MAS VIMU MML Kolokvijum 1 2023-2024 rešavanje

Zoran Ovcin

2023-12-08

MAS Veštačka inteligencija i mašinsko učenje

8. XII 2023. godine

Matematičke osnove mašinskog učenja, kolokvijum 1

Koristićemo **matlib** biblioteku.

```
library(matlib)
```

1.

Data je linearna transformacija $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ formulom

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Neka su $a_1 = \Phi(e_1), a_2 = \Phi(e_2), a_3 = \Phi(e_3)$, gde su $e_1 = [1,0,0]^T, e_2 = [0,1,0]^T, e_3 = [0,0,1]^T$, vektori standardne baze.

(a) Naći matricu A linearne transformacije Φ i njoj inverznu matricu A^{-1}.

```
A=matrix(c( 1, 2, 2, 2, 1,-2, 2,-2, 1 ),ncol=3); A
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    2
## [2,]    2    1   -2
## [3,]    2   -2    1
```

```
AI=gaussianElimination(cbind(A,diag(3)),fractions = T); A1=AI[,4:6]; A1
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  1/9  2/9  2/9
## [2,]  2/9  1/9 -2/9
## [3,]  2/9 -2/9  1/9
```

(b) Izraziti vektore standardne baze preko vektora a_1, a_2, a_3.

$e_1 = (a_1 + 2a_2 + 2a_3)/9, e_2 = (2a_1 + a_2 - 2a_3)/9, e_3 = (2a_1 - 2a_2 + a_3)/9$

(c) Pokazati da su kolone matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ karakteristični vektori matrice A i naći karakteristične vrednosti koje im odgovaraju.

```
x1=matrix(c(1,1,0),ncol=1); A %*% x1; l1 = 3; A %*% x1 - l1 * x1
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    3
## [3,]    0
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    0
## [3,]    0
```

```
x2=matrix(c(1,-1,-1),ncol=1); A %*% x2; l2 = -3; A %*% x2 - l2 * x2
```

```
##      [,1]
## [1,]   -3
## [2,]    3
## [3,]    3
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    0
## [3,]    0
```

```
x3=matrix(c(1,0,1),ncol=1); A %*% x3; l3 = 3; A %*% x3 - l3 * x3
```

```
##      [,1]
## [1,]    3
## [2,]    0
## [3,]    3
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
## [2,]    0
## [3,]    0
```

(d) Izračunati inverznu matricu P^{-1}. Koristiti razlomke.

```
P=cbind(x1,x2,x3)
PI=gaussianElimination(cbind(P,diag(3)),fractions = T); P1=PI[,4:6]; P1
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]  1/3  2/3 -1/3
## [2,]  1/3 -1/3 -1/3
## [3,]  1/3 -1/3  2/3
```

(e) Izračunati matricu $P^{-1}AP$. Koristiti razlomke.

```
round(P1 %*% A %*% P, digits=15)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    3    0    0
## [2,]    0   -3    0
```

```
## [3,]    0    0    3
```

(f) Naći ortonormiranu bazu prostora generisanog kolonama matrice P.

```r
PGS=GramSchmidt(P); PGS
```

```
##           [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] 0.7071068  0.5773503  0.4082483
## [2,] 0.7071068 -0.5773503 -0.4082483
## [3,] 0.0000000 -0.5773503  0.8164966
```

```r
PGS %*% diag(c(sqrt(2),sqrt(3),sqrt(6)))
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    1    1
## [2,]    1   -1   -1
## [3,]    0   -1    2
```

$ONB = [\frac{1}{\sqrt{2}}[1,1,0]^T, \frac{1}{\sqrt{3}}[1,-1,-1]^T, \frac{1}{\sqrt{6}}[1,-1,2]^T]$

(g) Naći singular value dekompoziciju matrice A. Koristiti razlomke.

Koristimo komandu svd:

```r
svda = svd(A); svda$u; svda$d; svda$v
```

```
##            [,1]       [,2]       [,3]
## [1,] -0.3333333 -0.6666667 -0.6666667
## [2,] -0.6666667 -0.3333333  0.6666667
## [3,] -0.6666667  0.6666667 -0.3333333
```

```
## [1] 3 3 3
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]   -1    0    0
## [2,]    0   -1    0
## [3,]    0    0   -1
```

```r
# provera
svda$u %*% diag(svda$d) %*% svda$v
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    2
## [2,]    2    1   -2
## [3,]    2   -2    1
```

$$A = U\Sigma V^T, U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & -2 & -2\\ -2 & -1 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

(h) Da li je matrica A

(i) simetrična? DA. $A^T = A$

(ii) ortogonalna? NE. $A^T A \neq I$

(iii) dijagonazibilna? DA. $P^{-1}AP = \textbf{diag}(3,-3,3)$

(iv) pozitivno definitna? NE. Ima negativnu sopstvenu vrednost: -3**.**

2.

U Euklidskom vektorskom prostoru sa tačkastim proizvodom (dot product) definisan je vektorski potprostor $U \subseteq \mathbb{R}^5$ i dat je vektor $x \in \mathbb{R}^5$:

$$U = \text{ span } \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right), x = \begin{bmatrix} -1 \\ -9 \\ -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

```
u1=c(-1,  2,  0,  0,  2)
u2=c(-3,  1,  1, -1,  2)
u3=c( 4,  1, -3,  2,  1)
u4=c(-3,  5, -1,  0,  7)
x =c(-1, -9, -1,  4,  1)
```

(a) Naći ortogonalnu projekciju $\pi_U(x)$ vektora x na U.

```
xp=Proj(x,cbind(u1,u2,u3,u4)); xp
```

```
## [1] -0.04761905 -7.85714286 -2.80952381 -0.85714286  0.33333333
```

(b) Izračunati udaljenost $d(x, U)$.

```
xxp=x-xp
sqrt(t(xxp)%*%xxp)
```

```
##          [,1]
## [1,] 5.433582
```