# 17.IAM002.AI.Diskretne i kombinatorne metode za računarsku grafiku

Animacija u inženjerstvu

školska 2024/25

## Literatura


[1] Z. Ovcin, Algoritmi i optimizacioni postupci na diskretnim strukturama, osnove i savremeni pristupi, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2024
`https://nblok306.ftn.uns.ac.rs/~zoran/A/DiKMzRG/pocetak.pdf`
`https://nblok306.ftn.uns.ac.rs/~zoran/A/DiKMzRG/folije.pdf`
`https://nblok306.ftn.uns.ac.rs/~zoran/A/DiKMzRG/`
`https://nblok306.ftn.uns.ac.rs/~zoran/`

[2] Z. Ovcin, J. Đokić, Zbirka zadataka za Diskretne i kombinatorne metode za računarsku grafiku, Fakultet tehničkih nauka, Univerzitet u Novom Sadu, 2024


## Bodovi i datumi

| | Deo 1 | Deo 2 | Usm. | Σ |
|---|---|---|---|---|
| MAX | 40 | 40 | 20 | 100 |
| MIN | 18 | 18 | 0 | 51 |
| Datumi | 23. XI 17:00 | | | |

# Istorija upotrebe mašina za računanje

- Tablice trigonometrijske i logaritamske
  - Sumerske
  - Starogrčke
  - Napier 1614, Briggs 1617
- Antikythera (Ancient Greek), Abacus (Roman Empire)
- Difference engine 0 (Charles Babbage, 1822)
- Floating point, Human computers (Lorentz 1920's)
- Turing's machine, Computability (Alan Turing 1936)
- Universal machine, Z3 (Konrad Zuse 1943)
- Eniac (1946), Edvac (Von Neumann 1949)
- UNIVAC I mainframe computer (Eckert–Mauchly CC, 1951)
- Apple II (1977), Commodore 64 (1982), ZX Spectrum (1982)

- IBM PC (Intel 8088, 1981), Apple Macintosh 128K (Motorola 68k, 1984)

### Operativni sistemi

- PCDOS, MSDOS (Microsoft), System Software 1.0 (MAC OS Apple)
- VAX VMS (DEC), Unix (Bell System, AT&T)
- Linux (Linus Torvalds, GNU, Intel 80386, 1991-1994)
- Windows 3.12, Windows 95, Windows XP, Windows 7, 10, 11 (Microsoft)
- Apple macOS (Apple MAC, 2001), iOS (Apple iPhone, 2007)
- Android (Google, 2008)

### Internet

- IPv4 (DARPA, 1980), ARPANET (1981), TCP/IP (1982), IPv6 (IETF 1998)
- WWW (CERN, 1989), ISP (1990s), Google(1998), Facebook (2004)

# Algoritmi i kompjuterski programi

## Šta je algoritam?

## Šta je kompjuterski program?

## Interpretiranje vs Izvršavanje

## Istorija kompjuterskog programiranja

- Da li je kompjuterski program algoritam?
- Da li se svaki kompjuterski program prevodi na mašinski jezik?
- Da li se Java programi prevode na mašinski jezik?
- Da li postoji programski jezik koji se može i kompajlirati i interpretirati?
- Da li su HTML, CSS, Java, JavaScript, TypeScript programski jezici?
- Da li postoje programi čije izvršavanje daje isti rezultat na svim kompjuterima?

# Programiranje

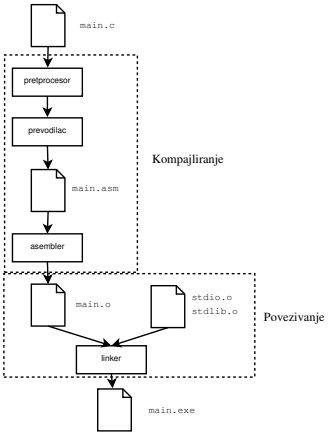
## Primer programa za interpreter

```
set.seed(12345);
n<-5000;
s<-numeric(n);
for(k in 1:n)
  {s[k]<-ks.test(runif(100),'punif')$p.value};
sum(s<.05)/n
```

## Primer programa za kompajliranje

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>

int main()
{
    char ime1[]="Petra";
    char ime2[]="Petar";

    if (strcmp(ime1,ime2)){
        printf ("'%s' i '%s' se razlikuju.\n", ime1, ime2);
    }
    else{
        printf ("'%s' i '%s' se ne razlikuju.\n", ime1, ime2);
    }

    if (strncmp(ime1,ime2,3)){
        printf ("'%s' i '%s' se razlikuju do treceg slova.\n", ime1, ime2);
    }
    else{
        printf ("'%s' i '%s' se ne razlikuju do treceg slova.\n", ime1, ime2);
    }

    return 0;
}
```

# Programski jezici




Proces kompajliranja u C-u

1949: Assembler (Kathleen Booth, University of London)

1957: FORTRAN (John Backus, IBM)

1958: Algol (ETH Zürich, Association for Computing Machinery, IFIP)

1959: COBOL (Dr. Grace Murray Hopper), LISP (John McCarthy, MIT)

1964: BASIC (John G. Kemeny, Thomas E. Kurtz, Dartmouth College)

1970: Pascal (Niklaus Wirth, ETH Zürich, Palo Alto Research Cente)

1972: C (Dennis Ritchie, Bell Labs), SQL (IBM)

1978: MATLAB (Cleve Moler, University of New Mexico)

1983: C++ (Bjarne Stroustrup, Bell Labs)

1987: Perl (Larry Wall, System Development Corporation)

1990: Haskell (Functional Programming committee)

1991: Python (Guido Van Rossum, CWI Netherlands), Visual Basic (Microsoft)

1993: R (Ross Ihaka, Robert Gentleman, University of Auckland, New Zeland)

1995: Java (Sun Microsystems), PHP (Rasmus Lerdorf), Ruby (Yukihiro Matsumoto), JavaScript (Netscape, Brendan Eich)

2000: C# (Microsoft)

2003: Scala (École Polytechnique Fédérale de Lausanne), Groovy (Apache)

2009: GO (Google)

2014: Swift (Apple)

# Pseudokod

**function** Ime funkcije

Telo funkcije

...

Komanda za izlazak iz funkcije (obavezna): **return** izraz

...

**end function**

**procedure** Ime procedure

...

**end procedure**

Naredbe za regulisanje toka programa su:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **for** ... **to** ... **do** | **while** ... **do** | **repeat** | **if** ... **then** |
| ... | ... | ... | ... |
| ... | ... | ... | **else** |
| ... | ... | ... | ... |
| **end for** | **end while** | **until** ... | **end if** |

Naredba **break** izvodi iz kontrolne petlje.

Naredba $\leftarrow$ je direktiva pridruživanja (:=).

Osnovni tipovi: numerički, karakter, logički (Bulovski), pokazivač, string, struktura.

Izrazi nad numeričkim i logičkim tipovima koriste matematičke i logičke operacije.

Netačno je nula (0 ili **false**) a tačno (**true**) je sve što je različito od nule, obično jedan (1).

Argumenti se prenose kao u C-u. Niz je adresa na prvi element niza. Tip niza je implicitno poznat.

Podrazumevano je da su promenljive **lokalne**, po potrebi **globalne**.

```
1:  function PROGRAM1(A)
2:      n ← length(A)
3:      flag ← true
4:      for j ← 1 to n − 1 do
5:          if A[j] > A[j + 1] then
6:              flag ← false
7:          end if
8:      end for
9:      return flag
10: end function
```

Šta sa ulaznim nizom $A$ radi algoritam dat levo?
Da li se može ubrzati, a da daje isti rezultat?
Napisati ekvivalentan program bez upotrebe for petlje (koristiti **while** petlju).

```
function PROGRAM1A(A)
    n ← length(A)
    flag ← true
    for j ← 1 to n − 1 do
        if A[j] > A[j + 1] then
            flag ← false
            break
        end if
    end for
    return flag
end function
```

```
function PROGRAM1B(A)
    n ← length(A)
    flag ← true
    j ← 1
    while flag &(j ≤ n − 1) do
        if A[j] > A[j + 1] then
            flag ← false
        end if
        j ← j + 1
    end while
    return flag
end function
```

```
function PROGRAM1C(A)
    n ← length(A)
    flag ← true
    j ← 1
    while flag &(j ≤ n − 1) do
        flag ← A[j] ≤ A[j + 1]
        j ← j + 1
    end while
    return flag
end function
```

## Analiza kompleksnosti

Zadatak je da se na osnovu veličine ulaznih parametara odredi (najbolja) asimptotska oznaka za vreme izvršavanja.

Koriste se specijalne asimptotske oznake koje porede beskonačne veličine.

```
1: function PROGRAM1(A)
2:     n ← length(A)
3:     flag ← true
4:     for j ← 1 to n − 1 do
5:         if A[j] > A[j + 1] then
6:             flag ← false
7:         end if
8:     end for
9:     return flag
10: end function
```

Analizirati vreme izvršavanja programa levo u zavisnosti od vremena izvršavanja linija koda $c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_9$ i dužine ulaznog niza $n$.

| vreme izvršavanja | $c_2$ | $c_3$ | $c_4$ | $c_5$ | $c_6$ | $c_9$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| broj izvršavanja | 1 | 1 | $n$ | $n-1$ | $m$ | 1 |

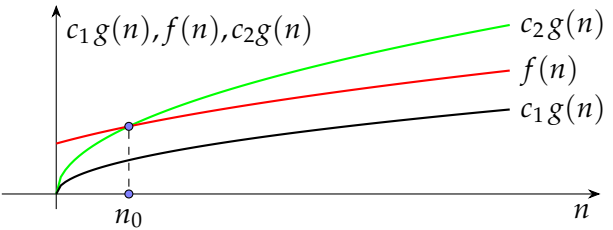
| | |
|---|---|
| Best case | $T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + 0\,c_6 + c_9 = \Theta(n)$ |
| Worst case | $T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + (n-1)\,c_6 + c_9 = \Theta(n)$ |
| Average case | $T(n) = c_2 + c_3 + nc_4 + (n-1)c_5 + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor c_6 + c_9 = \Theta(n)$ |

# Asimptotske oznake

$\Theta(g) = \{f | (\exists c_1 > 0)(\exists c_2 > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)\ (n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n))\}$
$O(g) = \{f | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq f(n) \leq c g(n))\}$
$\Omega(g) = \{f | (\exists c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)\ (n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq c g(n) \leq f(n))\}$
$o(g) = \{f | (\forall c > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n)(n \geq n_0) \Rightarrow (0 \leq f(n) \leq c g(n))\}$

$f \in \Theta(g)$, pišemo $f = \Theta(g)$, funkcija $f$ se ponaša kao $\Theta(g)$ (kao veliko teta od $g$).

$$\begin{aligned} f = \Omega(g) &\leftrightarrows f \geq g \\ f = O(g) &\leftrightarrows f \leq g \\ f = \Theta(g) &\leftrightarrows f = g \\ f = o(g) &\leftrightarrows f < g \end{aligned}$$



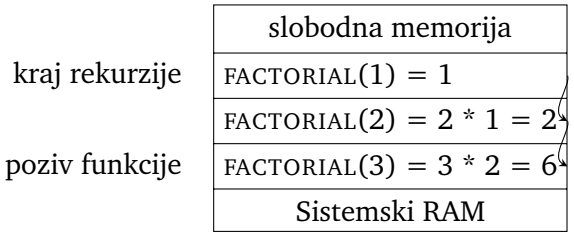

$\frac{2}{3}n^2 - 2n = \Theta(n^2)$, jer počev od $n_0 = 4$, za $c_1 := \frac{1}{6}$ i $c_2 = \frac{2}{3}$, važi $0 < c_1 n^2 \leq \frac{2}{3}n^2 - 2n \leq c_2 n^2$.
Za nizove $f$ i $g$ koji teže ka beskonačnosti ako je $f = o(g)$ pišemo $f \prec g$.
Ako je $0 < \alpha < \beta$, i $1 < a < b$, onda važi:

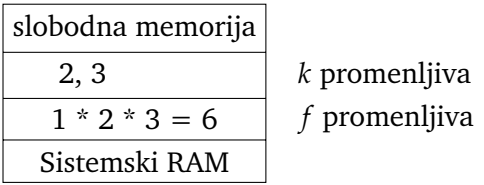
$$\cdots \prec \log\log n \prec \log n \prec n^\alpha \prec n^\beta \prec a^n \prec b^n \prec n! \prec n^n \prec \cdots$$

# Rekurzija

```
function FACTORIAL(n)
    if n ≤ 1 then
        return 1
    else
        return n · FACTORIAL(n − 1)
    end if
end function
```

```
function FACTORIAL(n)
    f ← 1
    for k ← 2 to n do
        f ← f · k
    end for
    return f
end function
```




**Stirlingova aproksimacija** $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

# Fibonačijevi brojevi

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,...

```
function FIBONACCI(n)
    if n ≤ 1 then
        return n
    else
        return FIBONACCI(n − 1) + FIBONACCI(n − 2)
    end if
end function
```

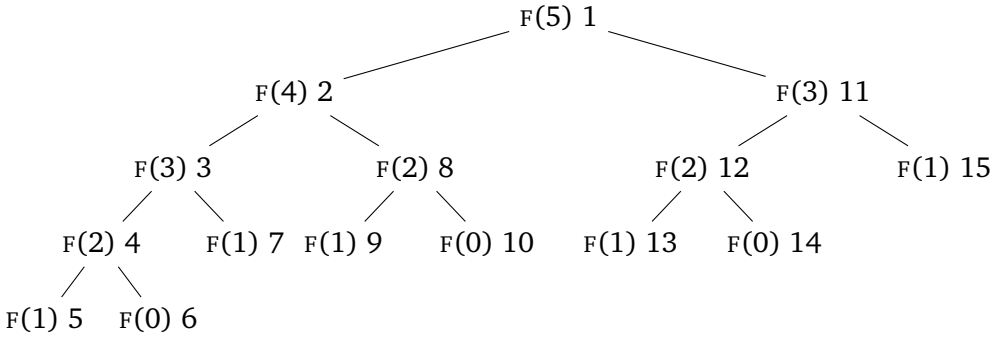
$$\text{FIBONACCI}\,(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

```
function FIBONACCI(n)
    if n ≤ 1 then
        return n
    else
        f_0 ← 0
        f_1 ← 1
        for k ← 2 to n do
            f ← f_0 + f_1
            f_0 ← f_1
            f_1 ← f
        end for
    end if
    return f
end function
```

Broj poziva funkcije FIBONACCI je manji od broja čvorova punog binarnog drveta sa $n$ nivoa, koji iznosi $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

Vreme izvršavanja rekurzivne funkcije (levo) je $T(n) = O(2^n)$.

Vreme izvršavanja iterativne verzije (desno) $T'(n) = \Theta(n)$, što je lošije od računanja pomoću formule koje je $T''(n) = \Theta(1)$.




Na kompjuteru je izmereno vreme izvršavanja rekurzivne funkcije FIBONACCI za $n = 40$ i za $n = 42$: $T(40) = 5.5492s$ i $T(42) = 14.5920s$. Ako je vreme izvršavanja približno jednako $T(n) = c \cdot q^n$, izračunati $q$ i $c$.

$$q = \sqrt{T(42)/T(40)} = 1.6216, \quad c = T(40)/q^{40} = 2.2210 \cdot 10^{-8}$$

Koristeći dobijene vrednosti naći vreme da se izvrši FIBONACCI ( 50 ) i FIBONACCI ( 100 ).

$T(50) = 697.6741s = 11\text{min}38s$

$T(100) = 2.1916e + 13s = 694.96$ godina

$$T(n) = \Theta\left(\left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \approx \Theta(1.618^n).$$

## BUBBLE SORT

```
 1: procedure PROGRAM2(A)
 2:     n ← length(A)
 3:     repeat
 4:         flag ← true
 5:         for j ← 1 to n − 1 do
 6:             if A[j] > A[j + 1] then
 7:                 swap(A, j, j + 1)
 8:                 flag ← false
 9:             end if
10:         end for
11:     until flag
12: end procedure
```

Analizirati PROGRAM2 ([5,2,4,6,1,3])

| broj prolaza | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| menja se: | 5 sa 2 | 5 sa 1 | 4 sa 1 | 2 sa 1 | |
| | 5 sa 4 | 5 sa 3 | 4 sa 3 | | |
| | 6 sa 1 | | | | |
| | 6 sa 3 | | | | |

```
procedure PROGRAM2A(A)
    n ← length(A)
    repeat
        flag ← true
        for j ← 1 to n − 1 do
            if A[j] > A[j + 1] then
                swap(A, j, j + 1)
                flag ← false
            end if
        end for
        n ← n − 1
    until flag
end procedure
```

```
procedure PROGRAM2B(A)
    n ← length(A)
    repeat
        newn ← 0
        for j ← 1 to n − 1 do
            if A[j] > A[j + 1] then
                swap(A, j, j + 1)
                newn ← j
            end if
        end for
        n ← newn
    until n = 0
end procedure
```

| algoritam | br. poređenja | br. zamena |
|---|---|---|
| PROGRAM2 | 25 | 9 |
| PROGRAM2A | 15 | 9 |
| PROGRAM2B | 14 | 9 |

## INSERTION SORT

```
1:  procedure INSERTION SORT(A)
2:      for i ← 2 to length(A) do                ▷ n
3:          key ← A[i]                           ▷ n − 1
4:          j ← i − 1                            ▷ n − 1
5:          while j > 0 & A[j] > key do          ▷ Σ_{i=2}^{n} t_i
6:              A[j + 1] ← A[j]                  ▷ Σ_{i=2}^{n} (t_i − 1)
7:              j ← j − 1                        ▷ Σ_{i=2}^{n} (t_i − 1)
8:          end while
9:          A[j + 1] ← key                       ▷ n − 1
10:     end for
11: end procedure
```

$$T(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5 \sum_{2}^{n} t_i + (c_6 + c_7) \sum_{2}^{n} (t_i - 1) + c_9 (n-1),$$

**Best case** $t_i = 1$, $T_B(n) = \Theta(n)$
$T_B(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5 (n-1) + c_9 (n-1)$

**Worst case** $t_i = i$, $T_W(n) = \Theta(n^2)$
$T_W(n) = c_2 n + (c_3 + c_4)(n-1) + c_5 (n(n+1)/2 - 1) + (c_6 + c_7) n(n-1)/2 + c_9 (n-1)$

## SELECTION SORT

```
 1: procedure SELECTION SORT(A)
 2:     n ← length(A)                          ▷ 1
 3:     for i ← 1 to n do                      ▷ n + 1
 4:         i_min ← i                          ▷ n
 5:         for j ← i + 1 to n do              ▷ Σ_{i=1}^{n} t_i
 6:             if A[j] < A[i_min] then        ▷ Σ_{i=1}^{n} (t_i − 1)
 7:                 i_min ← j                  ▷ Σ_{i=1}^{n} (s_i − 1)
 8:             end if
 9:         end for
10:         if i ≠ i_min then                  ▷ n
11:             swap(A, i, i_min)              ▷ r
12:         end if
13:     end for
14: end procedure
```

Linija algoritma $i \mapsto c_i$ vreme

Neka je $T(n)$ vreme izvršavanja SELECTION SORT algoritma za niz dužine $n$.

$t_i = n - i + 1$, $s_i \leq t_i$, $r \leq n \Rightarrow$

$$\begin{aligned} T(n) \quad = \quad & c_2 + c_3(n+1) + \\ & + c_4 n + c_5\left(\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}\right) + \\ & + c_6\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2}\right) + \\ & + c_7 \textstyle\sum_{i=1}^{n}(s_i - 1) + \\ & + c_{10} n + c_{11} r \end{aligned}$$

Sledi da je $T(n) = \Theta(n^2)$.

$$T(n) = c_2 + c_3(n+1) + c_4 n + c_5 \sum_{i=1}^{n} t_i + c_6 \sum_{i=1}^{n} (t_i - 1) + c_7 \sum_{i=1}^{n} (s_i - 1) + c_{10} n + c_{11} r$$

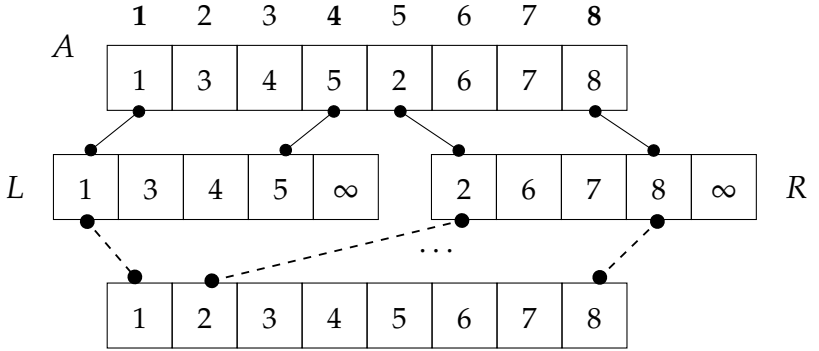
## MERGE SORT

```
procedure SORT(A,p,r)
    ▷ Procedura koja se rekurzivno poziva
    if p < r then
        q ← ⌊(p+r)/2⌋
        SORT(A,p,q)
        SORT(A,q+1,r)
        MERGE(A,p,q,r)
    end if
end procedure
procedure MERGE SORT(A)
    ▷ Glavna procedura koju poziva korisnik
    n ← length (A)
    SORT(A,1,n)
end procedure
```

Na primer, $p = 1, q = 4, r = 8$ za

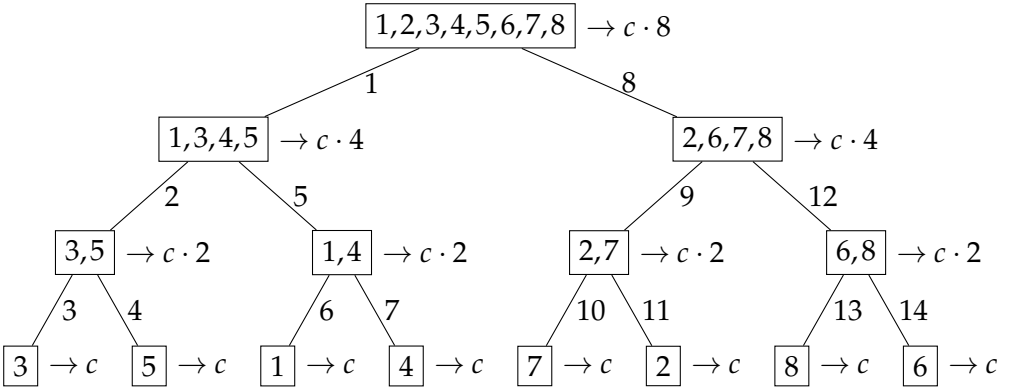
MERGE ([1,3,4,5,2,6,7,8],1,4,8)

```
procedure MERGE(A,p,q,r)
    for k ← p to q do
        L[k − p + 1] ← A[k]
    end for
    L[q − p + 2] ← ∞
    for k ← q + 1 to r do
        R[k − q] ← A[k]
    end for
    R[r − q + 1] ← ∞
    i ← 1; j ← 1
    for k ← p to r do
        if L[i] ≤ R[j] then
            A[k] ← L[i]; i ← i + 1
        else
            A[k] ← R[j]; j ← j + 1
        end if
    end for
end procedure
```




Spajanje sortiranih podnizova od 1 do 4 i od 5 do 8: MERGE ([1,3,4,5,2,6,7,8],1,4,8)

Vreme izvršavanja procedure MERGE$(A,p,q,r)$, $T_M(n) = \Theta(n)$, gde je $n = r - p + 1$.




MERGE SORT ([3,5,1,4,7,2,8,6]) za niz sa $n = 2^3 = 8$ elemenata

Neka je $n = 2^k$, $k \in N$ broj elemenata niza $A$.

Vreme izvršavanja procedure SORT $(A,p,r)$ je $T_S(m) = \Theta(m) \approx c \cdot m$, gde je $m = r - p + 1$

Na svakom nivou rekurzije imamo ukupan zbir vremena izvršavanja SORT procedure $8 \cdot c$, odnosno, u opštem slučaju $2^k \cdot c = c \cdot n$. Pošto imamo $k + 1 = \log_2 n + 1$ nivoa, vreme izvršavanja MERGE SORT $(A)$ za niz $A$ dužine $n = 2^k$ je $T(n) = (\log_2 n + 1) \cdot c \cdot n = c \cdot n \cdot \log_2 n + c \cdot n = \Theta(n \log n)$.

Koliko puta će biti pozvana procedura MERGE za sortiranje niza dužine $n = 2^k$?

**Rešenje:** $n - 1$ puta.

Napisati hronološki pozive MERGE koji se izvrše pri pozivanju
MERGE SORT ([5,2,4,6,1,3]).

**Rešenje:**

MERGE([5,2,4,6,1,3],1,1,2)

MERGE([2,5,4,6,1,3],1,2,3)

MERGE([2,4,5,6,1,3],4,4,5)

MERGE([2,4,5,1,6,3],4,5,6)

MERGE([2,4,5,1,3,6],1,3,6)

## QUICK SORT

PARTITION grupiše elemente odabranog podniza (od $p$ do $r$) premeštanjem i vraća redni broj $q$ elementa koji je na svom mestu po redosledu, tako da ispred njega budu manji ili jednaki od njega, iza njega veći od njega ($\star$).

```
procedure SORT(A,p,r)
                          ▷ Rekurzivna
    if p < r then
        q ← PARTITION(A,p,r)
        SORT(A,p,q−1)
        SORT(A,q+1,r)
    end if
end procedure
procedure QUICK SORT(A)
                          ▷ Za korisnika
    n ← length (A)
    SORT(A,1,n)
end procedure
```

```
function PARTITION(A,p,r)
                          ▷ U skladu sa (⋆)
    x ← A[r]
    i ← p−1
    for j ← p to r−1 do
        if A[j] ≤ x then
            i ← i+1
            exchange(A,i,j)
        end if
    end for
    exchange(A,i+1,r)
    return i+1
end function
```

# Poređenje algoritama za sortiranje

U sledećoj tabeli je data asimptotska vrednost vremena izvršavanja za ulaz veličine $n$ za sledeće algoritme: BUBBLE SORT (B), INSERTION SORT (I), SELECTION SORT (S), MERGE SORT (M), QUICK SORT (Q).

Oznake su: Best case: B, Average case: A i Worst case: W. Takođe je dat podatak o redu veličine dodatnog memorijskog prostora potrebnog za sortiranje (M) i podatak o stabilnosti posmatranog algoritma (S).

| | B | A | W | M | S |
|---|---|---|---|---|---|
| B | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(1)$ | DA |
| I | $\Theta(n)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(1)$ | DA |
| S | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(1)$ | NE |
| M | $\Theta(n \ln n)$ | $\Theta(n \ln n)$ | $\Theta(n \ln n)$ | $\Theta(n)$ | DA |
| Q | $\Theta(n \ln n)$ | $\Theta(n \ln n)$ | $\Theta(n^2)$ | $\Theta(\ln n)$ | NE |

```
int main()
{
    int i,j,n;
    int maxn=100000; int A[maxn];    int B[maxn];
    srand(time(NULL));
    for (i=0;i<maxn;i++){
        A[i] = rand();
        B[i] = A[i];
    }
    n = 1;
    printf("\n␣␣␣␣␣␣␣n␣|␣␣␣␣␣B␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣I␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣S␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣M␣␣␣␣␣|␣␣␣␣␣Q\n");
    printf("−−−−−−+−−−−−−−+−−−−−−−+−−−−−−−+−−−−−−−+−−−−−−−−\n");
    for(j=1;j<6;j++){
        n = n*10;
        // Bubble sort
        clock_t start = clock(); bubble_sort(A,n); clock_t end = clock();
        float B_sec = (float)(end − start) / CLOCKS_PER_SEC;
        memcpy(A,B,n*sizeof(int));
        // Insertion sort
        // Selection sort
        // Merge sort
        // Quick sort
        // Scores
        printf("␣%7d␣|␣%8.3f␣|␣%8.3f␣|␣%8.3f␣|␣%8.3f␣|␣%8.3f␣␣\n",n,B_sec,I_sec,S_sec,M_sec,Q_sec);
    }
    return 0;
}
```

Algoritme za sortiranje smo testirali na nizu random brojeva obima $10^1, 10^2, 10^3$, $10^4$, $10^5$. Mereno je vreme potrebno da se niz sortira algoritmom kodiranim u C-u na kompjuteru.

| $n$ | B | I | S | M | Q |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 7.30E-05 | 6.08E-05 | 6.10E-05 | 0.00034 | 0.0003 |
| 100 | 0.00021 | 6.10E-05 | 0.0001 | 0.00235 | 0.0008 |
| 1000 | 0.01873 | 0.00417 | 0.00625 | 0.0233 | 0.0067 |
| 10000 | 1.92922 | 0.35455 | 0.60198 | 0.23819 | 0.0669 |
| 100000 | 192.796 | 35.4994 | 60.2424 | 2.38437 | 0.6754 |

# Poređenje stringova

Nizovi karaktera su stringovi. C kompajleri na kraj niza karaktera pod navodnicima stavljaju NUL karakter (NUL = \0)

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#define maxn 30

// Ovaj program koristiti za testiranje .
// Izlaz: ab = −97, ac = 17, bc = 17.

int zcmp(char*, char*, size_t);

void main (){
    char a[] = "Petr";
    char b[] = "Petra";
    char c[] = "Petar";
    printf("ab␣=␣%d,␣", zcmp(a,b,maxn));
    printf("ac␣=␣%d,␣", zcmp(a,c,maxn));
    printf("bc␣=␣%d.␣\n", zcmp(b,c,maxn));
}
```

Broj koji će funkcija zcmp vratiti je razlika rednih brojeva u ASCII kodu prvih karaktera koji se razlikuju na adresama s1 i s2. Nula se vraća ako su n karaktera jednaki.

Ova funkcija je implementirana u standardnoj biblioteci *string.h* kao strncmp.

```
int zcmp(char *s1, char *s2, size_t n){
    unsigned int i = 0;
    int y = 0;
    while(i<n &&
          !(y=s1[i]−s2[i]) && s1[i]){i++;};
    return y;
}
```

Redosled je "Petar", "Petr", "Petra" (c, a, b).

## Lokalizacija

ASCII $\subseteq$ UTF-8

Format informacije za lokalizaciju je:

`language[_territory][.codeset][@modifier].`

Na primer: `sr_RS.UTF-8@latin` je oznaka za srpski jezik, u Republici Srbiji, kodiran u UTF-8 u latiničnoj varijanti.

```
#include <stdio.h>
#include <locale.h>                    // Biblioteka za lokalizaciju
#include <string.h>

void main (){
    char a[] = "njujork";
    char b[] = "nujork";
    char new_locale[] = "sr_RS";
    setlocale (LC_ALL, new_locale);  // Srpski jezik

    printf (" strcoll (njujork,nujork) = %d\n", strcoll(a,b));
    printf ("strcmp(njujork,nujork) = %d\n", strcmp(a,b));
}
```

Prethodni C program komandom setlocale podešava svih šest informacija po pravilima srpskog jezika. Ako se to ne uradi, podrazumevana lokalizacija je C standard.

Izlaz ovog programa će biti:

```
strcoll(njujork,nujork) = 1
strcmp(njujork,nujork) = -11
```

To znači da po ASCII standardu slovo j prethodi slovu u, pa stoga i "njujork" prethodi "nujork" (strcmp = -11). Po srpskoj latinici slovo n prethodi slovu (digrafu) nj pa "nujork" prethodi "njujork" (strcoll = 1).

| | |
|---|---|
| LC_COLLATE | Definiše redosled poređenja stringova |
| LC_CTYPE | Definiše klasifikaciju karaktera, velika - mala slova |
| LC_MESSAGES | Definiše kako se kaže DA i NE |
| LC_MONETARY | Definiše pravila za pisanje cena i oznaku valute |
| LC_NUMERIC | Definiše pravila za pisanje brojeva |
| LC_TIME | Pravila i simboli za datum i vreme |

Tabela 1: Šest informacija lokalizacije

# Pretraživanje

Napisati u programskom jeziku C funkciju zstrcmp koja upoređuje stringove str1 i str2.

Funkcija treba da vrati:

- $-$ ako prvi string prethodi drugom,
- $+$ ako drugi string prethodi prvom,
- 0 ako su stringovi jednaki.

```
int zstrcmp(char *str1, char *str2)
{
    int i=0;
    int r;
    if (str1==str2) return 0;
    while (!(r=str1[i]-str2[i])
           && str1[i] && str2[i])
        i++;
    return r;
}
```

Napisati u programskom jeziku C funkciju koja vraća redni broj traženog elementa u nizu stringova ili -1 (ako nema traženog stringa).

# Matrice - računanje determinante dovođenjem na gornje trougaonu

```
function DET(A, n)
    znak ← 1
    for i ← 1 to n − 1 do
        pm ← PIVOT(A, n, i)
        if ¬pm then
            return 0.0
        end if
        znak ← znak ∗ pm
        for k ← i + 1 to n do
            α ← A[k,i] / A[i,i]
            A[k,i] ← 0.0
            for j ← i + 1 to n do
                A[k,j] ← A[k,j] − αA[i,j]
            end for
        end for
    end for
    if A[n,n] = 0 then
        return 0.0
    end if
    d ← znak ∗ A[1,1]
    for i ← 2 to n do
        d ← d ∗ A[i,i]
    end for
    return d
end function
```

```
function PIVOT(A, n, m)
    i1 ← m; j1 ← m; pm ← 1
    for i ← m to n do
        for j ← m to n do
            if |A[i,j]| > |A[i1, j1]| then
                i1 ← i; j1 ← j
            end if
        end for
    end for
    if A[i1, j1] = 0 then
        return 0
    end if
    if i1 ≠ m then
        pm ← pm ∗ (−1)
        for j ← m to n do
            swap(A[i,j], A[i1, j])
        end for
    end if
    if j1 ≠ m then
        pm ← pm ∗ (−1)
        for i ← 1 to n do
            swap(A[i,j], A[i, j1])
        end for
    end if
    return pm
end function
```

## Broj operacija za računanje determinante reda $n$

| $i$ | $SAB(i)$ | $MNO(i)$ |
|---|---|---|
| 1 | $(n-1)(n-1)$ | $(n-1)(n-1)+n-1$ |
| 2 | $(n-2)(n-2)$ | $(n-2)(n-2)+n-2$ |
| $\vdots$ | $\ddots$ | $\cdots$ |
| $n-2$ | $2\cdot 2$ | $2\cdot 2+2$ |
| $n-1$ | 1 | $1+1$ |
| linija 22 | 0 | $n-1$ |
| $\sum$ | $\sum SAB(i)$ | $\sum MNO(i)$ |

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum SAB(i) = \frac{1}{6}(n-1)n(2n+1) = \Theta(n^3)$$

$$\sum MNO(i) = \sum SAB(i) + \frac{1}{2}(n-1)n + n - 1 = \Theta(n^3)$$

## Računanje determinante po definiciji

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\substack{\text{po svim perm.} \\ (i_1,i_2,\ldots i_n)}} (-1)^{\sigma(i_1,i_2,\ldots i_n)} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

gde je $\sigma(i_1,i_2,\ldots i_n)$ broj inverzija permutacije $(i_1,i_2,\ldots i_n)$.

$$\sum SAB(i) = n! - 1 \quad \sum MNO(i) = n!(n-1)$$

Ako jedno sabiranje traje 3.13E-9s, množenje 3.75E-9s. Koliko vremena treba da se saberu i pomnože elementi matrice $100 \times 100$ preko definicije?

$$\sum SAB(i) \times 3.13 \times 10^{-9} + \sum MNO(i) \times 3.75 \times 10^{-9}.$$

| | vreme |
|---|---|
| Gausove eliminacije | $0.0023s$ |
| Po definiciji | $3.49 \times 10^{151} s =$ $1.11 \times 10^{144}$godina |

# Kreiranje C biblioteke za apstraktni tip podataka matrice

matrice.h

```
void addmat(double *, double *, double *, int, int);          // sabiranje  (I,I,O,I,I)
void multmat(double *, double *, double *, int, int, int);    // mnozenje (I,I,O,I,I,I)
void multscal(double, double *, double *, int, int);          // mnozenje skalarom (I,I,O,I,I)
void transpose(double*, double *, int, int);                  // transponovanje (I,O,I,I)
int inverse(double*, double *, int);                          // inverzna (I/O,O,I)
double det(double*, int);                                     // determinanta (I/O,I)
int printmatrix(double*, int, int);                           // stampanje (I,I,I)
```

Napisati program u C-u koji rešava matričnu jednačinu $A + BX = C$, gde su

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -7 & -16 \\ -7 & -18 & -16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & -16 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 10 \\ 16 & 20 & 21 \end{bmatrix}.$$

$$X = B^{-1}(C - A)$$

$X = B^{-1}(C - A)$ u C-u računamo pomoću sledećeg programa

main.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "matrice.h"
#define epsilon 1e-12

int main()
{
    int nr,n;

    n = 3;
    double A[]={1,2,-3,4,-7,-16,-7,-18,-16};
    double B[]={1,2,3,4,7,6,7,8,-16};
    double C[]={-1,3,4,2,2,10,16,20,21};
    double *minusA=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *CminusA=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *Binv=malloc(n*n*sizeof(double));
    double *X=malloc(n*n*sizeof(double));

    if((nr=inverse(B,Binv,n))){
        printf("\nNe postoji B^(-1),rang(B) je %d.",n-nr);
    }
    else{
        multscal(-1,A,minusA,n,n);
        addmat(C,minusA,CminusA,n,n);
        multmat(Binv,CminusA,X,n,n,n);
        printmatrix(X,n,n);
    }
    return 0;
}
```

---

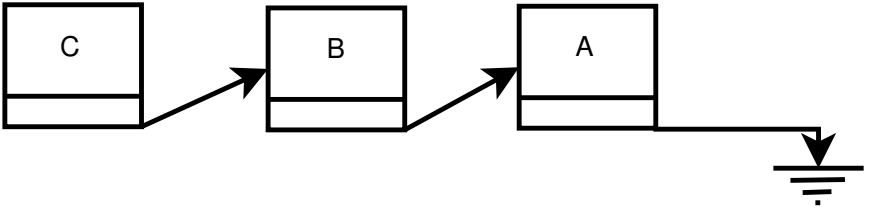
```
+-                        -+
|    1.00    2.00    3.00  |
|    0.00    1.00    2.00  |
|   -1.00   -1.00   -0.00  |
+-                        -+

Process returned 0 (0x0) execution time : 0.016

Press any key to continue.
```

# Povezane liste

```
typedef char listdata ;
typedef struct _node node;

struct _node {
      listdata data;
      node *next;
};
```

```
typedef char listdata ;
typedef struct _node node;
typedef node *stack;

void makenull(stack *);
int isempty(stack);
int push(stack *, listdata );
listdata pop(stack *);
listdata top(stack);
void clear(stack *);
int ismember(stack, listdata *);
void printstack(stack);
```

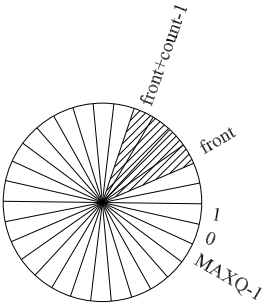
# Stack



# Queue

## Pomoću niza:

```
struct _queue {
     listdata data[MAXQ];
     int front;
     int count;
};
```



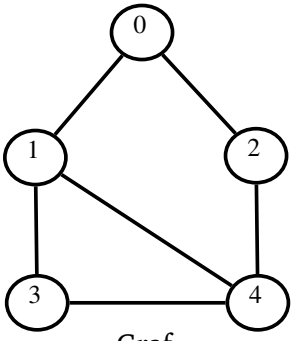

## Pomoću povezanih listi:

```
struct _node
{
     listdata data;
     node *next;
};
struct _queue
{
     node *front;
     node **rear;
};
```

```
typedef char listdata ;
typedef struct _node node;
typedef struct _queue *queue;

void makenullQ(queue *);
int isemptyQ(queue);
```

```
int enqueue(queue, listdata);
listdata dequeue(queue);
listdata front(queue);
void clearQ(queue);
int ismemberQ(queue, listdata *);
void printqueue(queue);
```

# Strukture podataka za grafove



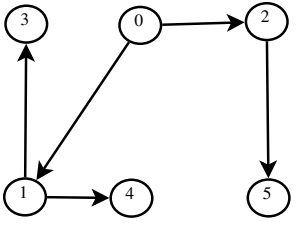

Graf

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

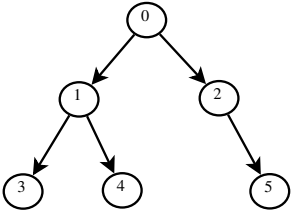
Matrica susedstva

| $u$ | Adj($u$) |
|---|---|
| 0 | 1, 2 |
| 1 | 0, 3, 4 |
| 2 | 0, 4 |
| 3 | 1, 4 |
| 4 | 1, 2, 3 |

Tabela listi susedstva




Usmereni graf




Isti graf kao korensko drvo

| $u$ | Adj($u$) |
|---|---|
| 0 | 1, 2 |
| 1 | 3, 4 |
| 2 | 5 |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |

Tabela listi susedstva

# Grafovi kao apstraktni tip podataka

U programskom jeziku C koristimo Tabele listi susedstva kao osnovni tip podataka nad kojim ćemo izvršavati algoritme

```
typedef struct _node gnode;
typedef gnode *grana;
typedef int nextnode;

struct _node
{
    nextnode data;
    gnode *next;
};
```

Treba nam procedura koja:

- dodaja granu na kraj liste susedstva: *enqueue_list*,
- oduzima prvu granu iz liste susedstva: *dequeue_list*,
- oslobađa dinamički alociranu memoriju jedne liste susedstva: *clear_list*,
- oslobađa dinamički alociranu memoriju grafa: *clear_graf*,
- štampa tabelu liste susedstva: *print_graf*,
- štampa matricu susedstva: *print_graf_matrix*.

```
void enqueue_list(grana **grana_tail_p,
                                nextnode d) {
    grana grana_new = malloc(sizeof(grana));

    grana_new -> data = d;
    grana_new -> next = NULL;
    **grana_tail_p = grana_new;
    *grana_tail_p = &(grana_new->next);
}

nextnode dequeue_list(grana *grana_head)
{
    grana grana_temp = *grana_head;
    nextnode d=-1;

    if(grana_head)
    {
        d = grana_temp -> data;
        *grana_head = grana_temp -> next;
        free(grana_temp);
    }
    return d;
}

void clear_list(grana *adjp)
{
    while(*adjp)
        dequeue_list(adjp);
}

void clear_graph(grana graf[])
{
    int i;
    for(i=0;i<max_cvorova;i++){
        clear_list(&(graf[i]));
    }
}
```

# BFS

- BFS polazi od izvora: čvor $s$ i prolazi kroz sve čvorove koji su povezani sa $s$.
- BFS nalazi $d$, (najkraću) udaljenost od $s$ za svaki čvor, $d = \infty$ ako nije povezan.
- BFS nalazi $\pi$, prethodnika u najkraćem putu, dajući "breadth first tree".
- BFS koristi atribut boja (color) $\in \{$ WHITE, GRAY, BLACK $\}$ za svaki čvor.
- BFS redom otkriva sve čvorove koji su od $s$ udaljeni za $k$, a potom za $k+1$.

```
function BFS(G, s)
    ▷ U nizu π vraća prethodnika za čvor
    ▷ U nizu d vraća udaljenost od čvora s
  for each u ∈ V[G]\{s} do
    d[u] ← ∞
    π[u] ← NULL
    color[u] ← WHITE
  end for
  MAKENULLQ(Q)
  d[s] ← 0
  π[s] ← NULL
  color[s] ← GRAY
  ENQUEUE(Q, s)
  while ¬ISEMPTYQ(Q) do
    u ← DEQUEUE(Q)
    for each v ∈ Adj(u) do
      if color[v] = WHITE then
        color[v] ← GRAY
        d[v] ← d[u] + 1
        π[v] ← u
        ENQUEUE(Q, v)
      end if
    end for
    color[u] ← BLACK
  end while
  return d, π
end function
```

Procedura u programskom jeziku C koja za graf smešten u Adjacency list vraća stepen svih čvorova i funkcija koja vraća diametar grafa. Stepen je broj suseda, diametar je najveće najkraće rastojanje između dva čvora u grafu.

```
void stepen(grana G[], int n, int s[])
{
    int i;

    grana gr;

    for(i=0;i<n;i++){
        gr = G[i];
        s[i] = 0;
        while(gr){
            (s[i])++;
            gr = gr->next;
        }
    }

}
```

```
int diametar(grana G[], int n)
{
    int diam = 0;
    int d[max_cvorova], p[max_cvorova];
    int i,j;

    for(i=0;i<n;i++){
        bfs(G,n,i,d,p);
        for(j=0;j<n;j++){
            if(d[j]>diam){
                diam = d[j];
            }
        }
    }
    return diam;
}
```

# DFS

Algoritam za pretraživanje usmerenog grafa "u dubinu" (depth[1] first search = DFS).

- DFS prolazi kroz sve čvorove $u$ koje nije posetio.
- DFS rekurzivno nastavlja kroz sve grane čiji su susedi $v$ neistraženi.
- kad DFS istraži sve čvorove koji su susedi od $v$, backtrack[2] postupkom se vraća u čvor iz kojeg je stigao u $v$.
- kad DFS istraži sve grane iz polaznog čvora, nastavlja sa neistraženim čvorovima.
- kad DFS dođe od čvora $u$ do čvora $v$, upisuje da je predecessor[3] od $v$ čvor $u$.
- DFS koristi atribut boja (*color*) $\in$ { WHITE, GRAY, BLACK } za svaki čvor. U početku su svi WHITE. Kad se otkrije, čvor postaje GRAY, kad završi sa njim, postaje BLACK.

[1] *depth* = dubina, EN
[2] *backtrack* = vratiti se istim putem, EN
[3] *predecessor* = prethodnik, EN

- DFS za svaki čvor $u$ zapisuje *timestamps*[4] $d[u]$ i $f[u]$ $(d[u] < f[u])$ momenta kad je otkrio $u$ (*discovery*) i kad je završio sa $u$ (*finish*).
- Vremenske oznake timestamps su iz skupa $\{1,2,\ldots,2 \cdot |V|\}$.
- Čvor $u$ je WHITE od momenta 1 do $d[u]$, GRAY od $d[u]$ do $f[u]$ i BLACK posle $f[u]$.

**Tipovi grana:**

T - *tree edge*, grana drveta iz DFS šume, pronalazi novi čvor drveta, ($\rightarrow$ WHITE)

F - *forward edge*, $(u,v)$ je grana unapred ako pronalazi čvor koji već pripada drvetu, t.j. ako je $v$ potomak od $u$. ($\rightarrow$ BLACK)

B - *back edge*, $(u,v)$ je grana unazad ako je $u$ je potomak od $v$. ($\rightarrow$ GRAY)

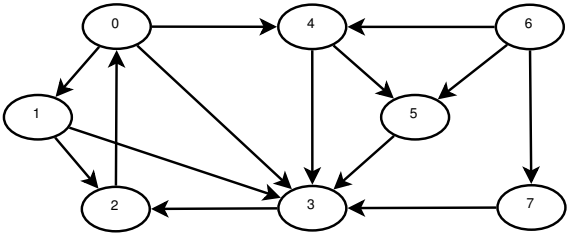
C - *cross edge*, poprečne grane, su sve ostale grane. ($\rightarrow$ BLACK!!)

[4] *timestamps* = vremenske oznake, EN

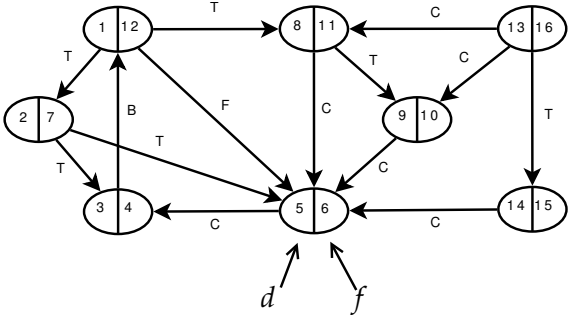
- U pseudokodu koji sledi promenljiva *time* je globalna promenljiva. Radi jednostavnosti, za DFS-VISIT globalne promenljive su i $G$ (graf), $d, f$, kao i $\pi$.
- Rezultat primene algoritma zavisi od redosleda kojim su numerisani čvorovi i redosleda kojim su čvorovi uneti u $Adj$ liste.

```
function DFS(G)
    for each u ∈ V[G] do
        color[u] ← WHITE
        π[u] ← NULL
    end for
    time ← 0
    for each u ∈ V[G] do
        if color[u] = WHITE then
            DFS-VISIT(u)
        end if
    end for
    return d, f, π
end function
```

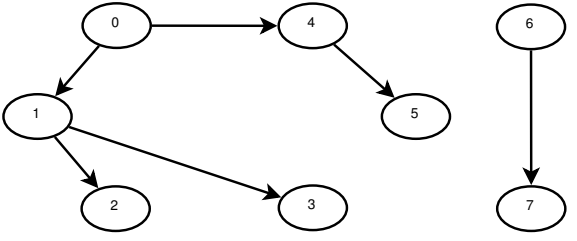
```
procedure DFS-VISIT(u)
    color[u] ← GRAY
    time ← time + 1
    d[u] ← time
    for each v ∈ Adj(u) do
        if color[v] = WHITE then
            π[v] ← u
            DFS-VISIT(v)
        end if
    end for
    color[u] ← BLACK
    time ← time + 1
    f[u] ← time
end procedure
```




Zadati graf



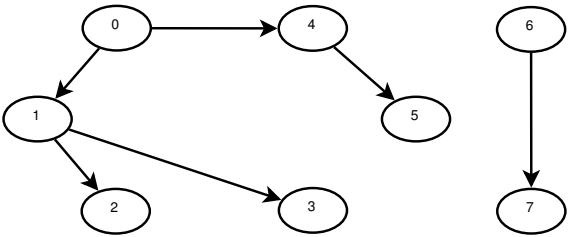

Primena DFS




Šuma DFS

## Tabela zagrada

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | ( | | | | | | | | | | | ) | | | | |
| 1 | | ( | | | | | ) | | | | | | | | | |
| 2 | | | ( | ) | | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | ( | ) | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | ( | | | ) | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | ( | ) | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | | ( | | | ) |
| 7 | | | | | | | | | | | | | | ( | ) | |




Šuma DFS

## Složenost BFS i DFS

Označavamo broj čvorova grafa $V$ i broj grana grafa $E$.

## BFS

Priprema praznih listi koje se vrše za sve čvorove traje $\Theta(V)$, priprema za petlju $\Theta(1)$.

Pozivanje operacije ENQUEUE i DEQUEUE traje $\Theta(1)$. Pošto svaki povezan čvor prođe kroz queue, ukupno se za te operacije potroši $O(V)$ vremena.

Elementi listi susedstva se u algoritmu obrade najviše jednom, kad se čvor skida sa queue. Za njihovu obradu treba $O(E)$ vremena, jer je njihov broj $\Theta(E)$. Sledi $T_{BFS} = O(V + E)$.

## DFS

Sama procedura DFS bez DFS-VISIT se izvršava za svaki čvor jednom, stoga traje $\Theta(V)$.

Procedura DFS-VISIT se za svaki čvor $v$ poziva tačno jednom. Unutar nje je petlja koja se izvršava $|Adj(v)|$ puta. Kako je $\sum_{v \in V} |Adj(v)| = \Theta(E)$, sledi $T_{DFS} = \Theta(V + E)$.

## Minimalno pokrivajuće drvo

Na grafu $G = (V, E)$ je data težinska funkcije $w : E \to \mathbb{R}$. MST = *minimum spanning tree* je pokrivajuće drvo za koje je zbir težina grana minimalan.

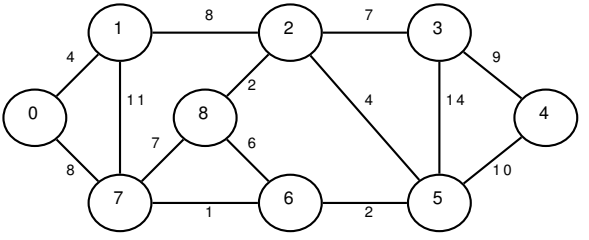
### Kruskalov algoritam (koristi strukturu podataka grafa grana)

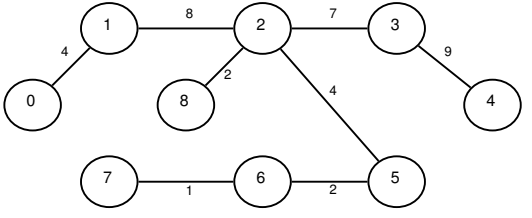
```
function KRUSKAL(G, w)
    A ← ∅
    for each v ∈ V[G] do
        MAKE-SET(v)                ▷ za svaki element skup koji ga sadrži
    end for
    sort(E, w)                     ▷ sortiraj grane iz E neopadajuće po w
    for each (u, v) ∈ E[G] do      ▷ redom, neopadajuće po w
        if FIND-SET(u) ≠ FIND-SET(v) then
            A ← A ∪ {(u, v)}       ▷ dodaj granu
            UNION(u, v)            ▷ spoji skupove
        end if
    end for
    return A
end function
```

Procedura MAKE-SET$(v)$ pravi skup koji sadrži samo element $v$.

Procedura FIND-SET$(v)$ nalazi skup u kojem je sadržan element $v$. Taj skup sadrži sve čvorove koji su do tad otkriveni i povezani su sa $v$ dotad formiranim delom pokrivajućeg drveta.

Procedura UNION$(u,v)$ spaja skupove čvorova povezanih sa $u$ i $v$, jer kad se grana $(u,v)$ doda u pokrivajuće drvo, čvorovi iz tih skupova postaju povezani.

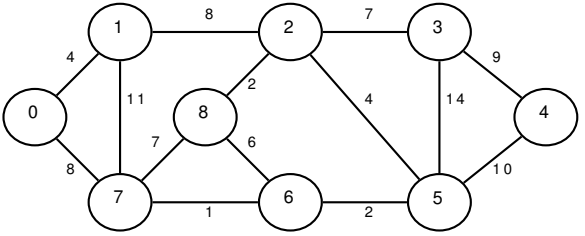


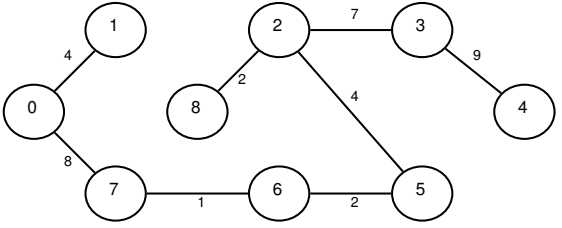




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 6 | 5 | 2 | 2 | 0 | 2 | 1 | 3 | |
| $v$ | 7 | 6 | 8 | 5 | 1 | 3 | 2 | 4 | $\sum$ |
| $w$ | 1 | 2 | 2 | 4 | 4 | 7 | 8 | 9 | 37 |

## Primov algoritam

**function** PRIM($G, w, r$)
  **for each** $u \in V[G]$ **do**
    $key[u] \leftarrow \infty$; $\pi[u] \leftarrow$ NULL
  **end for**
  $key[r] \leftarrow 0$
  $Q \leftarrow$ PQ_BUILD($V[G], key$) ▷ lista svih čvorova postaje priority queue
  **while** $\neg$PQ_ISEMPTY($Q$) **do**
    $u \leftarrow$ PQ_EXTRACT_MIN($Q, key$) ▷ isto kao DEQUEUE sa najmanjim $key$
    **for each** $v \in Adj(u)$ **do**
      **if** PQ_ISMEMBER($v, Q$)&($w(u,v) < key[v]$) **then**
        $\pi[v] \leftarrow u$ ▷ ako budemo odabrali $v$, prethodnik je $u$,
        $key[v] \leftarrow w(u,v)$ ▷ onda će grana $w(u,v)$ ući u MST
      **end if**
    **end for**
  **end while**
  $A \leftarrow \emptyset$
  **for each** $u \in V[G] \setminus \{r\}$ **do**
    $A \leftarrow A \cup (\pi[u], u)$ ▷ u listi prethodnika implicitno imamo MST
  **end for**
  **return** $A$
**end function**



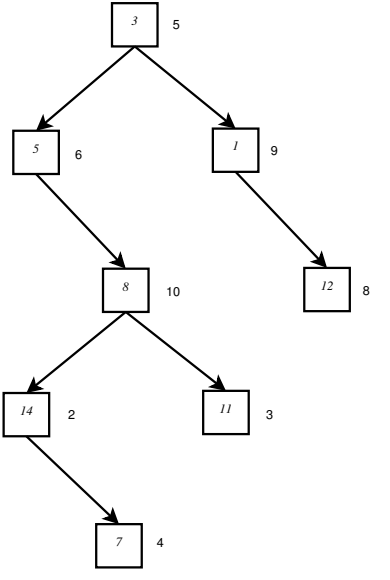




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 0 | 0 | 7 | 6 | 5 | 2 | 2 | 3 | |
| $v$ | 1 | 7 | 6 | 5 | 2 | 8 | 3 | 4 | $\sum$ |
| $w$ | 4 | 8 | 1 | 2 | 4 | 2 | 7 | 9 | 37 |

# Binarna drva (korenska)

Rekonstruisati binarno drvo dato u LC-RC reprezentaciji sa korenom na adresi 5.

| I | K | LC | RC |
|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 7 | - |
| 2 | 14 | - | 4 |
| 3 | 11 | - | - |
| 4 | 7 | - | - |
| **5** | 3 | 6 | 9 |
| 6 | 5 | - | 10 |
| 7 | 4 | 6 | 1 |
| 8 | 12 | - | - |
| 9 | 1 | - | 8 |
| 10 | 8 | 2 | 3 |



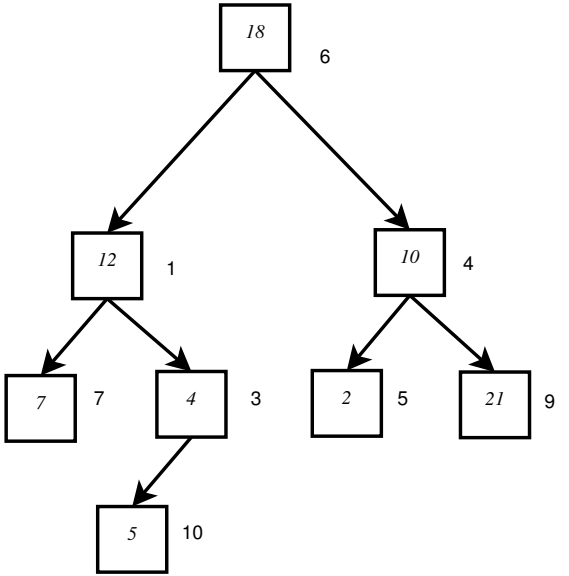
Napisati rekurzivnu proceduru koja ispisuje elemente drveta iz prethodnog zadatka u infiksnom redosledu i rekurzivnu proceduru koja dodaje parent polje svim čvorovima drveta.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
int key[] = {0, 9,14,11, 7, 3, 5, 4,12, 1, 8};
int LC[] =  {0, 7,-1,-1,-1, 6,-1, 6,-1,-1, 2};
int RC[] =  {0,-1, 4,-1,-1, 9,10, 1,-1, 8, 3};
int parent[]={0,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1,-1};
void infix_print(int root) {
    if(root>-1){
        infix_print(LC[root]);
        printf("%3d,",key[root]);
        infix_print(RC[root]);
    }
}
void find_parent(int root, int p) {
    if(root>-1){
        parent[root] = p;
        find_parent(LC[root],root);
        find_parent(RC[root],root);
    }
}
int main() {
    int i, root = 5;
    printf("Infix print: \n");
    infix_print(root);
    printf("\n");
    printf("Parent:\n");
    for(i=1;i<11;i++)
        printf("%3d,",i);
    printf("\n");
    find_parent(5,-1);
    for(i=1;i<11;i++)
        printf("%3d,", parent[i]);
    printf("\n");
    return 0;
}
```

```
Infix print:
  5, 14,  7,  8, 11,  3,  1, 12,
```

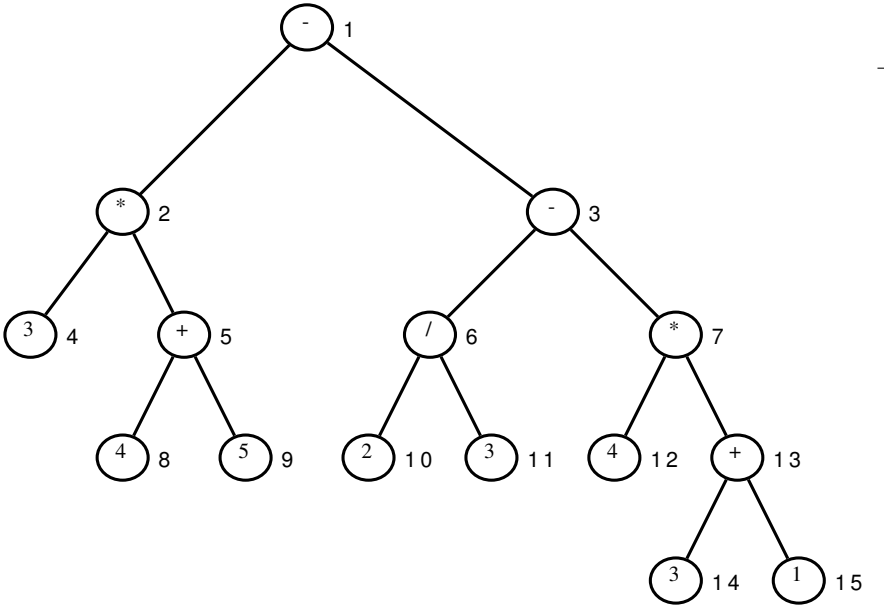
```
Parent:
  1,  2,  3,  4,  5,  6,  7,  8,  9, 10,
 -1, 10, 10,  2, -1,  5, -1,  9,  5,  6,
```

Dati tabelu LC-RC reprezentacije grafa sa slike.




| I | K | LC | RC |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | 7 | 3 |
| 2 | | | |
| 3 | 4 | 10 | - |
| 4 | 10 | 5 | 9 |
| 5 | 2 | - | - |
| **6** | 18 | 1 | 4 |
| 7 | 7 | - | - |
| 8 | | | |
| 9 | 21 | - | - |
| 10 | 5 | - | - |

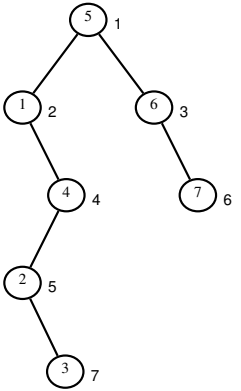
Nacrtati drvo terma izraza $3 \cdot (4+5) - (2/3 - 4 \cdot (3+1))$ i dati LC-RC reprezentaciju.




| I | K | LC | RC |
|---|---|---|---|
| **1** | − | 2 | 3 |
| 2 | ∗ | 4 | 5 |
| 3 | − | 6 | 7 |
| 4 | 3 | − | − |
| 5 | + | 8 | 9 |
| 6 | / | 10 | 11 |
| 7 | ∗ | 12 | 13 |
| 8 | 4 | − | − |
| 9 | 5 | − | − |
| 10 | 2 | − | − |
| 11 | 3 | − | − |
| 12 | 4 | − | − |
| 13 | + | 14 | 15 |
| 14 | 3 | − | − |
| 15 | 1 | − | − |

Za ulazni niz $[5,1,6,4,2,7,3]$ kreirati binarno drvo tako da se redom elementi ubacuju:

- ako je manji od korena u levo poddrvo
- inače u desno poddrvo.




```
#include <stdlib.h>
#define max 10
int ulaz[]={5,1,6,4,2,7,3};
int key[max];
int LC[max];
int RC[max];
int iskorisceno = -1;
int ubaci(int koren, int broj) {
    if(koren>-1){
        if(broj<key[koren])
            LC[koren]=ubaci(LC[koren],broj);
        else
            RC[koren]=ubaci(RC[koren],broj);
        return koren;
    }
    else{
        iskorisceno++;
        key[iskorisceno] = broj;
        LC[iskorisceno] = -1;
        RC[iskorisceno] = -1;
        return iskorisceno;
    }
}
int main() {
    int i, koren = ubaci(-1,ulaz[0]);
    for(i=1;i<7;i++) koren = ubaci(koren,ulaz[i]);
    infix_print(koren);
    return 0;}
```

## Problem angažovanja

Naći angažovanja radnika $1,\ldots,n$ na poslove $1,\ldots,n$ (1 radnik - jedan posao), ako su u matrici $C=[c_{i,j}]_{n\times n}$ data vremena $c_{i,j}$ koja su potrebna da radnik $i$ obavi posao $j$.
Dodelićemo vrednost $x_{i,j}=1$ ako se radnik $i$ angažuje na posao $j$, $x_{i,j}=0$ inače.

$$\zeta=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{i,j}x_{i,j}\to\min$$

$$0\le x_{i,j}\le 1,\ i,j\in\{1,2,\ldots,n\},x_{i,j}\in\mathbb{Z},$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{i,j}=1,j\in\{1,2,\ldots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}=1,i\in\{1,2,\ldots,n\}.$$

Može se rešiti kao *problem linearnog programiranja*. Celobrojni. *Mixed integer linear programming (MILP), EN.*

Najčešće rešavamo Mađarskom metodom. *Hungarian method, EN.*

## Problem trgovačkog putnika

Neka je dat kompletan graf sa $n$ čvorova i nad njegovim granama funkcija težina matricom $C = [c_{i,j}]_{n\times n}$. Težine $c_{i,j}$ predstavljaju dužinu ili cenu putovanja od mesta $i$ do mesta $j$.

*Problem trgovačkog putnika* je zadatak nalaženja Hamiltonove konture za koju su težine grana minimalne. *Travelling salesman problem (TSP), EN.*

Dodelićemo vrednost $x_{i,j} = 1$ ako se radnik $i$ angažuje na posao $j$, $x_{i,j} = 0$ inače.

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_{i,j} \to \min$$

$$0 \le x_{i,j} \le 1,\ i,j \in \{1,2,\ldots,n\}, x_{i,j} \in \mathbb{Z},$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} = 1, j \in \{1,2,\ldots,n\},$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1, i \in \{1,2,\ldots,n\}.$$

**Zabrana podkontura**