Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad 27. XI 2024. godine
MAS Veštačka inteligencija i mašinsko učenje $15 + 10 = 25$

Matematičke osnove mašinskog učenja, kolokvijum 1

1. Data je matrica homomorfizma $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ u standardnoj bazi: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & -5 & 8 \end{bmatrix}$.

   Neka je $V = \text{span}\,[\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}]$ potprostor $\mathbb{R}^4$.

   (a) Naći dimenziju i bazu Ker Φ.

   (b) Naći dimenziju i bazu V.

   (c) Naći dimenziju i bazu $W = \text{Ker}\,\Phi \,\cap\, V$.

   (d) Naći karakteristični polinom, karakteristične vrednosti i njima odgovarajuće karakteristične vektore matrice A.

   (e) Naći dijagonalizaciju matrice $A = PDP^{-1}$ koristeći karakteristične vektore.

   (f) Neka je $S = A^T A$. Naći singularne vrednosti matrice S (po veličini).

   (g) Da li je matrica S

      (i) singularna?

      (ii) simetrična?

      (iii) ortogonalna?

      (iv) dijagonazibilna?

2. U Euklidskom vektorskom prostoru sa tačkastim proizvodom (dot product) definisan je vektorski potprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ i dat je vektor $x \in \mathbb{R}^5$:

$$U = \text{ span} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right), x = \begin{bmatrix} -9 \\ -1 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Naći ortogonalnu projekciju $\pi_U(x)$ vektora x na U.

   (b) Izračunati udaljenost $d(x, U)$.

   (c) Napisati matricu P_U ortogonalnog projektovanja na potprostor U.
   Koristiti razlomke - izvući imenilac ispred matrice.

Prezime: ____________________ **Ime**: ____________________ **BRIND**: __________

1. (a) $\dim \operatorname{Ker} \Phi =$
   $B_1 = ([\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T)$
   (b) $\dim V =$
   $B_2 = ([\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T)$
   (c) $\dim W =$
   $B_0 = ([\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T, [\quad,\quad,\quad,\quad]^T)$

   (d) $p(\lambda) = \lambda^4 +$ _____ $\lambda^3 +$ _____ $\lambda^2 +$ _____ $\lambda +$ _____

   $\lambda_1 =$ _____,

   $\lambda_2 =$ _____,

   $\lambda_3 =$ _____,

   $\lambda_4 =$ _____,

   (e) $P =$ $D =$ $P^{-1} =$

   (f) $\sigma_1 =$ $\sigma_2 =$ $\sigma_3 =$ $\sigma_4 =$
   (g) Da li je matrica S
   (i) singularna? __________
   (ii) simetrična? __________
   (iii) ortogonalna? __________
   (iv) dijagonazibilna? __________
2. (a) $\pi_U(x) = [\quad,\quad,\quad,\quad,\quad]^T$

   (b) $d(x, U) =$ _______________

   (c) $P_U =$