

Matematičke metode mašinskog učenja, Kol 1

1. Data je matrica A_Φ linearne transformacije $\Phi : \mathbb{R}^{4 \times 1} \rightarrow \mathbb{R}^{5 \times 1}$ i vektor $y \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$:

$$A_\Phi = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} -8 \\ 3 \\ -5 \\ -17 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Naći dimenziju i bazu $\text{Im } \Phi$ i dimenziju i bazu $\text{Ker } \Phi$.
 - (b) Izraziti y (ako može) u bazi $\text{Im } \Phi$.
 - (c) Naći $x \in \mathbb{R}^4$ tako da je $\Phi(x) = y$. Označiti ga x_1 . Da li je rešenje jedinstveno? Ako nije, naći još jedno rešenje, označiti ga x_2 .
 - (d) Naći (ako može) x_3 , još jedno rešenje za $\Phi(x) = y$ koje nije kolinearno sa $x_2 - x_1$.
2. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^5$ sa unutrašnjim proizvodom $\langle x, y \rangle = x^T y$ definisan je vektorski potprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ i dat je vektor $x \in \mathbb{R}^5$:

$$U = \text{span} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right), x = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Naći ortogonalnu projekciju $\pi_U(x)$ vektora x na U .
- (b) Izračunati udaljenost $d(x, U)$.

3. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$.

- (a) Da li su vektori $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ karakteristični vektori matrice A i ako jesu, naći redom $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, karakteristične vrednosti koji odgovaraju datim vektorima.
- (b) Da li je matrica A dijagonalizabilna i ako jeste, napisati njenu dijagonalizaciju $A = P D P^{-1}$, koristeći vektore v_1, v_2, v_3 i vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Prezime: _____ Ime: _____ Indeks: _____

$$1. \quad (a) \quad \dim \operatorname{Im} \Phi = \underline{\hspace{2cm}}, \operatorname{Im} \Phi = \operatorname{span} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$

$$\dim \operatorname{Ker} \Phi = \underline{\hspace{2cm}}, \operatorname{Ker} \Phi = \operatorname{span} \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right)$$

(b) $y =$

(c) $x_1 =$ Jedinstveno? $x_2 =$

(d) $x_3 =$

2. (a) $\pi_U(x) =$

(b) $d(x, U) =$ _____

3. (a) Obrazloženje:

λ_1 _____, λ_2 _____, λ_3 _____

(b) Dijagonalizabilna? _____ $A =$