac{1}{2}$.

Rešenje:

$$p_k=P\left(X=k\right)=\binom{4}{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k},\ k=0,1,2,3.$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{16} & \frac{4}{16} & \frac{6}{16} & \frac{4}{16} & \frac{1}{16} \end{pmatrix}.$$

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{16} & 0\le x<1 \\ \frac{5}{16} & 1\le x<2 \\ \frac{11}{16} & 2\le x<3 \\ \frac{15}{16} & 3\le x<4 \\ 1 & x\ge 4 \end{cases}$$

3. Učestalost krvne grupe A u nekoj posmatranoj populaciji je 42%. Posmatran je uzorak od 7 osoba. Kolika je verovatnoća da postoje 2 osobe sa tom krvnon grupom?

Rešenje:

$p=0,42;\ n=7,\ k=2$.

$$P(X=2)=\binom{7}{2}0,42^2\cdot 0,58^5=2,43$$

4. Na osnovu rezultata gađanja zaključeno je da strelac sa verovatnoćom od 80% pogađa cilj. Ako izvrši tri gađanja, kolika je verovatnoća da će cilj biti pogođen

a) nijedanput,

b) jednom,

c) bar jednom?

Rešenje:

Slučajna poromenljiva X je broj pogotka mete u 3 pokušaja. Zakon raspodele je:

$$p_k=P(X=k)=\binom{3}{k}\cdot 0,8^k\cdot 0,2^{3-k}.$$

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0,008 & 0,096 & 0,348 & 0,512 \end{pmatrix}$$

a) verovatnoće da cilj neće biti pogođen

$$P(X=0)=\binom{3}{0}\cdot 0{,}8^{0}\cdot 0{,}2^{3-0}=0{,}008\,,$$

b) $P(X=1)=\binom{3}{1}\cdot 0{,}8^{1}\cdot 0{,}2^{3-1}=0{,}096\,,$

c) $1-P(X=0)=1-0{,}008=0{,}992\,.$

5. U kutiji se nalaze dve bele i šest crnih kuglica. Izvlačimo 5 puta po jednu kuglicu sa vraćanjem. Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj pojavljivanja bele kuglice u tih pet izvlačenja.

a) Naći zakon raspodele.

b) Kolika je verovatnoća da će bela kuglica biti izvučena bar 3 puta?

Rešenje:

a) $p_k=P(X=k)=\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k},\quad k=0,1,2,3,4,5\,.$

Zakon raspodele je:

$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \frac{243}{1024} & \frac{405}{1024} & \frac{270}{1024} & \frac{90}{1024} & \frac{15}{1024} & \frac{1}{1024} \end{pmatrix}$$

b)

$$P=P(X\geq 3)=\sum_{k=3}^{5}\binom{5}{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{5-k}=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{53}{512}\,.$$

6. Naći verovatnoću da porodica sa četvoro dece ima

a) najmanje jednog dečaka,

b) najmanje jednog dečaka i najmanje jednu devojčicu

Rešenje:

Neka je X slučajna promenljiva koja predstavlja broj dečaka

a)

$$P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{4-k},k=0,1,2,3,$$

$$P=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=\frac{15}{16}.$$

Ili

do istog rezultata se moglo doći korišćenjem verovatnoće suprotnog događaja, da nema samo dečaka

$$P=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{15}{16}$$

b) Korišćenjem suprotne verovatnoće, da nema samo dečaka i nema samo devojčica dobijamo

$$P=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{4}=\frac{7}{8}$$

7. Utvrđeno je da $\frac{2}{3}$ proizvoda pripada prvoj klasi, a $\frac{1}{3}$ proizvoda pripada drugoj klasi. Odrediti raspodelu verovatnoća 4 slučajno izabranih proizvoda koji pripadaju prvoj klasi, zatim naći matematičko očekivanje i disperziju slučajne promenljive.

Rešenje:

$$P(X=k)=\binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{3}\right)^{4-k},k=0,1,2,3,4$$

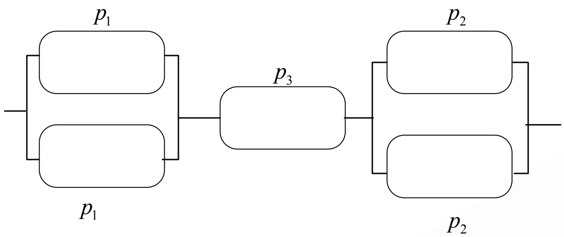
$$X:\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{1}{81} & \frac{8}{81} & \frac{24}{81} & \frac{32}{81} & \frac{16}{81} \end{pmatrix}$$

$$E(X)=0\cdot\frac{1}{81}+1\cdot\frac{8}{81}+2\cdot\frac{24}{81}+3\cdot\frac{32}{81}+4\cdot\frac{16}{81}=\frac{8}{3}$$

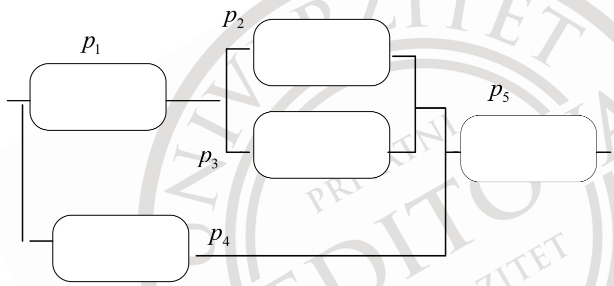
$$D(X)=E(X^2)-E(X)=0^2\cdot\frac{1}{81}+1^2\cdot\frac{8}{81}+2^2\cdot\frac{24}{81}+3^2\cdot\frac{32}{81}+4^2\cdot\frac{16}{81}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=1$$

8. Tehnički sistem se sastoji od blokova povezanih kao na datim na slikama. Oni ispravno rade sa verovatnoćama $p_i, i = \overline{1,5}$. Naći verovatnoću da će sistem ispravno raditi.

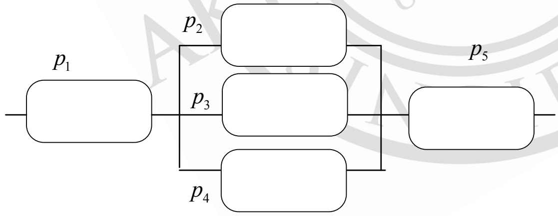
a)



b)



c)



Rešenje:

a) $P = \left(2p_1 - p_1^{\,2}\right) \cdot p_2 \cdot \left(2p_3 - p_3^{\,2}\right)$

b) $P = \left(p_1\left(p_2 + p_3\right) + p_4\right)p_5$

c) $P = p_1\left(p_2 + p_3 + p_4\right)p_5$

9. Centrala gradskog taksija prima u proseku 12 poziva na sat. Kolika je verovatnoća da u periodu od 10 minuta neće biti poziva?

Rešenje:
U pitanju je Poasonova raspodela.
Prosečno se prima 12 poziva na sat, a to je 2 poziva u 10 minuta. Znači $\lambda = 2$

$$P(X=0) = e^{-2} \cdot \frac{2^0}{0!} = e^{-2} = 0{,}135.$$

10. Servis za popravku televizora pozivan je u proseku 6 puta u toku jednog sata. Kolika je verovatnoća da će tokom određenog sata servis biti pozvan
a) tačno 5 puta
b) bar jedanput.

Rešenje:

U pitanju je Poasonova raspodela sa paramertom $\lambda = 6$

a) $P(X=5) = e^{-6}\frac{6^5}{5!} = 0{,}16,$

b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-6}\frac{6^0}{0!} = 0{,}9975.$

11. Telefonska sekretarica dobija prosečno 90 poziva na čas. Ukoliko je linija bila u prekidu 1 minut, kolika je verovatnoća da je za to vreme bilo najviše 2 poziva?

Rešenje:
Prosečno se dobija 90 poziva na čas, znači 1,5 poziva u minuti.
U pitanju je Poasonova raspodela sa parametrom $\lambda = 1{,}5$ i tražena verovatnoća je

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) =$$
$$e^{-1{,}5}\left(1 + 1{,}5 + \frac{1{,}5^2}{2}\right) = 0{,}8088.$$

12. Partija proizvoda sadrži 5% škartova. Uzima se slučajni uzorak od 60 proizvoda. Izračunati verovatnoću da se u uzorku ne pojavi ni jedan škart.

Rešenje:
U pitanju je Bernulijeva raspodela sa
$n = 60;\ p = P(A) = 0,05;\ q = P(\overline{A}) = 0,95$. Kako je $np = 3 = \lambda$ aproksimacija se vrši Poasonovom raspodelom.

$$P(X = 0) = e^{-3} \cdot \frac{3^0}{0!} \approx 0,04979.$$

13. Aparat se sastoji od 100 delova. Verovatnoća da jedan deo otkaže u toku godine dana je 0,01. Kolika je verovatnoća da otkažu:

a) dva,

b) bar 2 dela za godinu dana.

Rešenje:
U pitanju je Bernulijeva raspodela sa $n = 100;\ p = 0,01;\ q = 0,99$, kako je $np = 1 = \lambda$, aproksimaciju vršimo Poasonovom raspodelom.

a) $P(X = 2) = e^{-1} \cdot \dfrac{1^2}{2!} \approx 0,184$.

b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - \big(P(X = 0) + P(X = 1)\big) \approx 0,264$.

14. Pri prevozu nekog proizvoda oko 0,3% neispravnih komada stigne na odredište. Koliko ispravnih komada treba dodati partiji od 1000 komada da bi sa verovatnoćom ne manjom od 0,95 bilo dopremljeno 1000 ispravnih komada.

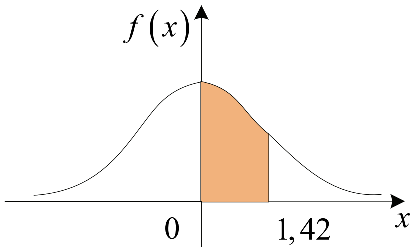
15. Slučajna promenljiva X ima standardnu normalnu raspodelu $N(0,1)$. Izračunati:

a) $P(0 < X < 1,44)$, **b)** $P(-0,73 < X < 0)$, **c)** $P(-1,37 < X < 2,01)$, **d)** $P(0,65 < X < 1,26)$,

e) $P(-1,79 < X < -0,54)$, **f)** $P(X > 1,13)$.

Rešenje:

a) $P(0 < X < 1,44) = \Phi(1,44) - \Phi(0) = 0,9336 - 0,5 = 0,4336$



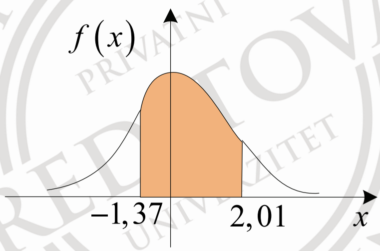
b) Zbog simetrije

$$P(-0,73 < X < 0) = P(0 < X < 0,73) = \Phi(0,73) - \Phi(0) = 0,2673$$

c)

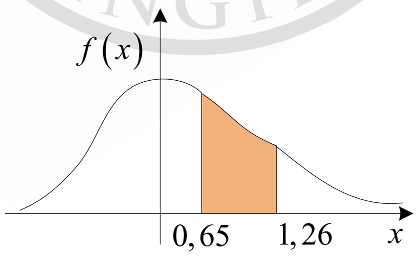
$$P(-1,37 < X < 2,01) = \Phi(2,01) - \Phi(-1,37) = \Phi(2,01) - (1 - \Phi(1,37)) = 0,8925$$

jer u tablici nema vrednosti za vrednosti $x < 0$ i tada koristimo osobinu da je $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.



d)

$$P(0,65 < X < 1,26) = \Phi(1,26) - \Phi(0,65) = 0,1540$$

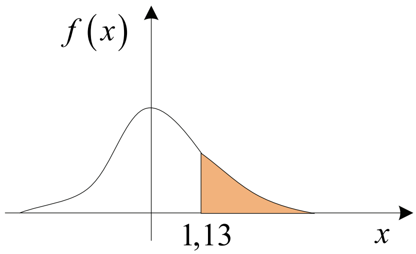


e) Zbog simetrije

$$P(-1,79 < X < -0,54) = P(0,54 < X < 1,79) = \Phi(1,79) - \Phi(0,54) =$$
$$= 0,2579$$

f)

$$P(X > 1,13) = 1 - P(X < 1,13) = 1 - \Phi(1,13) = 0,1292$$



16. Slučajna promenljiva ima raspodelu $N(3,4)$. Izračunati $P(X>9)$.

Rešenje:

Kako je $\mu=3, \sigma=2$

$$P(X>9)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}>\frac{9-\mu}{\sigma}\right)=P\left(\frac{X-3}{2}>\frac{9-3}{2}\right)=$$

$$P(Z>3)=1-P(Z<3)=1-\Phi(3)=1-0,9986=0,0014$$

17. Ako je slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu i $E(X)=6$, a $D(X)=4$, naći $P(2\le X\le 16)$.

Rešenje:

$N(6,4)$

$$P(2\le X\le 16)=P\left(\frac{2-6}{2}\le\frac{X-6}{2}\le\frac{16-6}{2}\right)=P(-2\le Z\le 5)=\Phi(5)-\Phi(-2)$$

$$=\Phi(5)-(1-\Phi(2))=1-(1-0,9772)=0,9772$$

18. Neka je $X:N(7,25)$. Odrediti**:** **a)** $P(X\le 12)$, **b)** $P(-1\le X\le 9)$, **c)** $P(X\le -2)$, **d)** $P(X\ge -1)$, **e)** naći x tako da je $P(X\le x)=0,85$, **f)** naći x tako da je $P(X\le x)=0,01$.

Rešenje:

a) $P(X\le 12)=P\left(\frac{X-7}{5}\le\frac{12-7}{5}\right)=P(Z\le 1)=\Phi(1)=0,8413$

b)

$$P(-1\le X\le 9)=P\left(\frac{-1-7}{5}\le\frac{X-7}{5}\le\frac{9-7}{5}\right)=P(-1,6\le Z\le 0,4)=\Phi(0,4)-\Phi(-1,6)=$$
$$\Phi(0,4)-(1-\Phi(1,6))=0,6006,$$

c) $P(X\le -2)=P\left(\frac{X-7}{5}\le\frac{-2-7}{5}\right)=P(Z\le -1,8)=1-\Phi(1,8)=0,0359$,

d)

$$P(X\ge -1)=P\left(\frac{X-7}{5}\ge\frac{-1-7}{5}\right)=P(X\ge -1,6)=1-\Phi(-1,6)=\Phi(1,6)=0,9452,$$

e) $P\left(\frac{X-7}{5}\le\frac{x-7}{5}\right)=P\left(Z\le\frac{x-7}{5}\right)=\Phi\left(\frac{x-7}{5}\right)=\Phi(z)=0,85$,

kako se ova vrednost ne nalazi u tablicam, treba uzeti najpribližniju, a to je 0,8508 i njoj odgovara vrednost $z=1,04$, pa je $x=5z+7=12,2$.

f) $P(X\le x)=P\left(Z\le\frac{x-7}{5}\right)=0,01$.

Kako u tablici nema vrednosti manjih od 0,5, pa je prema tome traženo z negativno i moramo uzeti

$$P(Z\le z)=1-\Phi(-z)=0,01\Rightarrow\Phi(-z)=0,99.$$

19. Predpostavimo da debljina metalnih ploča ima normalnu raspodelu $N(\mu=0,25cm,\sigma=0,028cm)$. Naći procenat neispravnih ploča, ako se smatra da je ploča neispravna kad je njena debljina manja od 0,20cm ili veća od 0,28cm

Rešenje:

Verovatnoća da je ploča ispravna je:

$$P(0,20\le X\le 0,28)=P\left(\frac{0,20-0,25}{0,028}\le\frac{X-0,25}{0,28}\le\frac{0,28-0,25}{0,028}\right)=$$
$$P(-1,78\le Z\le 10,71)=\Phi(10,71)-\Phi(-1,78)=$$
$$\Phi(10,71)-(1-\Phi(1,78))=1-1+0,9625=0,9625$$

$$P(X \geq 0,28) + P(X \leq 0,20) = 1 - 0,9625 = 0,0375$$

Procenat je 3,7%.

20. Predpostavimo da telesne težine 800 studenata imaju normalnu raspodelu, sa srednjom težinom $\mu = 66kg \; i \; \sigma = 5kg$. Naći broj studenata čija je težina

a) između 65 i 75 kg,

b) veća od 72kg.

Rešenje:

$X : N(66,25)$, $Z : N(0,1)$

a)

$$P(65 < X < 75) = P\left(\frac{65-66}{5} < X < \frac{75-66}{5}\right) = P(-0,2 < X < 0,8) =$$

$$\Phi(0,8) - \Phi(-0,2) = \Phi(0,8) - (1 - \Phi(0,2)) = 0,3674$$

$$n = 800 \cdot 0,3674 = 294$$

b)

$$P(X > 72) = P\left(X > \frac{72-66}{5}\right) = P(X > 1,2) = 1 - P(X < 1,2) = 1 - \Phi(1,2) = 0,1151$$

$$n = 800 \cdot 0,1151 = 92$$

21. Neka fabrika proizvodi kuglice nominalnog prečnika $m = 5mm$. Usled neprecizne izrade njen prečnik je slučajna promenljiva X, sa normalnom raspodelom, matematičkim očekivanjem m i odstupanjem 0,05mm. Pri kontroli se odbacuju sve kuglice čiji prečnik odstupa od nominalnog za više od 0,1mm. Koliki procenat kuglica će biti odbačen?

Rešenje:

$$N(0,5;0,05^2)$$

Treba izračunati $P(|X-5| > 0,1)$. Izračunaćemo suprotan događaj, tj.

$$P\left(|X-5|\le 0{,}1\right)=P\left(-0{,}1\le X-5\le 0{,}1\right)=P\left(-\frac{0{,}1}{0{,}05}\le\frac{X-5}{0{,}05}\le\frac{0{,}1}{0{,}05}\right)=$$
$$=P\left(-2\le Z\le 2\right)=\Phi(2)-\Phi(-2)=2\Phi(2)-1=2\cdot 0{,}9772-1$$
$$=0{,}9544$$

$$P\left(|X-5|>0{,}1\right)=1-0{,}9544=0{,}456\approx 0{,}046\,.$$

Dakle biće odbačeno 4,6%.

22. Neka su vremena 'života' dva električna uređaja slučajne promenljive sa raspodelama $N(40,36)$ i $N(45,9)$ respektivno. Ako uređaj treba da radi bar 48 časova, koji od njih je bolje uzeti?

Rešenje:

$$P(X>48)=P\left(\frac{X-40}{6}>\frac{48-40}{6}\right)=P(Z>1{,}33)=1-\Phi(1{,}33)\approx 1-0{,}9082=0{,}0918$$
$$P(X>48)=P\left(\frac{X-45}{3}>\frac{48-45}{3}\right)=P(Z>1)=1-\Phi(1)=1-0{,}8413\approx 0{,}1587$$

.

Bolje je uzeti drugi uređaj.

23. Prečnik kuglica koje proizvodi fabrika je slučajna promenljiva X sa normalnom raspodelom $N(\mu=1{,}5cm;\sigma=0{,}04cm)$.

a) Naći verovatnoću škarta pod uslovom da je propisana tolerancija prečnika kuglice $\pm 0{,}07$

b) Kolika tolerancija prečnika može da se garantuje sa verovatnoćom od 0,97?

Rešenje:

a)

$$P\left(|X-1{,}5|>0{,}07\right)=1-P\left(|X-1{,}5|<0{,}07\right)=0{,}08$$

8%

b)

$$P\left(|X-1{,}5|<\varepsilon\right)=0{,}97$$

$$\varepsilon\approx 0{,}09$$

24. Merenje daljine do nekog objekta sadrže sistematske i slučajne greške. Sistematska greška smanjuje merenje za 50m, a slučajna greška je data normalnim zakonom raspodele sa standardnim odstupanjem $\sigma = 100m$. Kolika je verovatnoća da greška merenja daljine ne premašuje 150m po apsolutnoj vrednosti.

Rešenje:

Slučajna promenljiva X je zbirna greška izmerene daljine.

Sistematska greška je $\mu = -50m$

$$P(-150 < X < 150) = P\left(\frac{-150+50}{100} < Z < \frac{150+50}{100}\right) = P(-1 < Z < 2) = 0,8186$$

25. Vek trajanja elektronske lampe ima normalnu raspodelu $N(100, 25)$.

a) Naći verovatnoću da nova lampa istog tipa traje najmanje 105 časova.

b) Ako je jedna lampa već izdržala 90 časova, kolika je verovatnoća da će izdržati još 15?

Rešenje:

a)

$$P(X \geq 105) = 1 - P(X < 105) = 1 - P\left(Z < \frac{105-100}{5}\right) = 1 - P(Z < 1)$$

$$1 - \Phi(1) = 1 - 0,8413 = 0,1587$$

b) U pitanju je uslovna verovarnoća

$$P(X \geq 105 | X \geq 90) = \frac{P(X \geq 105, X \geq 90)}{P(X \geq 90)} = \frac{P(X \geq 105)}{P(X \geq 90)} =$$

$$\frac{P\left(Z \geq \frac{105-100}{5}\right)}{P\left(Z \geq \frac{90-100}{5}\right)} = \frac{P(Z \geq 1)}{P(Z \geq -2)} = \frac{1 - P(Z < 1)}{1 - P(Z < -2)} = \frac{1 - \Phi(1)}{1 - \Phi(-2)} =$$

$$\frac{1 - \Phi(1)}{\Phi(2)} = 0,1624$$

26. Broj mušterija subotom u frizerskom salonu ima približno normalanu raspodelu sa $\mu = 30$ i $\sigma = 5$.

Odrediti verovatnoću da će sledeće subote broj mušterija biti:

a) veći od 45,

b) manji od 25,

c) najmanje 25, a najviše 40.

Rešenje:

a)

$$P(X > 45) = P\left(\frac{X-30}{5} > \frac{45-30}{5}\right) = P(Z > 3) = 1 - \Phi(3) =$$

$$1 - 0,9986 = 0,0014$$

b)

$$P(X < 20) = P\left(\frac{X-30}{5} < \frac{20-30}{5}\right) = P(Z < -2) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) =$$

$$1 - 0,97725 = 0,02275$$

c)

$$P(25 < X < 40) = P\left(\frac{25-30}{5} < \frac{X-30}{5} < \frac{40-30}{5}\right) = P(-1 < Z < 2) =$$

$$\Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - 1 + \Phi(1) = 0,9772 - 1 + 0,8413 = 0,8185$$

27. Verovatnoća pogađanja u cilj je u svakom od 100 nezavisnih gađanja 0.8. Izračunati verovatnoću da će od 100 obavljenih gađanja biti:

a) bar 80 pogodaka

b) broj pogodaka biti između 40 i 90.

Rešenje:

$n = 100, \quad p = 0,8; \; q = 0,2$

$X : B(100; 0,8)$

$$P(X \geq 80) = P(80 \leq X \leq 100) = \sum_{k=80}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,8^k \cdot 0,2^{100-k}.$$

Kako je $np = 80 > 10$, vrši se aproksimacija Normalnom raspodelom.

a)

$$P\left(80 \le X \le 100\right) \approx P\left(\frac{80-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \le Z \le \frac{100-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$

$$P\left(0 \le Z \le 5\right) = \Phi\left(5\right) - \Phi\left(0\right) = 1 - 0,5 = 0,5$$

b)

$$P\left(40 \le X \le 90\right) \approx P\left(\frac{40-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}} \le Z \le \frac{90-80}{\sqrt{100 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$

$$P\left(-10 \le Z \le 2,5\right) = \Phi\left(2,5\right) - \Phi\left(-10\right) = \Phi\left(2,5\right) - \left(1 - \Phi\left(10\right)\right) = 0,9938$$

28. Verovatnoća kvara uređaja je 0,03. U kom procentu se može očekivati da će se kod 1000 uređaja kvarovi pojaviti u ne manje od 20 i ne više od 40 slučajeva.

Rešenje:

$$n = 1000, \quad p = P\left(A\right) = 0,03, \; q = P\left(\overline{A}\right) = 0,97$$

$$X : B\left(1000; 0,03\right)$$

$$P\left(20 \le X \le 40\right) = \sum_{k=20}^{40} \binom{40}{k} \cdot 0,03^{k} \cdot 0,997^{40-k}.$$

Kako je $np = 30 > 10$, vrši se aproksimacija Normalnom raspodelom.

$$P\left(20 \le X \le 40\right) = P\left(\frac{20-30}{\sqrt{1000 \cdot 0,03 \cdot 0,997}} \le Z \le \frac{40-30}{\sqrt{1000 \cdot 0,03 \cdot 0,997}}\right) =$$

$$P\left(-1,85 \le Z \le 1,85\right) = 2\Phi\left(1,85\right) - 1 = 0,9357$$

Znači da se u 93,6% slučajeva može desiti da broj neispravnih uređaja bude između 20 i 40.

29. Poznato je sa 90% kupaca Sony televizora nema reklamacije u garatnom roku. Prodato je 100 televizora u jednoj prodavnici.

a) kolika je očekivana vrednost broja reklamacija,

b) verovatnoću da reklamacija bude max 20

Rešenje:

Slučajna promenljiva X je broj reklamacija, i ima binimnu raspodelu $B(100;0,1)$

a) $E(X) = np = 10$

b) $P(X<20) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} < \frac{20-10}{\sqrt{100\cdot 0,1\cdot 0,9}}\right) = P(Z<1,11) = \Phi(1,11) = 0,8665$

30. Neka su vremena 'života' dva električna uređaja slučajne promenljive sa raspodelama $N(40,36)$ i $N(45,9)$ respektivno. Ako uređaj treba da radi bar 45 časova, koji od njih je bolje uzeti? Koji za 48 časova?

Rešenje:

a) $P(X>45) = P\left(\frac{X-40}{6} > \frac{45-40}{6}\right) = P(Z>0,833) = 1-\Phi(0,833) \approx$ 1-0,7967=0,20

$P(X>45) = P\left(\frac{X-45}{3} > \frac{45-45}{3}\right) = P(Z>0) = 1-\Phi(0) \approx 0,5$.

Bolje je uzeti drugi uređaj.
Isto bi se radilo i za 48 sati.

30. Oceniti verovatnoću događaja da je broj dobijenih trojki u 600 bacanja kocke odstupi od 100 za više od 30.

31. Poznato je da među ljudima ima 15 levaka. Izračunati verovatnoću da među 200 slučajno izabtanih ljudi ima bar 4 levaka.

32. Slučajna promenljiva X ima studentovu t raspodelu sa 14 stepena slobode. Izračunati:

a) $P(X<4)$, b) $P(X<2,14)$, c) $P(X>2,14)$,

d) $P(0,69<X<2,14)$

Rešenje:

Upotrebom tablica dobijamo

a) $P\left(X<1,7\right)=0,95$

b) $P\left(X<2,14\right)=0,975$,

c) $P\left(X>2,14\right)=1-P\left(X<2,14\right)=1-0,975=0,025$,

d) $P\left(0,69<X<2,14\right)=0,975-0,75=0,225$

6. GRANIČNE TEOREME

6.1. ZAKON VELIKIH BROJEVA

Pod zakonom velikih brojeva podrazumeva se niz teorema koje objašnjavaju uslove pod kojim realizacije slučajnih promenljivih dovode do rezultata koji i nisu slučajni.

U matematičkoj analizi definisali smo pojam granične vrednosti niza realnih brojeva. Međutim, na niz slučajnih promenljivih X_n ne možemo da primenimo ove poznate definicije iz razloga što slučajne promenljive važe sa nekom verovatnoćom, pa jedino možemo da ustanovimo da je verovatnoća događaja $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ jednaka 1.

U eksperimentu bacanja novčića verovatnoća pojave pisma je 0,5. Oko ove vrednosti se grupišu relativne frekvence pri velikom broju ponavljanja eksperimenta, odnosno bacanja novčića. Već smo govorili o rezultatima koje su eksperimentalno dobili Bufon i Pirson. Nažalost nije moguće dokazati da je $\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = 0{,}5$. Može se samo tvrditi da je $P\left(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n} = 0{,}5\right) = 1$.

Prvi koji je naučno interpretirao ovaj rezultat je Jakub Benuli koji 1713. godine daje zakon velikih brojeva, koji zovemo i Bernulijev zakon zakon velikih brojeva.

Definicija:

Ako slučajna promenljiva $X = \{X_1 X_2 \cdots X_n\}$ ima binomnu raspodelu $B(n,p)$ tada je

$$P\left(\lim_{n\to\infty}\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

Definicija:

Za niz X_n kažemo da ***strogo konvergira*** ka slučajnoj promenljivoj X , ako je ispunjeno

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = X\right) = 1$$

Definicija:

Niz X_n konvergira ka X u ***verovatnoći*** ako je

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1, \quad \varepsilon > 0$$

Osim ovih postoje i niz drugih teorema velikih brojeva kao što su Čebiševa , Hinčinova , Borelova i mnoge druge. Sve one omogućavaju naučne prognoze i ocene tačnosti rezultata masovnih pojava.

6.2.CENTRALNA GRANIČNA TEOREMA

Teoreme koje pripadaju grupi centralnih graničnih teorema ne odnose se na granične vrednosti slučajnih promenljivih, već na granične zakone raspodela. Jedna od najvažnijih teorema definiše da zakon raspodele verovatnoca suma velikog broja slučajnih promenljivih teži normalnoj raspodeli. Sve teoreme ovog tipa uzimaju normalnu raspodelu kao granični zakon i definišu uslove pod kojim je to ispunjeno.

Iako normalna raspodela nije jedina koja daje dobre aproksimacije empiriskih raspodela, sigurno se najčešće koristi. Možda je i razlog što oko 30% svih pojava u prirodi ima normalnu raspodelu.

Teorema:

Zbir proizvoljnog broja slučajnih promenljivih $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, od kojih svaka ima matematičko očekivanje $E(X_n) = \mu$ i varijansu $D(X_n) = \sigma^2$, tada je

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

gde slučajna promenljiva $\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ima standardnu normalnu raspodelu.

Primer:

Neka su X_n slučajne promenljive koje imaju Poasonovu raspodelu $P(0,05)$. Ako je $S_{100} = X_1 + \cdots + X_n$, izračunati $P(S_{100} \geq 2)$

Ako bi računali direktno imali bi za $\lambda = 5$

$$P(S_{100} \geq 2) = 1 - P(S_{100} < 2) = 1 - P(S_{100} = 0) - P(S_{100} = 1) = 1 - \frac{5^0}{0!}e^{-5} - \frac{5^1}{1!}e^{-5} = 0,9596$$

Ako bi koristili centralnu graničnu teoremu, a znajući da su matematematičko očelivanje i disperzija kod poasonove raspodele $E(X_i) = D(X_i) = \lambda = 5$, pa je

$$P(S_{100} \geq 2) = 1 - P(S_{100} < 2) = 1 - P\left(\frac{S_{100} - 100 \cdot 0,05}{\sqrt{0,05}\sqrt{100}} < \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 0,9099$$

7. MATEMATIČKA STATISTIKA

7.1. OSNOVNI POJMOVI STATISTIKE

Začetke statistike srećemo još u srednjem veku, sa prvim popisima stanovništva, a tek sredinom dvadesetog veka se definiše kao nova matematička disciplina.

Matematička statistika je nauka koja se bavi proučavanjem masovnih pojava u prirodi i društvu i ova istraživanja imaju kvantitativan, a ne kvalitativan karakter.

Pojedinačni slučajevi neke pojave imaju manja ili veća odstupanja, pa se oni posmatraju u velikom broju, da bi se u masi ispoljile njihove zakonitosti.

Predmet istraživanja matematičke statistike je ***statistički skup*** ili ***populacija***.

Definicija:
U statistici posmatra se konačan ili beskonačan skup elemenata, koji se zove ***statistički skup***, ***statistička masa ili populacija i obeležava sa*** $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$.

Primer:
Populacija je skup svih građana Srbije, skup svih studenata našeg fakulteta, skup svih merenja neke veličine i sl.

Svaka populacija se može posmatrati sa stanovišta jedne ili više osobina, koje nazivamo ***obeležja.*** Za posmatranu populaciju neka obeležja su važna, druga nisu. Naprimer, ako posmatramo studente jednog fakulteta, bitna obeležja su njihov broj, prolaznost na ispitima, srednje ocene, dužina studiranja i slično, a nebitna obeležja su njihova visina, težina i slično.

Definicija:
Ako svakom elementu skupa Ω pridružimo jedan realan broj, definišemo preslikavanje $X : \Omega \to R$ koje se naziva ***obeležje.***
Obeležje X je dakle slučajna promenljiva, koja svakoj vrednosti $\omega \in \Omega$, pridružuje realan broj $X(\omega)$.

Obeležja obeležavamo sa velikim slovima X,Y,Z,....., a njihove realizacije sa malim slovima $x_i, y_k, z_n, \ldots$.Kako je svako obeležje neka slučajna promenljiva, osnovni zadatak matematičke statistike je nalaženje raspodela verovatnoća ovih slučajnih promenljivih.

Obeležja mogu biti ***numerička***, koja se izražavaju brojem i ***atributivna***, koja se izražavaju opisno. Numerička obeležja su naprimer ako u populaciju studenata posmatramo, visinu i težinu, a atributivna su pol i boja očiju. Da bi se i na atributivna obeležja mogli primeniti matematički metodi, neophodno je se oni prevedu na jezik matematike. Za matematiku su od interesa samo numerički podaci, odnosno oni koji se mogu izraziti brojem.

Do statističkih podataka se dolazi se sistematski, po jasno utvеđenom planu. U procesu proučavanja pojava statistika se služi određenim metodama. One su u suštini induktivnog tipa.

U razlikujemo tri koraka u proučavanju podataka:

1. prikupljanje podataka (ankete, popisi, merenje, eksperimenti i sl.)
2. sređivanje i obrada podataka primenom naučnih metoda
3. donošenje zaključaka.

Često ispitivanja obeležja cele populacije mogu da budu složena, neracionalna, a ponekad i nemoguća jer populacija može da ima beskonačno mnogo elemenata ili konačno mnogo, ali da je taj broj veliki. Iz tih razloga definiše se neki podskup uočene populacije i nazivamo ga ***uzorak.***

Definicija:
Bilo koji podskup *U*, populacije Ω, nazivamo ***uzorak,*** $U \subset \Omega$.

Primer:
Ako je potrebno odrediti prosečnu visinu građana Srbije, nije potrebno izmeriti visinu svakog njenog građanina već se uzima proizvoljan uzorak, naprimer 10000 građana, i na osnovu rezultata merenja ovog broja građana, određuje se visina za celokupno stanovništvo.

Naravno, postavlja se pitanje koliko je opravdano populaciju zameniti uzorkom, odnosno koliko su rezultati dobijeni iz uzorka prihvatljivi kao rezultati cele populacije. Ovako dobijeni rezultati su slučajne promenljive kojima odgovaraju neke verovatnoće. Verovatnoća je veća ako uzorak bolje rerezentuje populaciju. Iz tih razloga matematička statistika u svojim istraživanjima koristi teoriju verovatnoće, jer se ona bavi pojavama koje imaju slučajan karakter.

U vezi sa uzorcima postavlja se niz teorijskih i praktičnih pitanja u vezi formiranja uzorka. Kao što smo već naglasili zaključci bazirani na uzorcima nisu sasvim pouzdani, već su manje ili više verovatni. Zato uzorak treba birati tako da se obezbedi dovoljna pouzdanost zaključka. Uzorak treba da bude ***reprezentativan,*** odnosno da svaki element populacije ima podjednaku šansu da se nađe u uzorku i da bude ***dovoljno brojan***. Potrebno je odbaciti sve subjektivne faktore, tako da uzorak bude što više ***objektivan,*** a to se postiže slučajnim izborom**.** Dobijen odabiranjem elemenata na slučajan način, uzorak je umanjena slika osnovnog skupa. Njegove karakteristike, ***parametri***, kao što su aritmetička sredina, disprezija, standardno odstupanje i ostale, jesu procene ovih istih parametara osnovnog skupa. Na isti način raspodela frekvencija statističkog obeležja uzorka je aproksimacija raspodele odgovarajuće slučajne promenljive u celoj populaciji.

Prilikom definisanja metode uzoraka srećemo se sa dve grupe problema.

1. ***Problem ocene*** ili ***estimacije parametara***. To su problemi koji se odnose na procenu parametara osnovnog skupa na osnovu rezultata dobijenih statističkom obradom podataka.
2. ***Problemi testiranja hipoteza.*** Problemi se sastoje u donošenju odluke da li prihvatiti ili odbaciti određenu hipotezu (pretpostavku) koja se dobija na osnovu procenjenih parametara osnovnog skupa na osnovu uzorka.

Matematička veza između populacije i uzorka izražena je vezom između funkcije raspodele $F(x)$ slučajne promenljive X koja reprezentuje neko obeležje populacije i empiriske funkcije raspodele frekvencija $F_n(x)$ uzorka obima *n*. Treba voditi računa da se u svakom novom eksperimentu dobija neka druga empirijska funkcija raspodele.

Definicija:
Neka je dat niz nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, ..., X_n$, sa istom nepoznatom funkcijom raspodele.

Izraz $F_n(x) = \dfrac{broj\ elemenata\ uzorka\ koji\ su \le x}{n}$ i naziva se ***empirijska funkcija raspodele,*** odnosno

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < X_1 \\ \dfrac{k}{n}, & X_k \le x < X_{k+1} \\ 1, & x \ge X_n \end{cases}$$

Teorema: (Glivenko)

Neka je $F(x)$ funkcija raspodele obeležja X populacije, a $F_n(x)$ empiriska funkcija raspodele nezavisnog uzorka obima *n* ove populacije, tada ,

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \sup_{-\infty<x<\infty} \left(F_n(x) - F(x) \right) = 0 \right) = 1 .$$

Ova teorema tvrdi, da kada je uzorak dovoljno brojan, sa verovatnoćom bliskom jedinici empiriska raspodela se malo razlikuje od teorijske.

Primer:

Mereći prosečnu temperaturu vazduha 10 dana u jednom mesecu dobijene su sledeće vrednosti:

9,16,11,17,9,7,12,7,16.

Slučajna promenljiva koja predstavlja ovo obeležje uzorka od 10 dana izgleda:

$$X : \begin{pmatrix} 7 & 9 & 11 & 12 & 16 & 17 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

a funkcija empirijske raspodele je

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<7\\ \frac{3}{10}, & 7\le x<9\\ \frac{5}{10}, & 9\le x<11\\ \frac{6}{10}, & 11\le x<12\\ \frac{7}{10}, & 12\le x<16\\ \frac{9}{10}, & 16\le x<17\\ 1, & x\ge 17\end{cases}$$

7.2. STATISTIČKE TABELE, POLIGONI I HISTOGRAMI EMPIRISKE RASPODELE OBELEŽJA

Podatke dobijene posmatranjem ili eksperimentima, a koji predstavljaju vrednosti posmatranog obeležja elemenata populacije ili uzorka, potrebno je srediti na odgovarajući način da bi se mogli ispitivati i odrediti raspodela obeležja. Dve osnovne metode za klasifikaciju zadatih veličina su ***tablična i grafička metoda.***

Neka posmatrano obeležje X uzima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, koje se u broju N svih elemenata populacije ili uzorka pojavljuju redom $f_1, f_2, \ldots . f_k$ puta. Brojevi $f_1, f_2, \ldots . f_k$ zadovoljavaju vezu $f_1+f_2+\ldots .+f_k=N$ i nazivaju se ***apsolutne frekvencije*** (učestalosti) vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$.

Umesto apsolutnih frekvencija često se koristte ***relativne frekvencije*** vrednosti obeležja

$$f_{r1}=\frac{f_1}{N}, f_{r2}=\frac{f_2}{N}, \ldots . f_{rk}=\frac{f_k}{N},$$

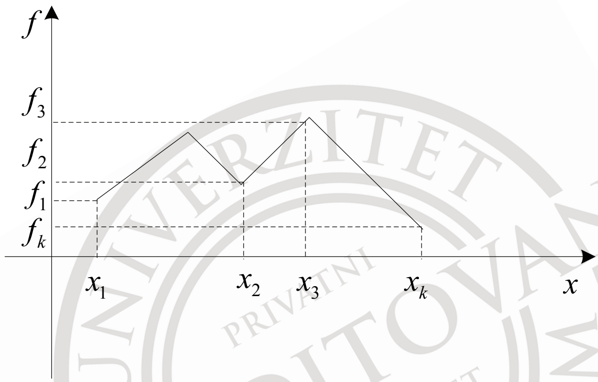
koje zadovoljavaju vezu

$$f_{r1}+f_{r2}+\ldots . f_{rk}=1.$$

Vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ uzete sa odgovarajućim frekvencijama raspoređuju se po rastućim vrednostima i formiraju statističku tabelu.

X	x_1	x_2	....	x_k	
f_i	f_1	f_2		f_k	N
f_{ri}	f_{r1}	f_{r2}		f_{rk}	1

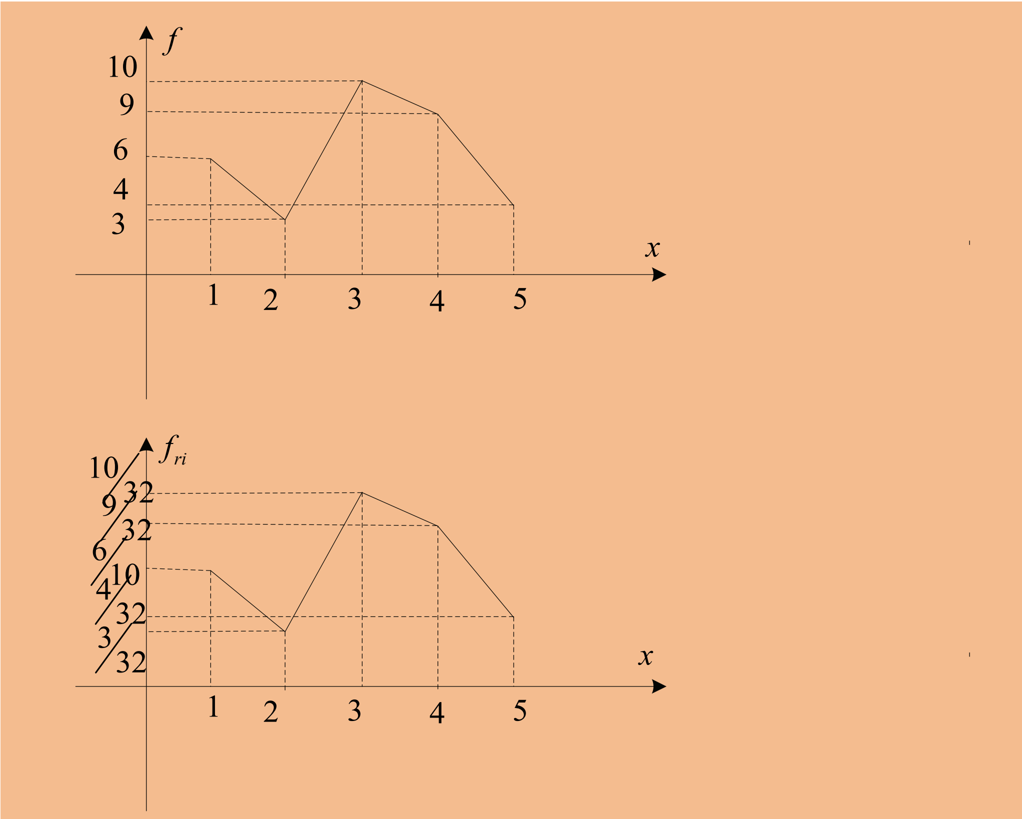
Podatke iz tabele možemo predstaviti i grafički u koordinatnom sistemu i dobijamo ***poligon raspodela apsolutnih frekvencija.***



Primer:

U jednom odeljenju ima 32 učenika. Među njima su 4 odlična, 9 vrlo dobrih, 10 dobrih, 3 dovoljna i 6 nedovoljnih učenika. Ovo obeležje ima atributivni karakter i zato ako uzmemo da su numeričke vrednosti obeležja, 5-odličan, 4-vrlo dobar i tako redom, odgovarajuća tablica i poligon raspodela frekvencija su:

X	1	2	3	4	5	
f_i	6	3	10	9	4	32
f_{ri}	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{8}$	1

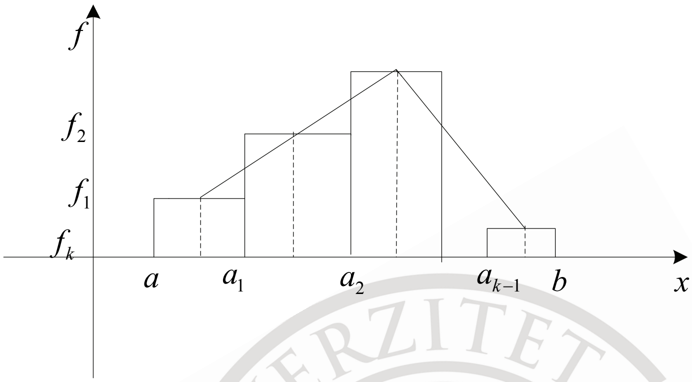


Često se raspodela zadaje za skupove vrednosti obeležja, najčešće za intervale određene dužine i to uvek kada je broj vrednosti obeležja veliki. U slučaju kada je obeležje neprekidna veličina to je uvek slučaj.

Interval [a,b] u okviru koga se nalaze sve posmatrane vrednosti obeležja, podeli se na k, najčešće jednakih delova, [a,a1), [a1,a2),........[ak-1,b]. Zatim se odrede frekvencije podataka koji pripadaju ovim intervalima i rezultati prikažu tabelarno i grafički.

X	$[a,a_1)$	$\lfloor a_1,a_2 \rfloor$	....	$(a_{k-1},b]$	
f_i	f_1	f_2		f_k	N
f_{ri}	f_{r1}	f_{r2}		f_{rk}	1

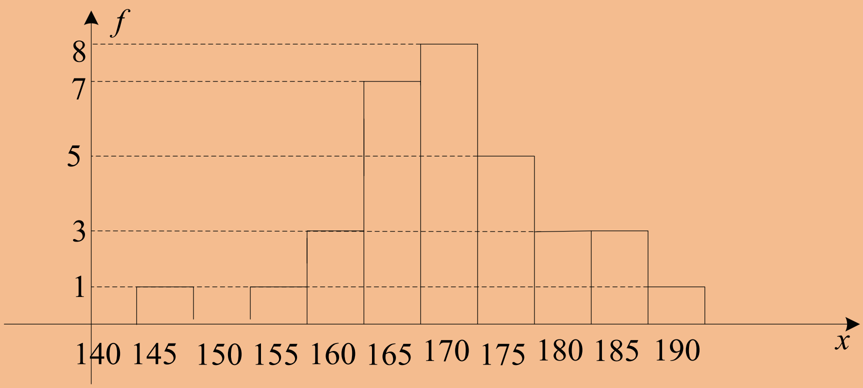
Grafički prikaz naziva se ***histogram raspodela*** i dobija se tako što se crtaju pravougaonici sa osnovicom veličine uočenih intervala, a visine su vrednosti odgovarajućih frekvenci.



Primer:

U skupu od 32 učenika obeležje je visina koja je data u intervalima dužine 5cm.

X	140-145	145-150	150-155	155-160	160-165	165-170	170-175	175-180	180-185	185190
f_i	1	0	1	3	7	8	5	3	3	1
f_{ri}	$\frac{1}{32}$	0	$\frac{1}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{8}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{32}$



7.3. PARAMETRI –STATISTIKE SLUČAJNIH STATISTIČKIH PROMENLJIVIH

Postoje dve vrste parametara koji karakterišu statističke promenljive, ili kako ih nazivamo statistike, i to parametri koji reprezentuju centar rasturanja, to su razne srednje vrednosti i parametri koji mere rasturanje vrednosti promenljivih oko srednjih vrednosti.

7.3.1. PARAMETRI KOJI REPREZENTUJU CENTAR RASTURANJA - SREDNJE VREDNOSTI

Srednje vrednosti nekog obeležja su važan statistički podatak. One mogu da reprezentuju ceo skup i da omoguće upoređivanje različitih skupova. To su ***aritmetička sredina, moda*** , ***medijana i dr.***

Najčešće u upotrebi je ***aritmetička sredina.***

Definicija:
Ako obeležje X ima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, tada je ***aritmetička sredina***

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \; .$$

Kada se vrednosti obeležja javljaju sa različitim frekvencijama, grupisani podaci, onda je

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_k f_k\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i f_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_k}{\sum_{i=1}^{k} f_k},$$

znajući da je $f_1 + f_2 + \ldots . + f_k = n$, n je broj elemenata uzorka.

Primer:

Naći aritmetičku sredinu brojeva 1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

X	1	2	2	4
f_k	2	3	4	5

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}=\frac{1}{14}\left(2\cdot 1+3\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot 5\right)=\frac{20}{7}.$$

Primer:

Ako su podaci zadati intervalima kao u primeru sa visinama učenika onda je potrebno naći srednju vrednost visine svakog intervala i tada imamo da je:

$$\overline{X}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix} 142,5\cdot 1+147,3\cdot 0+152,5\cdot 1+157,5\cdot 3+162,5\cdot 7+ \\ 167,5\cdot 8+172,5\cdot 5+177,5\cdot 3+182,5\cdot 3+187,5\cdot 1 \end{pmatrix}=167,97$$

Definicija:

Moda M_o je vrednost obeležja koje ima najveću frekvenciju. Može se desiti da moda ne postoji ili da ih ima više.

Primer:

Naći modu brojeva 1,1,2,2,2,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Broj 4 ima najveću frekvencu, dakle

$$M_o=4$$

Primer:

Naći modu brojeva 1,1,2,2,2,3,3,3,3,3,4,4,4,4,4.

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Kako postoje dva broja 3 i 4 koji imaju iste frekvence 5, zaključujemo da imamo dve mode.

$$M_o=4, M_o=3$$

Za vrednosti obeležja datih intervalima moda se ne može tako jednostavno odrediti. Treba ga tražiti u intervalima sa najvećim frekvencijama i oni se nazivaju ***modalni intervali.***

Definicija:
Ako su vrednosti obeležja X date intervalima imamo da je

$$M_o = a_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} d,$$

gde je a_1 donja granica modalnog intervala, a f_1, f_2, f_3 su frekvencije predmodalnog, modalnog i postmodalnog intervala, a d veličina intervala.

Primer:
U primeru sa visinama vidimo da je modalni interval [165-170]. Prema tome $a_1 = 165$, $f_1 = 7, f_2 = 8, f_3 = 5$ i d=5, pa je mod $M_o = 165 + \frac{5}{1+3} 5 = 166,25$

Definicija:
Medijana je srednja vrednost svih vrednosti obeležja $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ uređenih po veličini. Kod određivanja medijane moramo razlikovati slučajeve kada je broj vrednosti obeležja paran i neparan.
Ako je broj vrednosti obeležja neparan broj, onda postoji jedna vrednost obeležja koja je srednja vrednost obeležja.
Ako je broj vrednosti obeležja paran broj, tada postoje 2 srednja člana i uzima se njihova aritmerička sredina.

Primer:
Skup vrednosti nekog obeležja 21, 25, 27, 30, 32 . Kako ima neparan broj vrednosti obeležja njegova medijana je srednja vrednost i medijana je 27.

Primer:
Skup vrednosti nekog obeležja 17, 19, 21, 23, 26, 28. U ovom primeru imamo paran broj vrednosti obeležja i medijana je aritmetička sredina dva srednja člana,

$$M_e = \frac{21+23}{2}.$$

Definicija:
Ako su vrednosti obeležja date intervalno, prvo se određuje medijalni interval u kome se nalazi srednji član, pa je ***medijana***

$$M_e = a_a + \frac{d}{f_k}\left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i\right).$$

Primer:
U primeru sa visinama učenika medijalni interval je $(165,170)$, $a_1 = 165$,
$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 3, f_4 = 7$ i d=5
Medijana visina učenika je
$M_e = 165 + \frac{5}{8}(16 - (1+1+3+7)) = 167{,}50$

Moda i medijana imaju veliku primenu u statistici, naročito kada treba naći onu vrednost obeležja koje se najčešće sreće. Naprimer, ako ispitujemo uslove stanovanja građana, bolji je pokazatelj veličine stambene površine koju koristi najveći broj stanovnika (mod), nego prosečna površina po jednom stanovniku (aritmetička sredina). Takođe, srednji vek trajanja službenih automobila u jednom preduzeću može se odrediti i pre rashodovanja svih automobila, tako što se nađe medijana kada broj rashodovanih automobila pređe polovinu.

Definicija:
Geometrijska sredina vrednosti obeležja X, koji uzima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ je

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n}.$$

Primer:
Geometrijsku sredinu brojeva $1, 8, 27$ je,
$G = \sqrt[3]{1 \cdot 8 \cdot 27} = 6$.

Definicija:
Harmonijska sredina vrednosti obeležja X, koji uzima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ je

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}}.$$

Primer:
Harmonijska sredina brojeva $1, 2, 3$ je,

$$H = \frac{3}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{18}{11}.$$

Između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine važi veza $H \leq G \leq \overline{X}$. Koju ćemo od sredina koristiti zavisi od problema koji treba rešiti i nema opšteg pravila. Za izračunavanje aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine koristimo sve postojeće vrednosti, dok se moda i medijana vezuju samo za ekstremne vrednosti. Geometrijska i harmonijska sredina su u suštini mere brzine promena posmatranih pojava.

7.3.2. PARAMETRI KOJI MERE RASTURANJE SLUČAJNE PROMENLJIVE OKO CENTRA RASTURANJA

Ovi parametri pokazuju kakvo je rasturanje podataka u skupu, što je u nekim praktičnim situacijama mnogo korisniji podatak .

VARIJANSA ILI DISPERZIJA

Varijansa ili disperzija je mera odstupanja koja se izračunava kao prosek kvadrata odstupanja sredine od vrednosti svakog podatka u skupu.

Definicija:
Ako obeležje X ima vrednosti $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, tada je ***varijansa*** ili ***disperzija***

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{X}\right)^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{X}^2,$$

Kada se vrednosti obeležja javljaju sa različitim frekvencijama onda je

$$s^2=\frac{\sum_{i=1}^{k}f_i\left(x_i-\bar{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k}f_i}=\frac{\sum_{i=1}^{k}f_ix_i^2}{\sum_{i=1}^{k}f_i}-\bar{X}^2,$$

gde je : x_i vrednost i-tog podatka, $\bar{X}$ aritmetička sredina, k broj klasa, f_i frekvencija i-te klase.

Primer:

Na osnovu broja dana koje je neki radnik proveo na bolovanju tokom jedne godine 7,23,4,8,2,12,6,13,9,4 odrediti rasturanje u odnosu na prosečan broj dana na bolovanju.

Rešenje:

Prosečan broj dana koji je proveo na bolovanju je

$$\bar{X}=\frac{7+23+4\cdot2+8+2+12+6+13+9}{10}=8,8.$$

x_i -broj dana na bolovanju	x_i^2	$x_i-\bar{X}=x_i-8,8$	$\left(x_i-\bar{X}\right)^2=\left(x_i-8,8\right)^2$
7	49	-1,8	3,24
23	529	14,2	201,64
4	16	-4,8	23,04
8	64	-0,8	0,64
2	4	-6,8	46,24
12	144	3,2	10,24
6	36	-2,8	7,84
13	169	4.2	17,64
9	81	0,2	0,04
4	16	-4,8	23,04
$\sum$ 88	$\sum$ 1108		$\sum$ 333,06

$$s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{333,06}{10} = 33,36$$ ili korišćenjem druge formule

$$s^2 = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1108}{10} - 8,8^2 = 33,36$$

Primer:

Odrediti rasturanje prodaje TV aparata na osnovu podataka datih u tabeli.

Broj aparata	8	9	10	11	12	13	14	15
Broj dana	2	4	6	7	5	4	1	1

Rešenje:

Prosečan broj prodatih TV aparata je $\overline{X} = \frac{\sum f \cdot x}{\sum f} = \frac{330}{30} = 11$

Prodato aparata x	Broj dana u mesecu f	x^2	$f \cdot x^2$	$\left(x - \overline{X}\right)^2$	$f \cdot \left(x - \overline{X}\right)^2$
8	2	64	128	9	18
9	4	81	324	4	16
10	6	100	600	1	6
11	7	121	847	0	0
12	5	144	720	1	5
13	4	169	676	4	16
14	1	196	196	9	9
15	1	225	225	16	16
$\sum$	30		3716		81

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{81}{30} = 2,7 \text{ ili}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \overline{X}^2 = \frac{3716}{30} - 11^2 = 2,7 .$$

STANDARDNA DEVIJACIJA

Disperzija ili varijansa nije pogodna za interpretaciju jer je izražena u kvadratima jedinice. Zbog toga se za interpretaciju rasturanja neke pojave koristi kvadratni koren dusperzije koji se naziva ***standardna devijacija*** ili ***standardno odstupanje***.

U predhom primeru imamo da je

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \overline{X}^2} = \sqrt{\frac{3716}{30} - 11^2} = \sqrt{2,7} = 1,643 .$$

7.4. RASPODELE PARAMETARA-STATISTIKA UZORKA

7.4.1. RASPODELA ARITMETIČKIH SREDINA UZORKA

Neka obeležje X u populaciji od N elemenata ima matematičko očekivanje $E\left(X\right) = \mu = \mu_x$, i disperziju $\sigma^2 = \sigma^2{}_x$.

Elementi bilo kog uzorka od n elemenata $X_1, \ldots, X_n$, ove populacije imaju isto matematičko očekivanje i disperziju, $E(X_i) = \mu, D(X_i) = \sigma^2$, pa su matematičko očekivanje i disperzija aritmetičke sredine $\bar{X}$ jednaki:

Definicija:

Matematičko očekivanje

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{n\mu}{n} = \mu,$$

Disperzija-varijansa

$$s^2 = D(\bar{X}) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D(X_k) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$ sa vraćanjem elemenata

$$s^2 = D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1},$$ bez vraćanja elemenata.

Standardno odstupanje

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$ sa vraćanjem elemenata

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$ bez vraćanja elemenata.

Standardno odstupanje aritmetičke sredine $\bar{X}$ zove se i ***standardna greška*** .

Znači, ako slučajna promenljiva X, koja predstavlja neko obeležje populacije, ima normalnu raspodelu $N(\mu, \sigma^2)$, onda će aritmetička sredina $\bar{X}$ imati takođe normalnu raspodelu oblika $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Ako slučajna promenljiva X nema normalnu raspodelu, ali je $n \geq 30$, onda će raspodela aritmetičkih sredina težiti normalnoj raspodeli.

Primer:

600 kuglica koje su proizvedene u jednoj fabrici ima srednju težinu 5gr i standardno odstupanje od 0,3gr. Bira se slučajan uzorak od 100 kuglica. Naći verovatnoću da će se težine svih kuglica u uzorku nalaziti u granicama od 4,9gr do 5,02gr, ako znamo da se radi o normalnoj raspodeli.

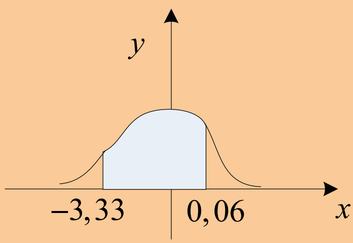
$\mu = \mu_x = \mu_{\bar{x}} = 5$, $s = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{0,3}{\sqrt{100}} = 0,03$,

a u slučaju formiranja uzorka bez vraćanja imamo

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}} = \frac{0,3}{\sqrt{100}} \cdot \frac{\sqrt{600-100}}{\sqrt{600-1}} \approx 0,027 .$$

$$P\left(4,9 < \bar{X} < 5,02\right) = P\left(\frac{4,9-5}{0,03} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{5,02-5}{0,03}\right) = P\left(-3,33 < Z < 0,66\right) =$$

$$\Phi\left(0,66\right) - \Phi\left(-3,33\right) = \Phi\left(0,66\right) - 1 + \Phi\left(3,33\right) = 0,7454 - 1 + 0,99955 = 0,74495$$



7.5. VAŽNI OBRASCI

Aritmetička sredina

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i \, .$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\left(x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \ldots + x_k f_k\right) = \sum_{i=1}^{k} x_i f_k = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i f_k}{\sum_{i=1}^{k} f_k}$$

Moda

$$M_o = a_1 + \frac{f_2 - f_1}{(f_2 - f_1) + (f_2 - f_3)} d$$

Medijana

$$M_e = a_a + \frac{d}{f_k}\left(\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^{k-1} f_i \right).$$

Geometrijska sredina

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} \ .$$

Harmonijska sredina

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \frac{f_i}{x_i}}.$$

Varijansa ili disperzija

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2} - \overline{X}^2,$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{k} f_i} - \overline{X}^2,$$

Matematičko očekivanje

$$E\left(\overline{X}\right) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\left(X_k\right) = \frac{n\mu}{n} = \mu,$$

Disperzija-varijansa

$$s^2 = D\left(\overline{X}\right) = D\left(\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} D\left(X_k\right) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n},$$

sa vraćanjem elemenata

$$s^2 = D\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} \cdot \frac{N-n}{N-1},$$

bez vraćanja elemenata.

Standardno odstupanje

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ sa vraćanjem elemenata}$$

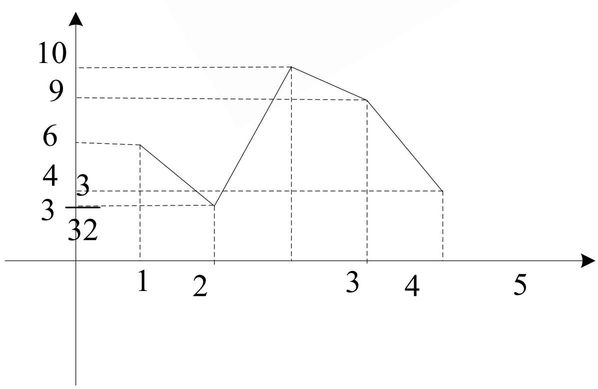
$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}, \text{ bez vraćanja elemenata.}$$

7.6. ZADACI

1. U jednoj grupi ima 32 studenta. Među njima neki nisu položili sve predmete na kraju junskog roka i to: 4 studenta nisu položila matematiku, 9 baze podataka, 10 verovatnoću, 3 računarske mreže i 6 osnove programiranja. Ako uzmemo da su vrednosti obeležja predmeti i to, 5 za matematiku, 4 za baze podataka, 3 za verovatnoću i tako redom, sistematizovati podatke, naći odgovarajuću tablicu raspodele frekvencija i nacrtati poligon raspodela frekvencija.

Rešenje:

X	1	2	3	4	5	
f_i	6	3	10	9	4	32
f_{ri}	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{32}$	$\frac{1}{8}$	1



2. Neka je osnovni skup sastavljen od brojeva 2,3,4,5,6,7,8.

a) Naći srednju vrednost i standardno odstupanje populacije.

b) Odrediti sve uzorke veličine 2 sa i bez vraćanja i naći njihove srednje vrednosti

c) Odrediti standardnu devijaciju za neke od uzoraka.

Rešenje:

a) kako je N=7 imamo

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N} = \frac{35}{7} = 5 \text{ i}$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{X}\right)^2}{N} = \frac{(2-5)^2 + (3-5)^2 + (4-5)^2 + (5-5)^2 + (6-5)^2 + (7-5)^2 + (8-5)^2}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\sigma = 2$$

b) U pitanju su varijacije sa ponavljanjem druge klase od sedam elemenata

$n = V_2^7 = 7^2 = 49$

$$\begin{array}{c}
(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(2,7)(2,8) \\
(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)(3,6)(3,7)(3,8) \\
(4,2)(4,3)(4,4)(4,5)(4,6)(4,7)(4,8) \\
(5,2)(5,3)(5,4)(5,5)(5,6)(5,7)(5,8) \\
(6,2)(6,3)(6,4)(6,5)(6,6)(6,7)(6,8) \\
(7,2)(7,3)(7,4)(7,5)(7,6)(7,7)(7,8)
\end{array}$$

Formirajmo uzorke od dva elementa (kombinacije druge klase bez ponavljanja). Ima ih $n = \binom{N}{k} = \binom{7}{2} = 21$ i to su.

$(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)(2,7)(2,8)$

$(3,4)(3,5)(3,6)(3,7)(3,8)$

$(4,5)(4,6)(4,7)(4,8)$

$(5,6)(5,7)(5,8)$

$(6,7)(6,8)$

$(7,8)$

Sredine vrednosti ovih uzoraka su:

$2,5;\ 3;\ 3,5;\ 4;\ 4,5;\ 5$

$3,5;\ 4;\ 4,5;\ 5;\ 5,5$

$4,5;\ 5;\ 5,5;\ 6$

$5,5;\ 6;\ 6,5$

$6,5;\ 7$

$7,5$

x_i	f_i	$x_i f_i$	$\left(x_i - \overline{X}\right)^2$	$f_i\left(x_i - \overline{X}\right)^2$
2,5	1	2,5	6,25	6,25
3	1	2	4,00	4,00
3,5	2	7	2,25	4,50
4	2	8	1,00	2,00
4,5	3	13,5	0,25	0,75
5	3	15	0,00	0,00
5,5	3	16,5	0,25	0,75
6	2	12	1,00	2,00
6,5	2	13	2,25	4,50
7	1	7	4,00	4,00
7,5	1	7,5	6,25	6,25
ukupno	21	105		35,00

Aritmetička sredina (srednja vrednost) i disperzija uzorka je:

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i f_i = \frac{105}{21} = 5 = \mu \,,$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i\left(x_i - \overline{X}\right)^2 = \frac{35}{21} = 1,667\,.$$

Istu vrednost dobijamo i kada formiramo uzorak bez vraćanja

$$s^2 = \frac{\sigma^2}{n}\cdot\frac{N-n}{N-1} = \frac{4}{2}\cdot\frac{7-2}{7-1} = 1,667$$

c) Standardno odstupanje za uzorak broj 6 je

$$s = \sqrt{\frac{1}{2}\left((2-5)^2 + (8-5)^2\right)} = \sqrt{9} = 3\,.$$

Odavde se uočava da je standardno odstupanje , koja je mera prosečnog odsupanja od srednje vrednosti jednaka 3, zato što vrednost uzorka, 2 i 8, tačno za 3 odstupaju od srednje vrednosti $\overline{X} = 5$

3. Odrediti empirijsku funkciju raspodele date slučajne promenljive X

$$X:\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 18 & 22 \end{pmatrix}$$

Rešenje:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{5} & 1 \le x < 2 \\ \frac{28}{50} & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

4. Visine 20 učenika neke osnovne škole su:
147,144,125,153,132,136,150,138,148,148,140,147,146,150,148,136,140,144,146,147
.

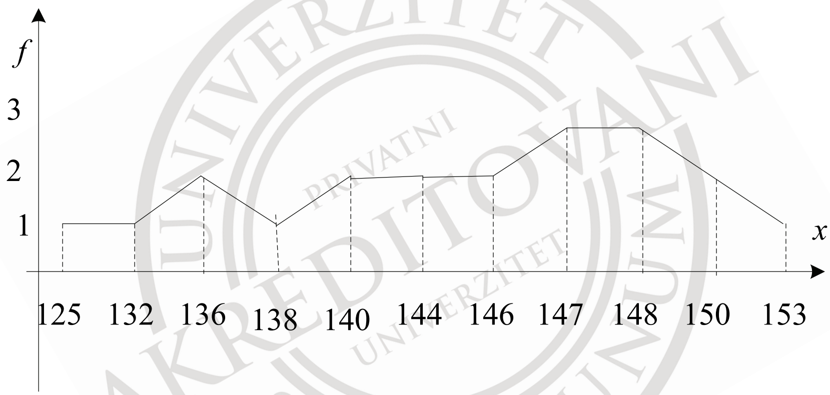
a) Odrediti raspodelu frekvencija
b) Konstruisati poligon raspodele frekvencija
c) Izračunati srednju vrednost
d) Izračunati medijanu
e) Izračunati modu

Rešenje:

a)

x_i	125	132	136	138	140	144	146	147	148	150	153
f_i	1	1	2	1	2	2	2	3	3	2	1
f_{ri}	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$

b)



c)

$$\bar{X}=\frac{1\cdot125+1\cdot132+2\cdot136+1\cdot138+2\cdot140+2\cdot144+2\cdot146+3\cdot147+3\cdot147+2\cdot150+1\cdot153}{20}=143,25$$

d) $M_e=144$

e) $M_o=147, M_o=148$.

5. Data je slučajna promenljiva $X:\begin{pmatrix}5 & 8 & 10 & 12\\ 1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Izračunati njenu aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu.

Rešenje:

$$\overline{X}=\frac{1\cdot 5+2\cdot 8+2\cdot 10+3\cdot 12}{8}=9,625$$

$$G=\sqrt[8]{5\cdot 8^2\cdot 10^2\cdot 12^3}=\sqrt[8]{552996000}$$

$$H=\frac{8}{\frac{1}{5}+\frac{2}{8}+\frac{2}{10}+\frac{3}{12}}$$

6. Četvorica radnika rade isti posao u fabrici cipela. Prvi radnik za 8h je završio i prekontrolisao 48 pari obuće, drugi radnik 80 pari, treći 120 i četvrti radnik 144 pari obuće. Izračunati koliki je prosečan broj završenih parova obuće.

Rešenje:

Ako prosečnu proizvodnju za 8h računamo preko aritmetičke sredine imamo

$$\overline{X}=\frac{48+80+96+120}{4}=86\ ,$$

Geometrijska sredina je $G=\sqrt[4]{48\cdot 80\cdot 96\cdot 120}$

Harmoniska sredina je

$$H=\frac{4}{\frac{1}{10}+\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}}=5,581$$ i to je prosečno vreme koje je potrebno utrošiti za proizvodnju jednog para obuće.

7. Četiri grupe studenta od 15, 20, 10 i 18 članova imaju visine 162, 148, 153 i 140cm. Naći aritmetičku sredinu njihovih visina.

Rešenje:

$$\overline{X}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{4}f_i}=\frac{15\cdot 162+20\cdot 148+10\cdot 153+18\cdot 140}{15+20+10+18}=150\,.$$

8. Izračunati aritmetičku sredinu podataka koji su dati sledećom tablicom

klase	60-62	63-65	66-68	69-71	72-72	
f_i	5	18	42	27	8	100

Rešenje:

klase	60-62	63-65	66-68	69-71	72-72	
f_i	5	18	42	27	8	100
Sredina klase	61	64	67	70	73	
$x_i f_i$	305	1152	3082	1890	584	7013

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{7013}{100} = 70,13$$

9. Na kraju ispitnog roka 60 studenata informatike dobilo je sledeće ocene iz matematike i diskretne matematike.

Ocene matematike	5	6	7	8	9	10
Broj studenata	10	12	23	7	5	3

Ocene diskretne matematike	5	6	7	8	9	10
Broj studenata	9	9	11	20	5	5

Izračumati srednje ocene iz oba predmeta i standardno odstupanje.

$$\overline{X}_1=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6}f_i}=\frac{5\cdot 10+6\cdot 12+7\cdot 23+8\cdot 7+9\cdot 5+10\cdot 3}{60}=\frac{414}{60}=6,9$$

x_{1i}	f_i	$x^2_{\ 1i}$	$x_{1i}f_i$	$x^2_{\ 1i}f_i$
5	10	25	50	250
6	12	36	72	432
7	23	49	161	1127
8	7	64	56	448
9	5	81	45	405
10	3	100	30	300
	60		414	2962

$$\overline{X}_1=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6}f_i}=\frac{5\cdot 10+6\cdot 12+7\cdot 23+8\cdot 7+9\cdot 5+10\cdot 3}{60}=\frac{414}{60}=6,9$$

$$s_1^2=\frac{\sum_{i=1}^{6}x_i^{\,2}f_i}{\sum_{i=1}^{6}f_i}-\overline{X}=\frac{2962}{60}-\left(6,9\right)^2=49,33-47,61=1,72$$

$$s_1=\sqrt{1,72}=1,31$$

x_{2i}	f_i	$x^2_{\ 2i}$	$x_{2i}f_i$	$x^2_{\ 2i}f_i$
5	9	25	45	225
6	9	36	54	324
7	11	49	77	593
8	20	64	160	1280
9	6	81	54	486
10	5	100	50	500
	60		440	3408

$$\overline{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} = \frac{5\cdot 9 + 6\cdot 9 + 7\cdot 11 + 8\cdot 20 + 9\cdot 6 + 10\cdot 5}{60} = \frac{440}{60} = 7,34$$

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} x_i^{\,2} f_i}{\sum_{i=1}^{6} f_i} - \overline{X} = \frac{3408}{60} - \left(7,34\right)^2 = 56,8 - 53,87 = 2,93$$

$$s_2 = \sqrt{2,93} = 1,71$$

Izraz $\dfrac{s}{\overline{X}}$ naziva se ***koeficijent korelacije*** i to je relativna mera odstupanja koja pokazuje koje se obeležje više menja u odnosu na aritmeričku sredinu.

$$\frac{s_1}{\overline{X}_1} = \frac{1,31}{6,9} = 0,19\,,\ \frac{s_2}{\overline{X}_2} = \frac{1,71}{7,43} = 0,23$$

Ocene iz diskretne matematike pokazuju veću promenljivost.

10. Pretpostavimo da su težine 4000 studenata normalno raspoređene $N\left(68kg, 9kg\right)$ i da smo izabrali 100 uzoraka od 25 studenata.

a) Koje vrednosti za aritmetičku sredinu i njeno standardno odstupanje možemo očekivati ako smo formirali uzorke sa i bez vraćanja?

b) U koliko uzoraka od uočenih 80 možemo očekivati da će se aritmetička sredina $\overline{X}$ naći u granicama od 66,8 do 68,3kg?

Rešenje:

a) U slučaju formiranja uzorka sa vraćanjem elemenata imamo

$$\mu = \mu_x = \mu_{\overline{x}} = 68 \ \text{ i } \ s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{\sqrt{25}} = 0,6\,,$$

a u slučaju formiranja uzorka bez vraćanja imamo

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{N-n}}{\sqrt{N-1}} = \frac{3}{\sqrt{25}} \cdot \frac{\sqrt{4000-25}}{\sqrt{4000-1}} \approx 0,6\,.$$

Na taj način raspodela aritmetičke sredine je $\overline{X} : N\left(68; 0,6\right)$.

b) Formirajmo standardnu slučajnu promenljivu Z sa raspodelom $N(0,1)$.

$$P\left(66,8 < \bar{X} < 68,3\right) = P\left(\frac{66,8-68}{0,6} < \frac{X-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{68,3-68}{0,6}\right) = P\left(-2 < Z < 0,5\right) =$$

$$\Phi(0,5) - \Phi(-2) = \Phi(0,5) - 1 + \Phi(2) = 0,6687$$

.

Očekivani broj uzoraka je $100 \cdot 0,6687 \approx 67$.

11. U fabrici se proizvode kuglice. Prečnik kuglice ima raspodelu $N(1,1)$. Sa proizvodne trake se uzimaju uzorci obima 100 delova. Izračunati verovatnoću da aritmetička sredina uzorka odstupi od očekivane vrednosti za manje od od 0,01.

Rešenje:

$\mu = 1, \sigma = 1, n = 100$

Aritmetička sredina uzorka ima normalnu raspodelu $\bar{X} : N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, jer je

$$E\left(\bar{X}\right) = \mu, D\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}, \text{ a } Z = \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} : N(0,1)$$

Traži se verovatnoća

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right| < z\right\} = P\left\{-0,01 < \bar{X}-\mu < 0,01\right\} = P\left\{\frac{-0,01}{\frac{1}{\sqrt{100}}} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{0,01}{\frac{1}{\sqrt{100}}}\right\} =$$

$$P\left\{-0,1 < Z < 0,1\right\} = 2\Phi(0,1) - 1 = 2 \cdot 0,5398 - 1 = 0,0796$$

12. Izračunati koliki treba uzeti obim uzorka iz populacije sa normalnom raspodelom, nepoznatog matematičkog očekivanja i $\sigma^2 = 100$, tako da verovatnoća odstupanja srednje vrednosti uzorka od očekivane vrednosti populacije za manje od 5 jedinica iznosi 0,954.

Rešenje:

$$\mu, \sigma = 10$$

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<z\right\}=P\left\{-5<\bar{X}-\mu<5\right\}=0,954$$

$$=P\left\{\frac{-5}{\frac{10}{\sqrt{n}}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{5}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right\}=P\left\{-\frac{\sqrt{n}}{2}<Z<\frac{\sqrt{n}}{2}\right\}=0,954$$

$$=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1=0,954 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2}=2$$

$$n=16$$

13. Za prečnik X nekog dela zna se da ima normalnu raspodelu sa varijansom 100. Kontrolor je uzeo 9 delova. Sa kojom verovatnoćom kontrolor može računati da će aritmetička sredina na uzorku odstupiti od matematičkog očekivanja za manje od 5 po apsolutnoj vrednosti.

Rešenje:

$$P\left\{\left|\bar{X}-\mu\right|<z\right\}=P\left\{-5<\bar{X}-\mu<5\right\}=$$

$$=P\left\{\frac{-5}{\frac{10}{\sqrt{9}}}<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{5}{\frac{10}{\sqrt{9}}}\right\}=P\left\{-\frac{3}{2}<Z<\frac{3}{2}\right\}=$$

$$=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)-1=0,8664$$

14. Iz populacije sa normalnom raspodelom $N(\mu,16)$ uzet je uzorak obima 16. Neka je aritmetička sredina $\bar{X}=5$. Izračunati verovatnoću da nepoznati parametar μ populacije bude u opsegu $(4,6)$.

Rešenje:

$$P(4<\mu<6)=P(-6<-\mu<-4)=P\left\{\frac{5-6}{\frac{4}{\sqrt{16}}}<\bar{X}-\mu<\frac{5-4}{\frac{4}{\sqrt{16}}}\right\}=$$

$$=P\{-1<Z<1\}=2\Phi(1)-1=0,6826$$

15. Pakovanje jedna vrste robe imaju u proseku težinu 1000gr. i standardno odstupanje od 10gr. Odrediti verovatnoću da će prosečna težina 100 pakovanja ove robe biti manja od 998gr.

Rešenje:

$\mu=1000$, $\sigma=10$.

$$P(\bar{X}<998)=P\left(\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<\frac{998-1000}{1}\right)=P(Z<-2)=1-\Phi(2)=0,02275.$$

16. Neka je $\bar{X}$ aritmetička sredina uzorka obima n iz $N(\mu,100)$. Odrediti n tako da je

$$P(\mu-5<\bar{X}<\mu+5)=0,954.$$

Rešenje:

$n=16$

8. OCENJIVANJE PARAMETARA RASPODELE

U raspodelama koje smo do sada proučavali sretali smo se sa različitim parametrima. Veličine *p,n* u binomnoj raspodeli, λ u Poasonovoj raspodeli, ili μ, σ u normalnoj raspodeli su parametri tih raspodela. Na osnovu iskustva ili poznavanja prirode posmatranog problema ponekad smo u mogućnosti da prepoznamo o kojoj je raspodeli reč. Najčešće to nije slučaj, ne poznajemo raspodelu i vrednosti njenih odgovarajućih parametara.

Zato je jedan od osnovnih zadataka sa kojim se sreće matematička statistika ocena parametara raspodele verovatnoća osnovne populacije, obeležja X, pomoću nekog njenog nezavisnog uzorka $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, da bi se na osnovu njega zaključilo o raspodeli cele populacije.

Problem se sastoji u nalaženju numeričkih karakteristika populacije, odnosno vrednosti nepoznatih parametara, na osnovu uzorka ili kako se obično kaže, ***ocenjivanje ili estimacija parametara*** raspodele.

Parametri raspodela obeležja nalaze se približno na osnovu uzorka. Tako dobijene vrednosti nazivamo ***ocenom parametara.***

Skup svih mogućih vrednosti parametra θ cele populacije obeležavamo sa Θ. Na osnovu uzorka $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ obima n, izvodi se ocena nepoznatog parametra θ u obliku funkcije $\overline{\theta} = f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$.

Definicija:
Svaka slučajna promenljiva koja je funkcija uzorka $f\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ naziva se ***statistika.***

Znači, parametri populacije θ, odnosno uzorka $\overline{\theta}$, su statistike.

Na osnovu zakona velikih brojeva $\overline{\theta} \to \theta$ kada $n \to \infty$, po verovatnoći, a greška ocene $\overline{\theta}$ u odnosu na tačnu vrednost θ može se učiniti proizvoljno malom ako je uzorak dovoljno veliki.

Koriste se dve vrste ocena parametara populacije. To su:

- ***Tačkaste ocene***

  Tačkasta ocena je broj (vrednost parametara) koji se izračunavaja na osnovu jednog uzorka i služi kao aproksimacija nepoznate vrednosti parametara raspodele osnovne populacije iz koje je uzorak uzet. Tačkasta ocena je slučajna promenljiva sa istom raspodelom kao slučajna veličina uzeta iz populacije. Ako je uzorak sa konačnim brojem podataka, moguća su velika ostupanja procene od stvarne vrednosti.

- ***Intervali poverenja***

  Ako su ocene parametara izražene u intervalima, onda se nazivaju ***intervalne ocene.*** Ovi intervali se nazivaju intervali poverenja (pouzdanosti) zato što se biraju intervali sa unapred datom pouzdanošću, odnosno verovatnoćom.

Ocena treba da bude:

- ***centrirana ili nepristrasna***

$$E\left(\overline{\theta}\right)=\theta$$

  Centriranost znači da ne postoji odstupanje date procene od prave vrednosti.

- ***efikasna*** je ona ocena koja ima min varijansu.

$$D\left(\overline{\theta}_1\right)\rightarrow \min \ .$$

  Za dve centrirane ocene $\overline{\theta}_1$ i $\overline{\theta}_2$, *efikasnija* je ona ocena koja ima manju varijansu.

$$D\left(\overline{\theta}_1\right)\leq D\left(\overline{\theta}_2\right) .$$

Aritmetička sredina uzorka je centrirana ocena matematičkog očekivanja populacije jer je

$$E\left(\overline{X}\right)=\mu .$$

Medijana uzorka je takođe centrirana ocena matematičkog očekivanja populacije

$$E\left(Me\right)=\mu .$$

Disperzija ili varijansa uzorka je nepristrasna ocena ako se računa po formuli

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$$

Primer:

Dat je uzorak od 5 elemenata iz populacije sa sredinom μ i neke njegove ocene. Koja je od sledećih ocena ovog parametra nepristrasna, a koja je najefikasnija?

$\overline{\mu}_1 = X_4$

$\overline{\mu}_2 = \dfrac{2X_1 - X_2}{2}$

$\overline{\mu}_3 = \dfrac{X_1 + X_2 + X_5}{5}$

$\overline{\mu}_4 = \dfrac{X_1 + 2X_2 + X_5}{4}$

$\overline{\mu}_5 = 2X_1 - X_2$

$\overline{\mu}_6 = \dfrac{X_2 + X_5}{2}$

Znajući da je $E(ax+b) = aE(x)+b$ i $E(x+y) = E(x)+E(y)$, imamo:

$$E(\overline{\mu}_1) = E(X_4) = \mu$$

$$E(\overline{\mu}_2) = \frac{E(2X_1 + X_2)}{2} = \frac{2\mu + \mu}{2} = \frac{3\mu}{2}$$

$$E(\overline{\mu}_3) = \frac{E(X_1 + X_2 + X_5)}{5} = \frac{3\mu}{5}$$

$$E(\overline{\mu}_4) = \frac{E(X_1 + 2X_2 + X_5)}{4} = \mu$$

$$E(\overline{\mu}_5) = E(2X_1 - X_2) = \mu$$

$$E(\overline{\mu}_6) = \frac{E(X_2 + X_5)}{2} = \mu$$

Centrirane su prva, četvrta, peta i šesta ocena.

A na osnovu pravila

$D(ax+b)=a^2D(x)$ i $D(x+y)=D(x)+D(y)$, a posmatrajući samo centrirane ocene imamo da je

$$D(\mu_1)=D(X_1)=\sigma^2$$
$$D(\bar{\mu}_4)=\frac{D(X_1+2X_2+X_5)}{16}=\frac{6}{16}\sigma^2=\frac{3}{8}\sigma^2$$
$$D(\bar{\mu}_5)=4D(X_1)+D(-X_2)=5\sigma^2$$
$$D(\bar{\mu}_6)=\frac{D(X_2+X_5)}{4}=\frac{2\sigma^2}{4}=\frac{\sigma^2}{2}$$

Najmanju varijansu ima četvrta ocena , znači ona je najefikasnija.

8.1.TAČKASTE OCENE

Posmatrajmo neko obeležje X populacije i neka je θ parametar posmatrane populacije, a $\bar{\theta}$ vrednost uočenog parametra dobijenog na osnovu uzorka.

Definicija:
Slučajna promenljiva $\bar{\theta}=f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ koja se koristi za ocenu nepoznatog parametra θ zove se ***tačkasta ocena.***

Ako je $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jedna realizacija slučajnog uzorka $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, tada se broj $\bar{\theta}=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ uzima za ocenu parametra θ.

Ova definicija dopušta da se na mnogo različitih načina definišu ocene za isti parametar θ. Na primer ako hoćemo da ocenimo matematičko očekivanje μ osnovne populacije, kao ocenu možemo da koristimo aritmetičku sredinu uzorka, modu, medijanu, geometrijsku sredinu, harmonijsku sredinu i sl. Neke od ovih vrednosti ocenjuju parametar bolje, a neke slabije.

8.1.1.TAČKASTE OCENE MATEMATIČKOG OČEKIVANJA

Standardna tačkasta ocena matematičkog očekivanja μ je aritmetička sredina definisana na uzorku veličine n nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sa istom raspodelom

$$\bar{X} = \bar{\mu} = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Sredina uzorka $\bar{X}$ je centrirana ocena matematičkog očekivanja jer je $E(\bar{X}) = \mu$.

8.1.2.TAČKASTE OCENE VARIJANSE

Ocena varijanse nezavisnih slučajnih promenljivih $X_1, X_2, \ldots, X_n$, gde je $\bar{X}$ aritmetička sredina data je izrazom

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2.$$

Varijansa uzorka s^2 nije centrirana ocena varijanse populacije σ^2, zato što je $E\left(s^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$. Centrirana ocena bi bila $\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \bar{X}\right)^2$.

Varijansa aritmetičke sredine $\bar{X}$ je

$$D\left(\bar{X}\right) = \frac{D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right) + \ldots + D\left(X_n\right)}{n^2} = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Primer:

Sredina uzorka $\bar{X}$ nije jedina centrirana ocena matematičkog očekivanja populacije μ. To su i $\bar{\mu}_1 = X_1$, $\bar{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2}$, $\bar{\mu}_3 = \frac{5X_1 + X_2}{6}$, zato što je

$$E(\bar{\mu}_1) = E(X_1) = \mu, E(\bar{\mu}_2) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{\mu + \mu}{2} = \mu, E(\bar{\mu}_3) = E\left(\frac{5X_1 + X_2}{6}\right) = \frac{5\mu + \mu}{6} = \mu$$

U predhodnom slučaju imamo da je

$$D(\overline{\mu}_1) = D(X_1) = \sigma^2,$$

$$D(\overline{\mu}_2) = \frac{D(X_1 + X_2)}{4} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}$$

$$D(\overline{\mu}_3) = \frac{D(5X_1 + X_2)}{36} = \frac{25\sigma^2 + \sigma^2}{36} = \frac{13}{18}\sigma^2$$

Najefikasnija je druga ocena, zato što je to ocena sa najmanjom varijansom.

8.1.3.TAČKASTE OCENE VEROVATNOĆE

Parametrom raspodele obeležja X može se smatrati i ***verovatnoća p*** ostvarivanja nekog slučajnog događaja *A* koji se može opisati pomoću slučajne promenljive X. Ako se eksperiment dodađaja *A* se ponavlja n puta onda dobijamo n slučajnih promenljivih $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ koje imaju Bernulijevu raspodelu $B(n, p)$, sa poznatim parametrom n i nepoznatim parametrom p.

Definicija:
Kao ocena parametra p uzima se relativna frekvenca $\overline{p}$ pojavljivanja događaja A u uzorku $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,

$$\overline{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} j_i,$$

gde je $j_i = 1$, ako je $x_i = 1$ neka vrednost obeležja X za koji se događaj A ostvaruje, inače je $j_i = 0$.

Primer:
Fabrika proizvodi kuglice standardnog prečnika 3,00 mm. Kuglica se smatra ispravnom oko njen prečnik odstupa od standardne najviše za 0,03 mm. Na osnovu uzorka od 11 kuglica dobijene su sledeće vrednosti duzina prečnika u mm: 3,02; 3,04; 2,98; 3,00; 3,01; 2,98; 2,99; 3,00; 3,06; 2,99; 3;05. Naći ocenu verovatnoće p da je kuglica koja je proizvedena ispravna.

Kako je za 8 prečnika iz datog uzorka odstupanje od nominalnog manje od 0,03mm, to je $\overline{p} = \frac{1}{11} \cdot 8 = 0,73$, jer je

$j_1 = j_3 = j_4 = j_5 = j_6 = j_7 = j_8 = j_{10} = 1$, a $j_2 = j_9 = j_{11} = 0$.

8.2. INTERVALI POVERENJA

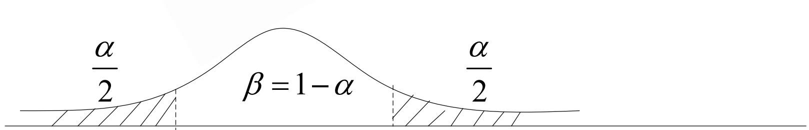
Pri ocenjivanju parametara $\theta_1, \theta_2, \ldots$ raspodela nekada je mnogo praktičnije naći intervale koji sa velikom verovatnoćom sadrže tačnu vrednost nepoznatog parametara.

Ovi intervali zovu se ***intervali poverenja*** ili ***intervali pouzdanosti***.

Interval poverenja se uvek vezuje za unapred izabranu verovatnoću, koju obično obeležavamo sa β.

Ako su granice traženog intervala Y_1, Y_2 tada verovatnoća da će se procenjena vrednost parametra naći u datom intervalu iznosi $p = \int_{Y_1}^{Y_2} f(x)\,dx$. Da bi se odredio interval poverenja, dakle treba odrediti površinu čija je vrednost $\beta = 1 - \alpha$, a zaklapa je kriva gustine sa x-osom.

Verovatnoća β se naziva ***nivo poverenja*** i najčešće se uzima da iznosi 0.9, 0.95 ili 0.99.



Definicija:
Neka je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak raspodele, gde je θ nepoznati parametar. Interval $\left[Y_1, Y_2\right]$ gde su Y_1 i Y_2 statistike nad datim uzorkom , nazivamo ***interval poverenja*** sa nivoom poverenja β, ako je $P\left(Y_1 < \theta < Y_2\right) = \beta = 1 - \alpha$.

Interval $\left[Y_1, Y_2\right]$ je slučajna promenljiva koja se menja od uzorka do uzorka. Brojne vrednosti $\hat{Y}_1, \widehat{Y}_2$ se izračunavaju na osnovu konkretnog uzorka $\left\{x_1, x_2, \ldots, x_n\right\}$, $\widehat{Y}_1 = f_1\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ i $\widehat{Y}_2 = f_2\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ i za ove fiksirane vrednosti interval postaje određeni brojni interval $\left[\widehat{Y}_1, \widehat{Y}_2\right]$. Kako je moguće izabrati proizvoljno mnogo uzoraka, moguće je odrediti i proizvoljno mnogo ovih intervala. Neki od ovih intervala sadrže parametar θ, a neki ne. Međutim ako je serija uzoraka dovoljno velika, relativna frekvenca uzoraka slučajeva kada interval sadrži parametar θ, biće približno jednaka β. To znači, da ako je $\beta = 0,95$, onda se parametar θ nalazi u tako definisanom intervalu u 95 od slučajeva 100. Ako je β veći broj, manji je interval poverenja koji sadrži nepoznati parametar. Koji od intervala biramo zavisi od konkretnog problema, odnosno koliku grešku možemo da dopustimo, a problem mala verovatnoća, veliki interval rešava se povećavanjem uzorka.

8.2.1. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE μ KADA JE POZNATA DISPERZIJA σ^2

Ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, tada aritmetička sredina uzorka $\overline{X}$ ima takođe normalnu raspodelu oblika $N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Granice traženog intervala poverenja Y_1, Y_2 za zadatu verovatnoću, odnosno nivo poverenja, $\beta = 1 - \alpha$, određujemo na osnovu tablica funkcije gustine normalne standardizovane raspodele.

Teorema:

Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nezavisan uzorak normalne raspodele $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Za nepoznato matematičko μ i poznatu varijansu σ^2 iznosi dvostrani interval poverenja je

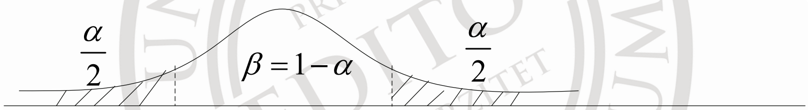
$$I : \left[\bar{X} - z_{\frac{1+\beta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\frac{1+\beta}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right],$$

jednostrani intervali poverenja su

$$I : \left(-\infty, \bar{X} + z_{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], I : \left[\bar{X} - z_{\frac{1+\beta}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, +\infty \right)$$

Dokaz:

Za dvostrani interval,



iz izraza

$\beta = P\left(-z < Z < z\right) = 2\Phi\left(z\right) - 1$, izračunava se vrednost $z = z_{\frac{1+\beta}{2}} = z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ na osnovu tablica za normalnu raspodelu.

Znajući da slučajna promenljiva $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ ima standardnu normalnu raspodelu $N\left(0,1\right)$ imamo

$$P\left(-z < \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < z \right) = P\left(-\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < -\mu < -\bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = P\left(\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) = \beta$$

Na osnovu čega se dobija interval poverenja za matematičko očekivanje

$$I:\left[\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Izraz $z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ naziva se i ***greška aritmetičke sredine (srednje vrednosti).***

Dužina intervala je $d=\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}-\left(\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=2z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Dužina intervala se smanjuje sa porastom obima uzorka n.

Primer:
Neka je godišnji prinos neke poljoprivredne kulture slučajna promenljiva sa standradnim odstupanjem od 16 jedinica. Na 100 kontrolnih parcela izmeren je srednji prinos od 175 jedinica. Odrediti 99% interval poverenja za očekivani prinos poljoprivredne kulture.

Znajući da je $\sigma=16, n=100, \bar{X}=175, \beta=0,99$,
interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je poznata disperzija iznosi

$$P(-z<Z<z)=P\left(-z<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}<z\right)=P\left(\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=\beta$$

$$P(-z<Z<z)=0,99\Rightarrow 2\Phi(z)-1=0,99$$

$$\Phi(z)=0,995\Rightarrow z=z_{\frac{1+\beta}{2}}=2,58$$

$$I:\left[\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I:\left[175-2,58\frac{16}{\sqrt{100}};175+2,58\frac{16}{\sqrt{100}}\right]=[170,872;179,128].$$

Primer:

Na osnovu uzorka od $n = 45$ komada nekog proizvoda sa normalnom raspodelom $N(\mu, 48)$, izarčunata je aritmetička sredina $\overline{X} = 32$. Naći 95% interval poverenja za nepoznatu sredinu populacije (matematičko očekivanje).

$$n = 45, \overline{X} = 32, \sigma^2 = 48$$

$$z = z_{\frac{1+\beta}{2}} = z_{\frac{1+0,95}{2}} = z_{0,975} = 1,96$$

$$I : \left[\overline{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I : \left[32 - 1,96\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{45}}; 32 + 1,96\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{45}} \right] = [29,89; 32,02].$$

8.2.2. INTERVAL POVERENJA ZA MATEMATIČKO OČEKIVANJE μ KADA JE NEPOZNATA DISPERZIJA σ^2

Ako je nepoznata disperija σ^2, onda se interval poverenja za matematičko očekivanje određuje ne samo na osnovu procene njegove aritmetičkom sredinom, već i na osnovu aproksimacije disperije σ^2, izrazom $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}\right)^2$.

Slučajna promenljiva $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ ima studentovu $t(n-1)$ raspodelu, a broj t određujemo na osnovu tablica za vrednosti ove raspodele.

Teorema:

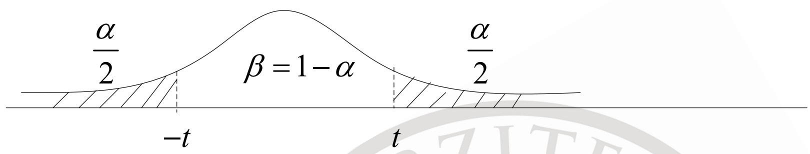
Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak iz normalne raspodele $N(\mu, \sigma^2)$, pri čemu je matematičko očekivanje nepoznato, a varijansa nepoznata,
dvostrani interval poverenja je

$$I : \left[\overline{X} - t\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t\frac{s}{\sqrt{n}} \right],$$

jednostrani intervali poverenja su

$$I:\left(-\infty, \bar{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right],\ I:\left[\bar{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

Dokaz:
Za dvostrani interval



iz izraza

$$P\left(-t<T<t\right)=P\left(-t<\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}<t\right)=P\left(-\bar{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}<-\mu<-\bar{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=,$$

$$P\left(\bar{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right)=\beta$$

Za poznato $\bar{X}$, s, i $t_{\frac{1-\alpha}{2},k}=t_{\frac{1+\beta}{2},k}=t$, koristeći tablice studentove t raspodele dobija se interval poverenja za matematičko očekivanje μ, sa nepoznatom disperzijom σ^2 koji iznosi

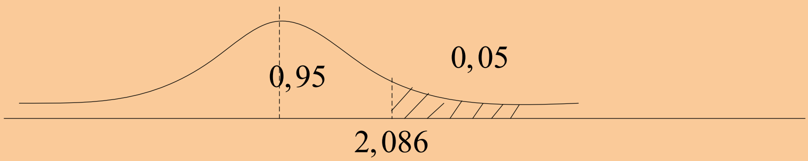
$$I:\left[\bar{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

Intrerval poverenja u slučaju kada je disperzija poznata je uži nego u slučaju kada disperzija nije poznata. To je za očekivati jer se ocenom i varijanse unosi dodatna nesigurnost. Za veliko n, praktično nema razlike u slučajevima kada je σ^2 poznato ili ne, zato što se tada t raspodela aproksimira normalnom.

Primer:

Ako je $t = 20$ i $\alpha = 0,01$, iz tablica dobijamo $t_{\frac{1+0,99}{2}}(19) = 2,086$

pa jednostrani interval izgleda



Primer:

Uočen je uzorak od 10 proizvoda. Na osnovu izmerenih vrednosti uzorka dobijena je sredina $\overline{X} = 3$ i ocena disperzije $s^2 = 0,25$. Odrediti interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje za verovatnoćom od $\beta = 0,95$

Znajući da je $s^2 = 0,25; s = 0,5; n = 10; \overline{X} = 3; \beta = 0,95$,
iz tablica za $t(9)$ dobijamo $t_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1) = t_{0,975}(9) = 2,262$,
Interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je nepoznata disperzija iznosi

$$I : \left[\overline{X} - t\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t\frac{s}{\sqrt{n}} \right]$$

$$I : \left[3 - 2,262\frac{0,5}{\sqrt{10}}; 3 + 2,262\frac{0,5}{\sqrt{10}} \right] = [2,64; 3,357].$$

8.2.3.INTERVAL POVERENJA ZA NEPOZNATU DISPERZIJU σ^2

Granice traženog intervala Y_1, Y_2 za zadatu verovatnoću β i u ovom slučaju određujemo na osnovu funkcije gustine, a koristeći tablice za $\chi^2(\beta, k)$ raspodelu.

Teorema:

Ako je $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uzorak iz normalne raspodele $N\left(\mu, \sigma^2\right)$, i varijansa je nepoznata, za nivo poverenja $\beta = 1-\alpha$ i $k = n-1$ stepena slobode,
dvostrani interval poverenja je

$$I : \left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}} ; k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}} \right]$$

jednostrani intervali poverenja su

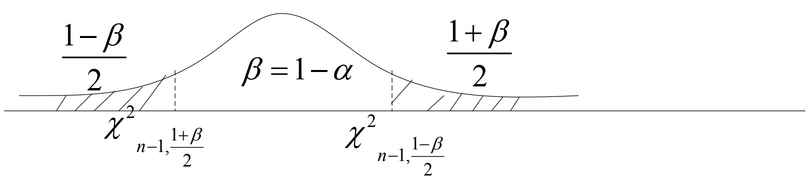
$$I : \left(-\infty ; k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}} \right], \; I : \left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}} ; +\infty \right)$$

Dokaz:

$$P\left(\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}} < \chi^2 < \chi^2_{\frac{1+\beta}{2}} \right) = \beta, \text{ pa sledi}$$

$$P\left(\frac{k \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}} < \chi^2 < \frac{k \cdot s^2}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}} \right) = \beta, \text{ odnosno interval}$$

$$I : \left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}} ; k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}} \right]$$



Primer:
Odrediti 95% interval poverenja za disperziju, ako zahtevana vrednost merenja uglova iznosi 1" . Obavljeno je 20 merenja i standardno odstupanje dobijeno u ovom uzorku iznosi $\pm 1,8"$.

Za $k = n - 1 = 19$, $\frac{1-\beta}{2} = 0,025$ i $\frac{1+\beta}{2} = 0,975$, dobijamo

$\chi^2{}_{19;0,975} = 32,825$ i $\chi^2{}_{19;0,025} = 8,907$

$$I : \left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}} ; k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}} \right] = \left[19 \cdot \frac{1,8^2}{32,825} ; 19 \cdot \frac{1,8^2}{8,907} \right] = [1,87; 6,91]$$

8.2.4. INTERVAL POVERENJA ZA VEROVATNOĆU p BINOMNE RASPODELE

Neka se u n ponavljanja Bernulijevih eksperimenata događaj A realizuje k puta. Kao što je već rečeno zakon raspodele u tom slučaju je dat sa

$$P_{p,n,k}(A) = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} .$$

Za velike vrednosti broja n slučajna promenljiva *X*, koja predstavlja broj realizacija događaja A u n ponavljanja eksperimenta ima približno normalnu raspodelu sa matematičkim očekivanjem $\mu = np$, disperzijom $\sigma^2 = npq$, gde je $q = 1 - p$.

Slučajna promenljiva $Z = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$ ima približno normalnu raspodelu $N(0,1)$.

Na osnovu ovih podataka interval poverenja za verovatnoću p može se izračunati na osnovu veze $P(-z < Z < z) = P\left(-z < Z = \frac{\overline{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}} < z \right) = \beta$.

Ovaj metod se koristi za $n \geq 30$.

Teorema:

Za nepoznatu verovatnoću binomne raspodele $\overline{p}$, ako je $s=\sqrt{pq}$ i nivo poverenja β

dvostrani interval poverenja je

$$I:\left[\overline{p}-s\frac{z}{\sqrt{n}};\overline{p}+s\frac{z}{\sqrt{n}}\right],$$

jednostrani intervali poverenja su

$$I:\left(-\infty;\overline{p}-s\frac{z}{\sqrt{n}}\right]\ I:\left[\overline{p}+s\frac{z}{\sqrt{n}};+\infty\right).$$

Primer:

Među 3000 testiranih proizvoda jedne fabrike uočeno je da ima 1578 onih koji su kvalitetni. Ako je u pitanju binomna raspodela, odrediti 99% interval poverenja za kvalitetne proizvode.

Kako je

$$n=3000;\ k=1580,\ \overline{p}=\frac{1578}{3000}=0,526,\ s=\sqrt{pq}=s=\sqrt{0,526\cdot 0,474}.$$

a na osnovu tablice za standardnu normalnu raspodelu dobijamo da je

$$z_{\frac{1+\beta}{2}}=z_{\frac{1+0,99}{2}}=z_{0,995}=2,58.$$

$$I:\left[\overline{p}-s\frac{z}{\sqrt{n}};\overline{p}+s\frac{z}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I:\left[0,526-\sqrt{0,526\cdot 0,474}\frac{2,58}{\sqrt{3000}};0,526+\sqrt{0,526\cdot 0,474}\frac{2,58}{\sqrt{3000}}\right]=[0,502;0,550].$$

8.3. VAŽNI OBRASCI

Centrirane ili nepristrasne ocene

$$E\left(\overline{\theta}\right)=\theta$$

Efikasna ocena

$$D\left(\overline{\theta}_1\right)\leq D\left(\overline{\theta}_2\right)$$

Ocena matematičkog očekivanja

$$\overline{X}=\overline{\mu}=\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}$$

Ocena varijanse

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k-\overline{X}\right)^2$$

Ocena parametra p

$$\overline{p}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}j_i \text{, gde je } j_i=1 \text{, ako je } x_i=1 \text{ , inače je } j_i=0.$$

Intervali poverenja za nepoznato μ i poznato σ

$$I:\left[\overline{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],\ I:\left(-\infty,\overline{X}+z_{\frac{1+\beta}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],I:\left[\overline{X}-z_{\frac{1+\beta}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},+\infty\right)$$

gde je $z=z_{\frac{1+\beta}{2}}=z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ -tablica normalne raspodele.

Intervali poverenja za nepoznato μ i nepoznato σ

$$I:\left[\overline{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right],I:\left(-\infty,\overline{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right],\ I:\left[\overline{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}},+\infty\right)$$

gde je $t=t_{\frac{1+\beta}{2}}\left(n-1\right)$ -tablica studentove t raspodele.

Intervali poverenja za nepoznato σ

$$I:\left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}};k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}}\right]I:\left(-\infty;k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}}\right],\ I:\left[k\frac{s^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}};+\infty\right)$$

gde je $k=\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}\left(n-1\right)$ -tablica $k=\chi^2$ raspodele.

Intervali poverenja za verovatnoću p

$$I:\left[\overline{p}-s\frac{z}{\sqrt{n}};\overline{p}+s\frac{z}{\sqrt{n}}\right],\ I:\left(-\infty;\overline{p}-s\frac{z}{\sqrt{n}}\right]\ I:\left[\overline{p}+s\frac{z}{\sqrt{n}};+\infty\right).$$

8.4. ZADACI

1. Dat je uzorak veličine 4 iz populacije sa sredinom μ. Koje od sledećih ocena ovog parameta su nepristrasne, a koja je najefikasnija?

$$\overline{\mu}_1 = X_3, \overline{\mu}_2 = \frac{2X_1 + X_4}{2}, \overline{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_3 + X_4}{5}$$

$$\overline{\mu}_4 = \frac{X_1 + 2X_3 - X_4}{2}, \overline{\mu}_5 = 2X_1 - \frac{X_3}{2}, \overline{\mu}_6 = \frac{X_2 + X_3}{3}$$

Rešenje:

$$E\left(\overline{\mu}_1\right) = \mu,$$

$$E\left(\overline{\mu}_2\right) = \frac{E\left(2X_1 + X_4\right)}{2} = \frac{3}{2}\mu,$$

$$E\left(\overline{\mu}_3\right) = \frac{E\left(X_1 + X_3 + X_4\right)}{5} = \frac{3}{5}\mu,$$

$$E\left(\overline{\mu}_4\right) = \frac{E\left(X_1 + 2X_3 - X_4\right)}{2} = \mu$$

$$E\left(\overline{\mu}_5\right) = E\left(2X_1 - \frac{X_3}{2}\right) = \frac{3}{2}\mu,$$

$$E\left(\overline{\mu}_6\right) = \frac{E\left(2X_2 + X_3\right)}{3} = \mu$$

Nepristrasne su prva, četvrta i šesta ocena.

Upoređujući vrednosti njihovih varijansi dobijamo

$$D(\overline{\mu}_1) = \sigma^2,$$

$$E(\overline{\mu}_4) = \frac{D(X_1 + 2X_3 - X_4)}{4} = \sigma^2$$

$$E(\overline{\mu}_6) = \frac{D(2X_2 + X_3)}{9} = \frac{9}{5}\sigma^2$$

da su druga i četvrata ocena podjednako efikasne.

2. Merenjem prečnika lopte dobijen je uzorak od 5 merenja 6,33; 6,37; 6,36; 6,35; i 6,37. Odrediti centriranu ocenu srednje vrednosti populacije, na osnovu definisanog uzorka i ocenu varijanse.

Rešenje:

Centrirana ocena sredene vrednosti populacije je aritmetička sredina uzorka.

$$\overline{X} = \frac{1}{5}(6,38 + 6,37 + 6,36 + 6,32 + 6,37) = 6,35$$

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{5}(X_i - \overline{x})^2 = 0,00055.$$

3. U cilju izračunavanja srednje dužine trajanja rada lampi iz jedne serije uzet je uzorak obima 400. komada.

X	1200	1210	1220	1230	1240
f	20	30	300	30	20

Sa nivoom poverenja $\beta = 0,9973$ odrediti interval poverenja za srednju dužinu rada lampi cele populacije , ako se zna da je disperzija populacije rada lampi 1225.

Rešenje:

Kako je $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k f_k = 1220$, $\sigma^2 = 1225, \sigma = 35, n = 400, \beta = 0,9973$,

dobijamo

$$z_{\frac{1+\beta}{2}} = z_{0,9986} = 2,99 \text{ i}$$

interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je poznata disperzija, je

$$P\left(-z < Z < z\right) = 0,9937 \Rightarrow 2\Phi\left(z\right) - 1 = 0,9937 \Rightarrow z = 2,99$$

$$I:\left[\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[1220 - 2,99\frac{35}{\sqrt{400}};1220 + 2,99\frac{35}{\sqrt{400}}\right] = \left[1214,77;1225;23\right]$$

4. Koliko najmanji uzorak treba uzeti iz populacije sa normalnom raspodelom čija je disperzija jednaka 9, tako da dužina 99% intervala poverenja za matematičko očekivanje ne bude veća od 5,16.

Rešenje:

$\sigma = 3,\ n = ?,\ \beta = 0,99$.

Interval poverenja je $I:\left[\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

Dužina intervala poverenja je $d = \bar{X} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} - \left(\bar{X} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Kako je uslov zadatka da dužina intervala ne bude veća od 5,16 imamo

$$d = 2z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le 5,16 \Rightarrow 2z\frac{3}{\sqrt{n}} \le 5,16.$$

Sa druge strane je

$z = z_{\frac{1+0,99}{2}} = z_{0,995} = 2,58$, pa dobijamo

$$2 \cdot 2,58\frac{3}{\sqrt{n}} \le 5,16 \Rightarrow n \ge 9.$$

5. Mereći vreme reagovanja pacijenata tokom stresa, lekar je procenio da je standradno odstupanje 0,05 sekundi. Koliki uzorak pacijenat treba uzeti iz populacije sa normalnom raspodelom, tako da u 95% slučajeva greška procene srednje vrednosti ne bude veća od 0,01.

Rešenje:

$\sigma = 0,05;\ n = ?;\ \beta = 0,95$

$z = z_{\frac{1+0,95}{2}} = z_{0,975} = 1,96$

Greška procene srednje vrednosti data je izrazom $z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$1,96\cdot\frac{0,05}{\sqrt{n}}\le 0,01 \Rightarrow n\ge 96,04 .$$

Treba uzeti uzorak od minimalno 97 pacijenata.

6. Neka je dat uzorak obima 100, sa nepoznatim matematičkim očekivanjem μ i poznatom disperzijom $\sigma^2=\dfrac{1}{4}$. Uporediti intervale poverenja za slučajeve nivoa poverenja 0,9 i 0,95.

Rešenje:

Kako je na osnovu tablica $z=z_{\frac{1+0,9}{2}}=z_{0,95}=1,64$, pa je sa verovatnoćom 0,9 interval poverenja

$$I_1:\left[\bar{X}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[\bar{X}-1,64\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{100}};\bar{X}+1,64\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{100}}\right]=\left[\bar{X}-0,082,\bar{X}+0,082\right]$$

Ako bi uzeli da je nivo poverenja 0,95, dobili bi interval $I_2:\left[\bar{X}-0,1,\bar{X}+0,1\right]$.

Znači da interval sa manjim nivoom poverenja ima i veću širinu.

7. Uzorak od 80 posmatranih računa u jednom restoranu pokazao je da račun ima srednju vrednost od 25 evra i standardno odstupanje 6 evra. Odrediti 95% i 99% intervale poverenja za srednju vrednost svih računa u tom restoranu.

Rešenje:

$$\sigma=6;\ n=80;\ \bar{X}=25;\ \beta_1=0,95;\ \beta_2=0,99$$

$$z_1=z_{\frac{1+095}{2}}=1,96,\ z_1=z_{\frac{1+095}{2}}=2,58$$

Pa dobijamo sledeće intervale:

$$I_1:\left[\bar{X}-z_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_1\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[25-1,96\frac{6}{\sqrt{80}};25+1,96\frac{6}{\sqrt{80}}\right]=[23,686;26,314]$$

$$I_2:\left[\bar{X}-z_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\bar{X}+z_2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]=\left[25-2,58\frac{6}{\sqrt{80}};25+2,58\frac{6}{\sqrt{80}}\right]=[23,29;26,71]$$

8. Uzorak od zadataka sa testa imao je srednji broj poena 68 i standradno odstupanje od 5 poena. Odrediti 95% i 99% interval poverenja za srednju vrednost broja poena zadataka.

9. Na osnovu uzorka od 15 elemenata, sa aritmetičkom sredinom od $\bar{X}=20,4$ i ocenom odstupanja $s=0,8$, naći 99% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje?

Rešenje:

Znajući da je $n=15;\ \bar{X}=20,4;s=0,8;\ \beta=0,99;t(14)$,

Na osnovu tablica je $t_{\frac{1+0,99}{2}}(9)=t_{\frac{0,995}{2}}(9)=3,012$ i

interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje kada je nepoznata disperzija iznosi

$$I:\left[\bar{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I:\left[20,4-3,012\frac{0,8}{\sqrt{15}};20,4+3,012\frac{0,8}{\sqrt{15}}\right]=[19,78;21,022].$$

10. Odrediti 95% interval poverenja za nepoznato matematičko očekivanje, gde je na uzorku od 16 merenja dobijena aritmetička sredina $\bar{X}=25,4$ i ocenom standarnog odstupanja od $\pm1,3$.

Rešenje:

Znajući da je $n=16;\ \overline{X}=25,4\,; s=1,3;\ \ \beta=0,95;\ t(15)$

Na osnovu tablica je $t_{\frac{1+0,95}{2}}(15)=t_{\frac{0,975}{2}}(15)=2,131$ i

interval poverenja iznosi

$$I:\left[\overline{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

$$I:\left[25,4-2,131\frac{1,3}{\sqrt{16}};25,4+2,131\frac{1,3}{\sqrt{16}}\right]=\left[24,707;26,092\right].$$

Možemo napisati i $25,4\pm 0,7$

11. Izvršeno je pet merenja dužine trajanja nekog signala. Dobijen je sledeći rezultat: $0,28;\ 0,30;\ 0,27;\ 0,33;\ 0,31$ sekundi. Odrediti 95% interval poverenja za srednju vrednost trajanja signala.

Rešenje:

$$\overline{X}=\frac{1}{5}\left(0,28+0,30+0,27+0,33+0,31\right)=0,298\,.$$

$\overline{X}$	$\overline{X}-X$	$\left(\overline{X}-X\right)^2$
0,28	0,018	0,000324
0,30	-0,002	0,000004
0,27	0,028	0,000784
0,33	-0,032	0,001024
0,31	-0,012	0,000144
0,298		0,002280

$$s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\overline{X}-X_k\right)^2,$$

$$s^2=\frac{1}{4}\cdot 0,00228=0,00057\Rightarrow s=0,024$$

$$t_{\frac{1+0,95}{2}}(4)=t_{0,975}(4)=2,776$$

$$I:\left[\overline{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}},\overline{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,298-2,776\frac{0,024}{\sqrt{5}};0,298+2,776\frac{0,024}{\sqrt{5}}\right]=$$

$$\left[0,298-0,029;0,298+0,029\right]=\left[0,269;0,327\right]$$

12. Na osnovu merenja dobijeni su rezultati: 180, 115, 221, 180, 256, 190, 185, 210, 160, 210, 180, 206, 180, 192. Naći interval poverenja za srednju vrednost populacije, ako je $\beta=0,99$.

Rešenje:

$$\overline{X}=\frac{1}{13}\left(3\cdot 180+115+221+256+190+185+2\cdot 210+160+206+192\right)=191,15$$

$$s=33,1,\ t_{0,995}\left(12\right)=3,055$$

$$I:\left[\overline{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}};\overline{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\right]\left[191,15-3,055\frac{33,1}{\sqrt{13}};191,15+3,055\frac{33,1}{\sqrt{13}}\right]=\left[162,33;219,97\right]$$

13. Na osnovu uzorka normalne raspodele $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ naći 95% interval poverenja za nepoznato μ. Koliki treba da je obim uzorka da bi širina intervala bila manja od 0,1 u slučajevima:

a) Poznata je disperzija $\sigma^2=1$

b) Disperzija σ^2 je nepoznata, ali je na osnovu uzorka veličine 10 izračunata ocena $s^2=1$.

Rešenje:

a) $d=2\cdot z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $z_{\frac{1+0,95}{2}}=1,96$,

$$2\cdot 1,96\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}<0,1\Rightarrow\sqrt{n}>39,2$$

$$n>1536,6$$

Obim uzorka treba da bude veći od 1537.

b) Ako je σ nepoznato, moramo da vodimo računa da i s zavisi od n. Pošto data vrednost $s^2=1$ izračunata na osnovu uzorka $n=10$

$$d=2\cdot t_\beta\left(n-1\right)\frac{s_n}{\sqrt{N}},\ n=10,\ t_{\frac{1+0,95}{2}}\left(9\right)=2,262,\ s=s_n=1,$$

$$2\cdot 2,262\cdot\frac{1}{\sqrt{N}}<0,1\Rightarrow\sqrt{N}>52,4$$

$$n>2745,76$$

Obim uzorka treba da bude veći od 2746.

14. Uzorak od 15 elemenata ima $\overline{X}=7,38$, $s=1,24$. Odrediti 95% i 99% interval poverenja za srednju vrednost sa nepoznatom disperzijom.

Rešenje:

$$7,38\pm 0,82$$

$$7,38\pm 1,16$$

15. Na nivou poverenja od 95% zahtevana tačnost merenja uglova je 2". Koliko je puta potrebno izvršiti merenje ako je standardno odstupanje merenja $\pm 2,6"$?

Rešenje:

Dužina intervala iznosi $d=2\cdot t_\beta\frac{s}{\sqrt{n}}$, odakle dobijamo $n=\left(\frac{t_\beta s}{d}\right)^2$.

$$n=\left(\frac{1,96\cdot 2,6}{2}\right)^2=6,49.$$

Pošto je uobičajeno da broj merenja bude paran broj, porebno je 8 merenja.

16. Jednim merenjem dobijene su sledeće vrednosti: 34,1; 27,4; 33,7; 31,1;30,9;35,2; 28,4; 32,1. Odrediti 90% interval poverenja za nepoznato matematičko očekvanje?

Rešenje:

$$\overline{X}=31,6$$

$$s^2=7,5,\ t_{0,95}\left(7\right)=1,895 \qquad I:\left[29,6;33,6\right].$$

17. Proizvodi fabrike lekova imaju normalnu raspodelu. U uzorku od $n = 20$ proizvoda izračunata je aritmetička sredina $\overline{X} = 32,29$ i procena disperzije $s^2 = 2,53$, naći 96% interval poverenja za nEpoznatu disperziju.

Rešenje:

$$I:[0,07;0,23].$$

18. Iz slučajno izabranog uzorka, populacije sa normalnom raspodelom, obima $n = 25$ komada izračunata je disperzija $s^2 = 12$. Odrediti interval poverenja za nepoznatu disperziju cele populacije sa verovatnoćom od 0,9.

Rešenje:

$$n = 25,\ s^2 = 12,$$

$$\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}} = \chi^2_{24,0,05} = 36,415,\ \chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}} = \chi^2_{24,0,95} = 13,848$$

$$I:\left[\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1-\beta}{2}}},\frac{ns^2}{\chi^2_{n-1,\frac{1+\beta}{2}}}\right] = \left[\frac{25\cdot 12}{36,415},\frac{25\cdot 12}{13,848}\right] = [8,238;21,664].$$

19. U 100 gađanja cilja strelac ga pogodi 60 puta. Naći 99% interval poverenja za nepoznatu verovatnoću p pogotka u jednom gađanju.

Rešenje:

$$n = 100,\ k = 60,\ \beta = 0,99$$

$$\overline{p} = \frac{60}{100} = 0,6,\ z = 2,58,\ s = \sqrt{p\cdot q} = \sqrt{0,6\cdot 0,4} = \sqrt{0,24} =$$

$$I:\left[\overline{p} - \frac{z}{\sqrt{n}}\cdot s;\overline{p} - \frac{z}{\sqrt{n}}\cdot s\right]$$

$$I:\left[\frac{k}{n} - \frac{z}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n}};\frac{k}{n} + \frac{z}{n}\sqrt{\frac{k(n-k)}{n}}\right] =$$

$$I:\left[\frac{60}{100} - \frac{2,58}{100}\sqrt{\frac{60(100-60)}{100}};\frac{60}{100} - \frac{2,58}{100}\sqrt{\frac{60(100-60)}{100}}\right] = [0,2;0,1].$$

20. Ako znamo da je nominalna vrednost neke veličine 1000 jedinica, a da su u 10 ponovljenih merenja dobijeni sledeći rezultati:

1001,3; 1001,2; 1001; 2; 1001; 5;1001;3; 1001,4; 1001,6; 1001,2;1001,3;1001,5,

Odrediti:

a) tačkastu centriranu ocenu nomiNalne vrednosti

b) tačkastu centriranu ocenu disperzije

c) interval poverenja za procenu nominalne vrednosti sa verovatnoćom od 0,95.

21. PreTpostavimo da u 220 pokušaja imamo 100 uspeha.Ako je ocena verovatnoće uspeha $\overline{p} = 0,455$ odrediti interval poverenja za p sa nivom poverenja 0,95.

22. Iz populacije obima N uzet je uzorak obima $n = 10$, čija je aritmetička sredina $\overline{X} = 4,2$ i uzoračka varijansa $s^2 = 49$. Zatim je uočen drugi uzorak obima $n = 8$, čija je aritmetička sredina $\overline{X} = 3,4$ i uzoračka varijansa $s^2 = 32$. Uporediti dužine 80% intervala poverenja.

23. Koliki uzorak treba posmatrati da bi se sa pouzdanošću od 95% dobio interval poverenja od 0,04, za procenat *p* lica koja su glasala za nekog kandidata na izborima?

9. TESTIRANJE HIPOTEZA

Na osnovu slučajno izabranog uzorka neke populacije, stiču se razna saznanja o toj populaciji. Ona se koriste u postavljanju, prihvatanju ili odbacivanju predpostavki koje se odnose ili na parametre obeležja X populacije i na njegovu raspodelu. Svaka predpostavka koja se odnosi na obeležje X populacije zove se ***statistička hipoteza.***

Hipoteze koje se odnose na raspodele obeležja nazivaju se ***neparametarske hipoteze***, dok se ***paramerarske hipoteze*** odnose na karakteristične parametre. Mi ćemo se baviti samo parametarskim hipotezama.

9.1 TESTIRANJE PARAMETERSKIH HIPOTEZA

Postavljene hipoteze podvrgavaju se ***statističkom proveravanju, verifikaciji*** ili ***testiranju***, pomoću koga se donose odluke, da li sa određenom ***verovatnoćom,*** hipoteze se prihvataju ili odbacuju.

Pre nego što se pristupi testiranju potrebno je definisati dve hipoteze:
H_0 - ***polaznu-nultu*** i H_1 -***suprotnu- alternativnu.***

Zaključak testa za proveravanje hipoteze može biti:

1. Odbacujemo H_0, kao posledicu eksperimenta na uzorku i prihvatamo H_1.

2. Ne odbacujemo H_0, jer na osnovu eksperimenta nemamo dokaza protiv nje.

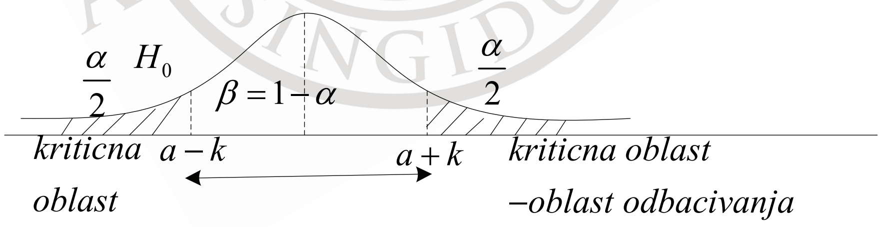
Primer:
Ako se na tržištu pojavi nov proizvod, proizvođač mora da dokaže da je njegov proizvod bolji od postojećih. Polazna hipoteza H_0 je da je novi proizvod najbolji, i da bi dokazao tu hipotezu, on mora da obori suprotnu, alternativnu H_1, da su stari proizvodi bolji od novog.

Kako nismo u mogućnosti da ispitamo celu populaciju, na osnovu uočenog uzorka ne možemo sa apsolutnom sigurnošću neku hipotezu da prihvatimo ili odbacimo. Odluke o prihvatanju ili odbacivanju nulte hipoteze se donose se na osnovu vrednosti X^* koja je rezultat eksperimenta na uočenom uzorku. Sa unapred zadatom ***verovatnoćom*** (naprimer 0,95) možemo da odredimo interval i ako vrednost X^* pripada tom intervalu nema razloga za odbacivanjem nulte hipoteze. Granice ovog intervala nazivamo gornji i donji ***prag značajnosti***. Za verovatnoću od 0,95 prag značajnosti je $\alpha = 0,05$, a to znači da postoji 5% rizika da vrednosti X^* ne pripada izračunatom intervalu i da nulta hipotezanije tačna.

Na osnovu praga značajnosti može da se izračuna broj ***k***, takav da je $P\left(\left|X^* - a\right| \geq k\right) = \alpha$, a sa njime i kritična oblast za nultu hipotezu H_0, odnosno intervali $(-\infty, a-k]$ i $[a+k, \infty)$ kojima pripadaju vrednosti koje jako odstupaju od vrednosti a. U ovom slučaju definiše se dvostrano testiranje jer se kritična oblast saStoji od dva intervala.

Ukoliko je $P\left(\left|X^* - a\right| < k\right) = 1 - \alpha$, dobijamo oblast prihvatanja nulte hipoteze, interval $[a-k, a+k]$

Testiranja mogu da budu i jednostrana, ako se zasnivaju na verovatnoćama $P\left(X^* - a \geq k\right) = \alpha$ ili $P\left(X^* - a \leq -k\right) = \alpha$. U ovim slučajevima kritična oblast za hipotezu H_0 je jedan od intervala $(-\infty, a-k]$ ili $[a+k, \infty)$.

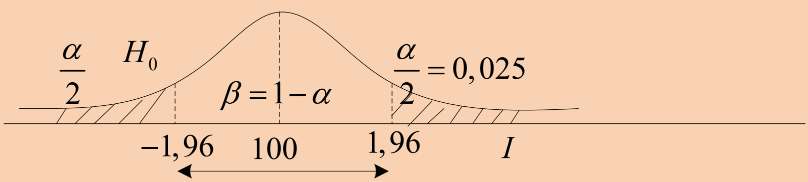


Primer:
Proizvođač električnih uređaja uvođenjem nove tehnologije prosečnu dužinu rada uređaja sa 100 sati pomera na 103 sata. Znajući da je u pitanju normalna raspodela sa disperzijom od $\sigma^2 = 16$ časova , slučajna promenljiva X koja predstavlja dužinu rada uređaja menja se sa raspodele $N(100,16)$, na raspodelu $N(103,16)$.

Hipoteza da je sredina $\mu = 100$, je ***nulta hipoteza*** $H_0(\mu = 100)$, a hipoteza da je sredina $\mu = 103$, je ***alternativna*** ili ***suprotna hipoteza*** $H_1(\mu = 103)$.

Testiranje hipoteze $H_0(\mu = 100)$ svodi se na statističku proveru, gde na osnovu slučajnog uzorka prihvatimo ili odbacimo hipotezu H_0, što povlači odbacivanje ili prihvatanje hipoteze H_1.

Ako izaberemo jedan proizvoljan uzorak od 16 elemenata, možemo da izračunamo aritmetičku sredinu tog uzorka i neka dobijemo naprimer, da je $\overline{x}_{16} = 102$. Ako je prag značajnosti, naprimer 0,05 onda ako je zadovoljeno $\mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le \overline{x}_{16} \le \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ prihvatamo hipotezu $H_0(\mu = 100)$ kao tačnu i odbacujemo alternativnu $H_1(\mu = 103)$. Ako je $\overline{x}_{16} < \mu - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ili $\overline{x}_{16} > \mu + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, onda sa pragom značajnosti odbacujemo hipotezu $H_0(\mu = 100)$ i prihvatamo hipotezu $H_1(\mu = 103)$. Sa promenom praga značajnosti dobili bismo neke druge brojne vrednosti.



Napomena: Ako slučajna promenljiva Z ima standardnu normalnu raspodelu tada nulta hipoteza se ne odbacuje ako:

$-1{,}96 \le Z \le 1{,}96$ kod verovarnoće od 0,05 (prag značajnosti 5%)

$-2{,}58 \le Z \le 2{,}58$ kod verovarnoće od 0,01 (prag značajnosti 1%)

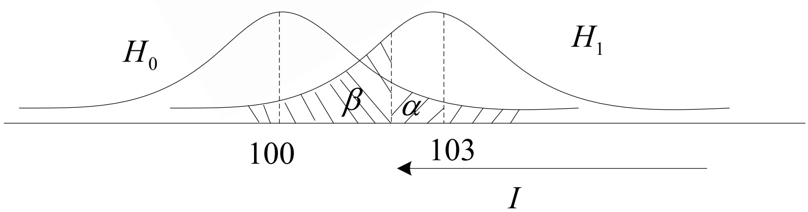
9.2. GREŠKE TESTIRANJA HIPOTEZA

Kod testiranja hipoteza zaključci se donose na osnovu uzorka, odnosno dela populacije na osnovu zadate verovatnoće. Iz tog razloga moguće je načiniti 2 vrste grešaka:

1. ***Greške prvog tipa***, α greške, nastaju kada nultu hipotezu H_0 odbacimo, a tačna je i prihvatimo alternativnu hipotezu H_1.
   U tom slučaju $X^* \in (-\infty, a-k] \cup [a+k, \infty)$
2. ***Greške drugog tipa***, β greške, nastaje kada nultu hipotezu H_0 ne obacimo, a pogrešna je.
   To je slučaj kada $X^* \in (a-k, a+k)$, a hipoteza H_1 je ipak tačna. Greške drugog reda vezuju se za verovatnoću koja se zove ***snaga testa*** i obeležava sa γ.
   $\beta + \gamma = 1$. To je verovatnoća da se odbaci netačna hipoteza H_0.

Idealan test ima male greške i prvog i drugog tipa. Uslovi za istovremeno smanjenje greški i prvog i drugog reda su oprečni. Ako se jedna smanuje, druga raste. Izlaz problema je u povećanju uzorka.

U predhodnom primeru imali bi sledeću situaciju što se tiče grešaka prvog i drugog tipa.



Primer:

U uzorku od 3000 bacanja novčića dobijeno je 1578 grbova. Verovatnoća dobijanja grba je 0,5 i taj podatak uzimamo kao nultu hipotezu, a podatak da će se dobiti više grbova uzima se kao alternativna hipoteza. Testirati nultu hipotezu sa pragom značajnosti od 0,01.

$H_0\left(p=0,5\right)$, a $H_1\left(p>0,5\right)$.

Slučajna promenljiva X predstavlja broj dobijenih grbova, sa binomnom raspodelom, koja se aproksimira normalnom raspodelm.

Iz uslova zadatka dobijamo da je:

$$p=0,5;\ n=3000;\ \mu=np=1500;\ \sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{750};\ \alpha=0,01.$$

Potrebno je odrediti ***kritičnu vrednost k*** za nultu hipotezu, i ona u ovom primeru treba da bude veća od 1500, što odgovara verovatnoći od 0,5 grbova. Tada ako je broj izračunatih grbova veći od *k*, odbacujemo hipotezu, inače je prihvatamo.

Ako bi koristili jednostrani test u našem primeru kritična oblast bila bi

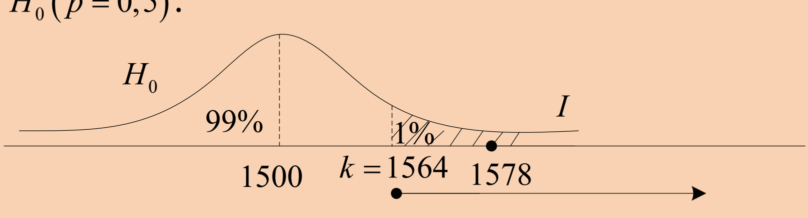
$$P\left(X>k\right)=\alpha$$

$$P\left(X>k\right)=1-P\left(X<k\right)=0,01\Rightarrow P\left(X<k\right)=0,99$$

$$P\left(\frac{X-\overline{X}}{\sqrt{npq}}<\frac{k-1500}{\sqrt{750}}\right)=0,99\Rightarrow\Phi\left(\frac{k-1500}{\sqrt{750}}\right)=0,99\Rightarrow$$

$$\frac{k-1500}{\sqrt{750}}=2,32\Rightarrow k=1564$$

Kako je 1578>1564, izračunata vrednost pripada kritičnoj oblasti i odbacujemo nultu hipotezu $H_0\left(p=0,5\right)$.



Ovaj primer mogao se rešiti i na drugi način, samo izračunavanjem praga značajnosti. Takva izračunavanja imaju određene prednosti jer se kvantitativno može odrediti koliko nulta hipoteza H_0 ***protivreči hipotezi*** H_1.

Sada u izračunavanju ćemo koristiti dvostrani test i za raliku od predhodnog izračunavanja odrediti oblast prihvatanja nulte hipoteze.

Iz relacije $P\left(-k<\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<k\right)=2\Phi\left(k\right)-1$, za dati prag značajnosti dobijamo da je $2\Phi\left(k\right)-1=0,99\Rightarrow k=2,58$.

Hipotezu $H_0\left(p=0,5\right)$ prihvatamo ako $-2,58<\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}<2,58$, inače je odbacujemo.

Na osnovu zadatih vrednosti dobijamo $\dfrac{1578-1500}{\sqrt{750}}=\dfrac{78}{27,4}=0,35$

Kako je 0,35>2,85, hipotezu H_0 odbacujemo i prihvatamo alternativnu H_1, sa rizikom od 1%.

Napomena: U ovom primeru kao nultu hipotezu mogli smo da uzmemo i $H_0\left(\mu=1500\right)$, a alternativna bi bila $H_1\left(\mu\neq1500\right)$.

9.3. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$ AKO SLUČAJNA PROMENLJIVA IMA NORMALNU RASPODELU, A σ JE POZNATO.

U slučaju testiranja nulte hipoteze H_0 protiv alternativne hipoteze H_1, ako slučajna promenljiva X ima normalnu raspodelu $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, a σ je poznato, koristi se statistika $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, koja ima standardnu normalnu raspodelu $N\left(0,1\right)$. U ovom izrazu $\overline{X}$ je aritmetička sredina dobijena na osnovu uzorka, μ_0 predpostavnjenu vrednost sredine populacije, σ je standardno odstupanje populacije i n je obim uzorka.

Testovi mogu biti ***dvosmeri*** kada testiramo hipotezu $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$ protiv hipoteze $H_1\left(\mu\neq\mu_0\right)$.

Kritična oblast odbacivanja nulte hipoteze $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$ je na osnovu praga značajnosti α

$$P\left(|Z|\geq z\right)=\alpha, \qquad (-\infty,-z]\cup[z,+\infty)$$

je odnosno ***oblast prihvatanja***

$$P\left(|Z|\leq z\right)=1-\alpha, \qquad [-z,z].$$

Kritične granice za dvosmerni test su

$$k_1=\mu_0-z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad k_2=\mu_0+z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Testovi mogu biti ***jednosmerni*** kada testiramo hipotezu $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$ protiv hipoteza $H_1\left(\mu>\mu_0\right)$ ili $H_1\left(\mu<\mu_0\right)$.

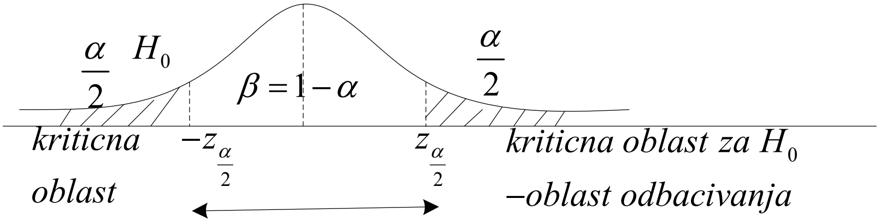
Kritična oblast odbacivanja hipoteze $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$ je na osnovu praga značajnosti α je $P\left(Z\geq z\right)=\alpha \quad [z,+\infty)$ ili $P\left(Z<z\right)=\alpha \quad (-\infty,z]$

odnosno oblast prihvatanja

$P\left(Z\leq z\right)=1-\alpha \quad (-\infty,z]$ ili $P\left(Z>z\right)=1-\alpha \quad [z,+\infty)$

Kod jednosmjernog testa kritična je granica : $k_2=\mu_0+z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, ili $k_1=\mu_0-z\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Verovatnoća α , ***prag značajnosti***, obično se uzima da je 0,01 i 0,05, a za izračunavanje koriste se tablice normalne raspodele.



Postupak rada:

1. Bira se uzorak i registruju njegove vrednosti $x_1, x_2, ..., x_n$.
2. Izračunava se aritmetička sredina zadatog uzorka $\overline{X}$ i računa broj
$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}.$$
3. Iz tablica za normalnu raspodelu i zadato $\alpha \in (0,1)$ određuje se broj z, kritična vrednost $z = z_{\frac{\alpha}{2}}$
4. Kritična oblast ili oblast odbacivanja nulte hipoteze je oblika $|Z| > z$, odnosno prihvatanja $|Z| < z$ (za dvosmerni test)
5. Na osnovu ovih podataka izvodi se zaključak

Ako je $|Z| \geq z$ hipoteza $H_0(\mu = \mu_0)$ se odbacuje, a ako je $|Z| < z$ nulta hipoteza se prihvata.

Primer:

Za dozu nekog leka zna se da ima normalnu raspodelu $N(\mu, 9)$. Uzet je uzorak obima 10 i na osnovu dobijenih podataka dobijena srednja vrednost doze od 24,3gr.

Sa pragom značajnosti od 5% testirati hipotezu za matematičko očekivanje od 24gr preko altetnativnog od 26gr.

$$X : N(\mu, 9), \overline{X} = 24,3$$
$$\sigma = 3; n = 10; \alpha = 0,05$$

$$H_0(\mu = 24)$$
$$H_1(\mu = 26)$$

Jednostrana oblast prihvatanja hipoteze je

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$P(Z < z) = 1 - \alpha$$

$$z = z_{1-\alpha} = z_{0,95} = 1,64$$

$$\frac{k - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 1,64 \Rightarrow k = 25,56$$

Za Z<z hipotezu H_0 ne odbacujemo.

Za Z>z hipotezu H_0 odbacujemo.

Kako je 24,3<25,56 hipotezu ne odbacujemo.

Do predhodnih vrednosti smo došli na osnovu rezonovanja:

$$P(Z > k) = \alpha \Leftrightarrow 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{k - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right) = \alpha \Rightarrow k = \mu \pm z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$P\left(Z < \frac{k - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right) = 0,95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{k - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{k - 24}{\frac{3}{\sqrt{10}}} = 1,64 \Rightarrow k = 25,56$$

9.4. TESTIRANJE HIPOTEZE $H_0(\mu = \mu_0)$ AKO SLUČAJNA PROMENLJIVA IMA NORMALNU RASPODELU, A σ JE NEPOZNATO.

Postupak je identičan predhodnom slučaju, samo se sada koristi statistika $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, gde je s uzoračko standardno odstupanje, a slučajna promenljiva ima studentovu $t(n-1)$ raspodelu.

Dvostrana kritična oblast za nultu hipotezu bila bi $|T| > t$, a dobija se na osnovu veze $P(|T| > t) = \alpha$, gde se $t = t_{\frac{1-\alpha}{2}}$ izračunava iz tablica za studentovu -t raspodelu.

Kritične vrednosti su $k_1 = \mu_0 - t_{\frac{1-\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ i $k_1 = \mu_0 + t_{\frac{1-\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Primer:
Mašina proizvodi kuglice prečnika debljine 0,5cm.Da bi proverili da li kuglice imaju prečnik propisane debljine uzima se uzorak od 10 kuglica. Ako je aritmetička sredina uzorka 0,53cm i uzoračko standardno odstupanje 0,03cm, testirati hipotezu da mašina proizvodi kuglice propisanog prečnika sa pragom značajnosti 0,05.

$X : t_\alpha(n-1) = t_{0,95}(9) = 2,26$

$s = 0,03, n = 10, \bar{X} = 0,53$

$H_0(\mu = 0,5); H_1(\mu = 0,53)$

$$P(T > k) = \alpha \Leftrightarrow 1 - P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{k - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{10}}}\right) = \alpha$$

$$P\left(T < \frac{k - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{10}}}\right) = 0,95 \Rightarrow t\left(\frac{k - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{10}}}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{k - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{10}}} = 2,26 \Rightarrow k = 25,56$$

Za T<k hipotezu H_0 ne odbacujemo,

Za T>k hipotezu H_0 odbacujemo.

Kako je 24,3<25,56 hipotezu ne odbacujemo.

9.5. VAŽNI OBRASCI

Greške prvog tipa

$$X^* \in (-\infty, a-k] \cup [a+k, \infty)$$

Greške drugog tipa

$$X^* \in (a-k, a+k)$$

Testiranje hipoteze $H_0(\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(\mu \neq \mu_0)$, $X : N(\mu, \sigma^2)$, a σ je poznato.

Kritična oblast

$$P\left(\left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \geq k\right) = \alpha .$$

Kritične vrednosti

$$k_1 = \mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad k_2 = \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

Testiranje hipoteze $H_0(\mu = \mu_0)$ protiv alternativne hipoteze $H_1(\mu \neq \mu_0)$, $X : N(\mu, \sigma^2)$, a σ je nepoznato.

$T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$, studentova $t(n-1)$ raspodela.

Kritična oblast

$$P(|T| \geq k) = \alpha$$

Kritične vrednosti

$$k_1 = \mu_0 - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad k_2 = \mu_0 + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} .$$

9.6. ZADACI

1. Sredina dužine trajanja 100 sijalica određenog uzorka je 1570h, sa standardnim odstupanjem od 120h. Ako je μ matematičko očekivanje (srednja dužina) trajanja sijalice te fabrike, testirati hipotezu $H_0\left(\mu=1600\right)$ sa hipotezom $H_1\left(\mu\neq 1600\right)$, koristeći pragove značajnosti a) 0,05, b) 0,01.

Rešenje:

Testiranje hipoteze $H_0\left(\mu=\mu_0\right)$, protiv hipoteze $H_1\left(\mu\neq\mu_0\right)$, sa nivoom značajnosti α , znači da koristimo statistiku $Z=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$.

Kritična vrednost z se nalazi iz uslova $P\left(\left|Z\right|\geq z\right)=\alpha$, odnosno oblast prihvatanja

$P\left(\left|Z\right|<z\right)=1-\alpha$.

a)

$\overline{X}=1570; \sigma=120; n=100; \alpha=0,05$

$H_0\left(\mu=1600\right)$

$H_1\left(\mu\neq 1600\right)$

Iz relacije $P\left(-z<Z<z\right)=2\Phi\left(z\right)-1$, za verovatnoću od 0,95, dobijamo da

$2\Phi\left(z\right)-1=0,95\Rightarrow\Phi\left(z\right)=0,975\Rightarrow z=1,96$.

Hipotezu $H_0\left(\mu=1600\right)$ prihvatamo ako $-1,96<Z<1,96$, inače je odbacujemo.

Kako je izračunata vrednost $\dfrac{\left|1570-1600\right|}{\dfrac{120}{\sqrt{100}}}=\left|-2,50\right|=2,50>1,96$,veća od zadatog praga značajnosti, hipoteza se odbacuje sa rizikom od 5%

b) Ako je verovatnoća 0,99, onda je oblast prihvatanja hipoteze (-2,58, 2,58). Izračunata vrednost je 2,50, pripada ovoj oblasti i prihvatamo hipotezu.

2. Prosečni vek trajanja sijalice je 2000h, sa standardnim odstupanjem od 250h. Izabran je slučajni uzorak od 100 sijalica i na osnovu njega je određena srednja vrednost 1935h. Sa rizikom od 1% može li se predpostaviti da uzorak koji je izabran, odgovara standardu?

Rešenje:

Neka su $H_0\left(\mu = 2000\right)$ i $H_1\left(\mu \neq 2000\right)$.

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{1935 - 2000}{\dfrac{250}{\sqrt{100}}} = -2,6$$

Sa pragom značajnosti od 0,01 oblast prihvatanja nulte hipoteze jr

$$P\left(-z < Z < z\right) = 0,99 \Rightarrow -2,58 < Z < 2,58.$$

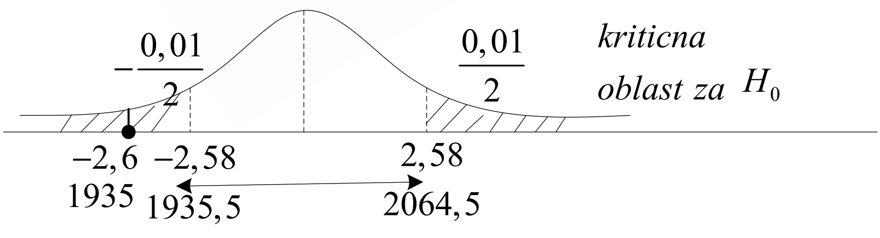
Kako je izračunata vrednost zadovoljava vezu $-2,58 > -2,6$, nulta hipoteza se odbacuje. Znači ne prihvata se hipoteza da se u pitanju standardni uzorak populacije od 2000h.

Zadatk smo mogli rešiti i određujući broj sati rada sijalica.

Kritične granice bi bile $k = \mu \pm -z \cdot \sigma$, odnosno

$k_1 = 2000 - 2,58 \cdot 25 = 1935,5$ i $k_2 = 2000 + 2,58 \cdot 25 = 2064,5$.

Kako je izračunata aritmetička sredina $\overline{X} = 1385$ manja od donje kritične vrednosti, vrednost pripada kritičnoj oblasti i nulta hipoteza se odbacuje.



3. U 4040 bacanja novčića dobilo se 2048 grbova (Bufonov eksperiment). Testirati hipotezu $H_0\left(p = 0,5\right)$, protiv alternativne hipoteze $H_1\left(p \neq 0,5\right)$. Uzeti da je rizik 5%.

Rešenje:

Neka slučajna promenljiva X predstavlja broj grbova u 4040 bacanja novčića. Ova slučajna promenljiva ima binomnu raspodelu, koju aproksimiramo normalnom, sa matematičkim očekivanjem $\mu = np = 4040 \cdot 0,5 = 2020$ i standardnim odstupanjem $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4040 \cdot 0,5 \cdot 0,5} = \sqrt{1010}$.

Oblast prihvatanja hipoteze određujemo iz uslova

$$P\left(\left|X\right| \le k\right) = 1 - \alpha$$

$$P\left(-z < \frac{\bar{X} - 2020}{\sqrt{1010}} \le z\right) = P\left(-z < Z \le z\right) = 0,95$$

$$\Phi\left(z\right) = 0,975 \Rightarrow z = 1,96$$

Kako je

$\dfrac{2048 - 2020}{\sqrt{1010}} = 0,88 < 1,96$, ne odbacimo nultu hipotezu.

4. Fabrika proizvodi sijalice koje prosečno rade 120 sati. Na uzorku od 144 sijalice određena je aritmetička sredina dužine rada sijalica i dobijeno je 125h, sa odstupanjem od 86,62h. Sa pragom značajnosti 0.05 postavlja se pitanje da li se zadržati na ovom tipu proizvoda ili izvršiti povećanje dužine rada sijalice?

Rešenje:

$n = 144$, $\bar{X} = 125$, $\sigma = 86,62$, $\alpha = 0,05$

$H_0\left(\mu \le 120\right)$ $H_1\left(\mu > 120\right)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{125 - 140}{\frac{86,62}{\sqrt{144}}} = 0,69$$

Oblast prihvatanja nulte hipoteze dobijamo iz uslova $P\left(Z < z\right) = 1 - \alpha$

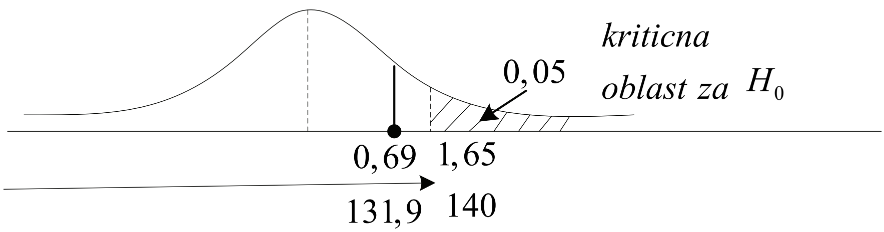
$$P\left(Z < z\right) = 1 - 0,05 \Rightarrow P\left(Z < z\right) = 0,95,\ z = 1,65$$

Kako je $Z = 0,69 < 1,65$ nulta hipoteza se prihvata.

Ako bi odredili kritičnu vrednost imali bi

$$k = \mu_0 + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 120 + 1,65\frac{86,62}{\sqrt{144}} = 131,9,$$

a $131,9 < 140$ i dolazimo do istog zaključka.



Znači treba nastaviti tekuću proizvodnju.

5. Iz populacije sa obeležjem X za koje se zna da je odstupanje 300, ne zna se raspodela, uzet je uzorak oblika 99856 i na osnovu njega je dobijena srednja vrednost 24,3. Sa niviom značajnosti od 5% testirati hipotezu $H_0(\mu = 24)$, prema alternativnim $H_1(\mu > 24)$, $H_1(\mu < 24)$ i $H_1(\mu \neq 24)$.

Rešenje:

$\sigma = 300;\ n = 99856;\ \bar{X} = 24,3;\ \mu_0 = 24;\ \alpha = 0,05$

Kako je n dovoljno veliko nepoznatu raspodelu aproksimiramo normalnom.

U svim slučajevima se koristimo statistikom $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

a) $H_0(\mu = 24)$, $H_1(\mu > 24)$

Kritična oblast se dobija iz uslova $P(Z > z_1) = \alpha$, i kritična oblast je (z_1, ∞)

$P(Z > z_1) = 1 - P(Z < z_1) = 0,05 \Rightarrow P(Z < z_1) = 0,95$

$\Phi(z_1) = 0,95 \Rightarrow z_1 = 1,64$

Kako je $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{24,3 - 24}{\dfrac{300}{\sqrt{99856}}} = 0,316 < 1,64$, nulta hipoteza se prihvata, jer

$0,316 \notin (1,64, \infty)$ praipada kritičnoj oblasti testa,

b) $H_0(\mu = 24)$, $H_1(\mu < 24)$

Kritična oblast se dobija iz uslova $P(Z < z_2) = \alpha$, sa verovatnoćom greške i kritična oblast je $(-\infty, z_2)$

$P(Z < z_2) = 0,05$. Ova vrednost ne postoji u tablicama jer se radi o negativnim vrednostima, pa je $\Phi(z_2) = 0,05 \Rightarrow 1 - \Phi(-z_2) = 0,05 \Rightarrow z_2 = -1,64$

Kako je $Z = 0,316 > -1,64$, nulta hipoteza se prihvata, tj .

$(-\infty, -1,64)$ je kritična oblast testa, a $0,316 \notin (-\infty, -1,64)$

c) $H_0(\mu = 24)$, $H_1(\mu \neq 24)$

Kritična oblast se dobija iz uslova $P(|Z| > z) = \alpha$, i kritična oblast je $(-\infty, -z) \cup (z, \infty)$

$P(|Z| > z) = 0,05 \Rightarrow 1 - P(|Z| < z) = 0,05 \Rightarrow P(|Z| < z) = 0,95$

$\Phi(z) = 0,95 \Rightarrow z = 1,64$

$Z = 0,316$, hipoteza se prihvata, tj .

$0,316 \notin (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$.

6. Šećer se pakuje u kese nominalne težine 1kg. U cilju kontrole uzet je uzorak od 100 pakovanja. Znajući da je standardno odstupanje 30g, i prag značajnosti 0,05 testirati hipotezu da u standardnim pakovanjima ima manje šećera.

Rešenje:

$X : (1000, 9)$, $\mu = 1000g$, $\sigma = 30g$, $n = 100$

$H_0(\mu = 100)$, $H_1(\mu < 100)$,

Oblast prihvatanja hipoteze je

$P(Z < z) = \alpha, P(Z < z) = 0,05$

$\Phi(z) = 0,05 \Rightarrow 1 - \Phi(-z) = 0,05 \Rightarrow z = -1,64$

$P(Z < z) = \alpha$

$$P\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{k - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = \alpha$$

$$P\left(Z < \frac{k - 1000}{3}\right) = 0,95 \Rightarrow \frac{k - 1000}{3} = -1,64$$

$k = 995$

I nulta hipoteza se ne odbacuje.

7. U hemijskom procesu koristi se rastvor pH=8,30. Metoda merenja pH podleže normalnom zakonu raspodele sa odstupanjem od 0,02.
U uzorku od 6 merenja dobijene su sledeće vrednosti 8,29; 8,30; 8,31,; 8,30; 8,32; 8,34. Na osnovu dobijenih rezultata za izmerene vrednosti pH testirati hipotezu $H_0\left(\mu = 8,30\right)$, protiv hipoteze $H_1\left(\mu \neq 8,30\right)$, sa pragom značajnosti $\alpha = 0,05$

Rešenje:

Sredina ovog uzorka je $\overline{X}_6 = \dfrac{8,29+8,30+8,31+8,30+8,32+8,34}{6} = 8,31$,

$\sigma = 0,02$, i $Z = \dfrac{\overline{X}_6 - k}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{8,31-8,30}{\dfrac{0,02}{\sqrt{6}}} = 1,22$.

Oblast prihvatanja hipoteze je $P\left(\left|Z\right| < z\right) = 1 - 0,05$, i iz tablica se dobija $z = 1,96$

Kako je $-1,96 < Z = 1,22 < 1,96$ nulta hipoteza se ne odbacuje.

8. Radi ispitivanja ispravnosti težine proizvedenog artikla posmatran je uzorak od 10 proizvoda i dobijeni su sledeći rezultati u kilogramima:

360 370 385 367 355 365 375 330 342 320

Može li se prihvatiti tvrđenje da je prosečna težina artikla 350 kg? Uzeti da je prag značajnosti 1%.

Rešenje:

$\overline{X} = 356,9kg$, $s = 6,478kg$, $n = 10$ $\mu_0 = 350kg$

Testirati hipotezu $H_0\left(\mu = 350\right)$ protiv alternativne $H_1\left(\mu \neq 350\right)$.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\dfrac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{356,9-350}{\dfrac{6,478}{\sqrt{10}}} = 1,065$$

Za $\alpha = 0,01 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 0,005$, pa iz tablica za studentovu-t raspodelu dobijamo $t_{0,995}\left(9\right) = 3,250$.

Ako je $-t_{\frac{1-\alpha}{2}} < T < t_{\frac{1-\alpha}{2}}$, nulta hipoteza se prihvata, inače se odbacuje.

Kako je $-3,25 < T < 3,25$, a izračunata vrednost je $T = 1,065$ i pripada intervalu, nulta hipoteza se prihvata, a to znači da je prosečna težina artikla 350kg.

Zadatak se mogao rešiti i na sledeći način.
Ako uzmemo da su granice intervala u kilogramima

$k_1 = \mu_0 - t_{\frac{1-\alpha}{2}} s$ i $k_2 = \mu_0 + t_{\frac{1-\alpha}{2}} s$, dobijamo da je $k_1 = 328,05kg$ i $k_2 = 371,94kg$.

Kako se izračunata srednja vrednost $\overline{X} = 356,9kg$ nalazi između granica, odnosno $328,94 < 356,9 < 371,94$, nulta hipoteza se prihvata.

9. Mašina proizvodi ploče debljine 0,5mm. Da bi se proverilo da li mašina dobro radi uzet je uzorak od 25 ploča i na osnovu njega određena je aritmetička sredina $\overline{X} = 0,53mm$ sa standardnim odstupanjem od 0,03mm. Testirati hipotezu da su ploče propisane debljine sa pragom značajnosti od 0,01.

10. Rešenje:

$\overline{X} = 0,53mm$, $s = 0,03mm$, $n = 25$ $\mu_0 = 0,5mm$

$H_0(\mu = 0,5)$ $H_1(\mu \neq 0,5)$.

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{0,53 - 0,5}{\frac{0,03}{\sqrt{25}}} = 5$$

$t_{0,01}(9) = 3,25$

Kako je $T = 5 > 3,25$, a izračunata vrednost ne pripada intervalu, nulta hipoteza se odbacuje sa rizikom od 1%.

11. Iz jedne populacije dobijen je uzorak

X	210-250	250-290	290-330	330-370
f	30	70	40	10

a) Izračunati srednju vrednost uzorka i uzoračku disperziju

b) Sa 0,99 intervalno oceniti srednju svednost.

c) Testirati hipotezu $H_0(\mu = 270)$ protiv alternativne $H_1(\mu \neq 270)$.

12. Biolog je posmatrao broj X leptirova u uzorku od 121 i zabeležio sledeće rezultate.

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f	7	11	16	17	26	31	11	1	1

a) Izračunati srednju vrednost uzorka i uzoračku disperziju
b) Sa 0,99 intervalno oceniti srednju svednost broja leptirova populacije
c) Testirati hipotezu $H_0(\mu = 5)$ protiv alternativne $H_1(\mu \neq 5)$.

INDEKS POJMOVA

LITERATURA

1. M. Spiegel, J. Schiller, R. Srinivasan: *Probability and Statistics*. Schaum, Mc Graw hill, 2009.

2. M. Merkle: *Verovatnoća i statistika.* Akademska misao, Beograd, 2006.

3. S. Vukadinović: *Elementi teorije verovatnoće imatematičke statistike* .Privredni pregled, Beograd, 1974

4. P. Vasić: *Zadaci i problrmi teorije verovatnoće.* Građevinska knjiga, Beograd, 1974.

5. M. Rajović, D. Stanosević: *verovatnoća i statistika, teorija i primeri.*Akademska misao, Beograd, 2006.

TABLICE

Tablica vrednosti λ i k za Poasonovu raspodelu

	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
0	0.904837	0.818731	0.740818	0.670320	0.606531	0.548812
1	0.090484	0.163746	0.222245	0.268128	0.303265	0.329287
2	0.004524	0.016375	0.033337	0.053626	0.575816	0.098786
3	0.000151	0.C01091	0.003334	0.007150	0.012636	0.019757
4	0.000004	0.000055	0.000250	0.000715	0.001580	0.002964
5	0.000000	0.000002	0.000015	0.000057	0.000158	0.000356
6	0.000000	0.000000	0.000001	0.000004	0.000013	0.000035
7	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000003
	0.7	0.8	0.9	1.0	2.0	3.0
0	0.496585	0.449329	0.406570	0.367879	0.135335	0.049787
1	0.347610	0.359463	0.365913	0.367879	0.270671	0.149361
2	0.121663	0.143785	0.164661	0.183940	0.270671	0.224042
3	0.028388	0.038343	0.049398	0.061313	0.180447	0.224042
4	0.004968	0.007669	0.011115	0.015328	0.090224	0.168031
5	0.000695	0.001227	0.002001	0.003066	0.036089	0.100819
6	0.000081	0.000164	0.000300	0.000511	0.012030	0.050409
7	0.000008	0.000019	0.000039	0.000073	0.003437	0.021604
8	0.000000	0.000002	0.000004	0.000009	0.000859	0.008101
9	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000191	0.002701
10	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000038	0.000810
11	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000007	0.000221
12	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000055
13	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000013
14	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003
15	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
0	0.018316	0.006738	0.002479	0.000912	0.000335	0.000123
1	0.073263	0.033690	0.014873	0.006383	0.002684	0.001111
2	0.146525	0.084224	0.044618	0.022341	0.010735	0.004998
3	0.195367	0.140374	0.089235	0.052129	0.028626	0.014994
4	0.195367	0.175467	0.133853	0.091226	0.057252	0.033737
5	0.156293	0.175467	0.160623	0.127717	0.091604	0.060727
6	0.104194	0.146223	0.160623	0.149003	0.122138	0.091090
7	0.059540	0.104445	0.137677	0.149003	0.139587	0.117116
8	0.029770	0.065278	0.103258	0.130377	0.139587	0.131756
9	0.013231	0.036266	0.068838	0.101405	0.124077	0.131756
10	0.005292	0.018133	0.041303	0.070983	0.099262	0.118580
11	0.001925	0.008242	0.022529	0.045171	0.072190	0.097020
12	0.000642	0.003434	0.011262	0.026350	0.048127	0.072765
13	0.000197	0.001321	0.005199	0.014188	0.029616	0.050376
14	0.000056	0.000472	0.002228	0.007094	0.016924	0.032384
15	0.000015	0.000157	0.000891	0.003311	0.009026	0.019431
16	0.000004	0.000049	0.000334	0.001448	0.004513	0.010930
17	0.000001	0.000014	0.000118	0.000596	0.002124	0.005786
18	0.000000	0.000004	0.000039	0.000232	0.000944	0.002893
19	0.000000	0.000001	0.000012	0.000085	0.000397	0.001370
20	0.000000	0.000000	0.000004	0.000030	0.000159	0.000617
21	0.000000	0.000000	0.000001	0.000010	0.000061	0.000264
22	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000022	0.000108
23	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000008	0.000042
24	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000016
25	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000006
26	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002
27	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001

Normalna raspodela

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	7054	.7088	.7123	.7157	.7190	7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	9846	9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	9994	.9995	9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	9996	.9996	.9996	.9997
3.4	9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Studentova- t raspodela

V	*995	'.99	'.975	'.95	'90	'.80	'.75	'.70	'.60	'.55
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2 88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
OC	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

n	0.005	0.01	0.025	*u* 0.05	0.95	0.975	0.99	0.995
1	0.0000 4	0.0001 6	0.0009 8	0.0039 3	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.0201	0.0506	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	13.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	24.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.484	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.772	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672