

# MML Book Exercises rešavanje

Zoran Ovcin

2025-12-12

Ovde rešavamo zadatke iz MML Book

## MML-book Chapter 3. Linear Algebra, Exercises

Koristićemo R i **matlib** biblioteku.

```
library(matlib)
```

Tekst je u formatu Rmd (R markdown) i može se kniti aplikacijom pretvoriti u html (ili pdf) dokument.

### 3.1

Na osnovu Teoreme 3.5,

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 y_1 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2x_2 y_2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

imamo unutrašnji proizvod, jer je matrica  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$  simetrična i pozitivno definitna:

$$[x_1, x_2] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_1 x_2 + x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + x_2^2$$

Naime, poslednji izraz je nenegativan, a jednak je 0 samo za  $x_1 = x_2 = 0$ .

### 3.2

Matrica  $A$  nije simetrična, nije unutrašnji proizvod:

```
x = matrix(c(1,0),ncol = 1); y = matrix(c(0,1),ncol = 1); A = matrix(c(2,1,0,2),ncol = 2); A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    0
## [2,]    1    2
```

```
t(x) %*% A %*% y
```

```
##      [,1]
## [1,]    0
```

```
t(y) %*% A %*% x
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
```

### 3.3

Udaljenost između vektora  $x$  i  $y$  je  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Koristimo normu  $\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$ ,  $z = x - y$ .

```
x = matrix(c(1,2,3),ncol = 1); y = matrix(c(-1,-1,0),ncol = 1); A = matrix(c(2,1,0,1,3,-1,0,-1,2),ncol = 1)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    2    1    0
## [2,]    1    3   -1
## [3,]    0   -1    2
```

```
z = x - y; z
```

```
##      [,1]
## [1,]    2
## [2,]    3
## [3,]    3
```

```
sqrt(t(z) %*% z)
```

```
##      [,1]
## [1,] 4.690416
```

```
norm(z, type = "2")
```

```
## [1] 4.690416
```

```
sqrt(t(z) %*% A %*% z)
```

```
##      [,1]
## [1,] 6.855655
```

### 3.4

Kosinus ugla  $\theta$  između vektora  $x$  i  $y$  je  $\cos \theta = \langle x, y \rangle / \sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}$ .

```
x=matrix(c(1,2),ncol = 1); y=matrix(c(-1,-1),ncol = 1);
B=matrix(c(2,1,1,3),ncol=2); B
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    2    1
## [2,]    1    3
```

```
acos((t(x) %*% y)/sqrt((t(x) %*% x))/sqrt((t(y) %*% y)))
```

```
##      [,1]
## [1,] 2.819842
```

```
acos((t(x) %*% B %*% y)/sqrt(t(x) %*% B %*% x)/sqrt(t(y) %*% B %*% y))
```

```
##      [,1]
## [1,] 2.941046
```

### 3.5

```
#####
# 3.5 #
#####
```

```
A = matrix(c(0,-1,2,0,2,1,-3,1,-1,2,-3,4,1,2,1,-1,-3,5,0,7),ncol=4); A
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4]
## [1,]    0    1   -3   -1
## [2,]   -1   -3    4   -3
## [3,]    2    1    1    5
## [4,]    0   -1    2    0
## [5,]    2    2    1    7
```

```
x=matrix(c(-1,-9,-1,4,1),ncol=1); x
```

```
##      [,1]
## [1,]   -1
## [2,]   -9
## [3,]   -1
## [4,]    4
## [5,]    1
```

```
gaussianElimination(A,x)
```

```
##      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
## [1,]    1    0    0    1   -1
## [2,]    0    1    0    2    2
## [3,]    0    0    1    1   -1
## [4,]    0    0    0    0    8
## [5,]    0    0    0    0   -6
```

```
B=A[,1:3]; B
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1   -3
## [2,]   -1   -3    4
## [3,]    2    1    1
## [4,]    0   -1    2
## [5,]    2    2    1
```

Sastavili smo matricu  $A$  od generatora prostora  $U$  i primenili Gausove eliminacije. Sistem  $Al = x$  nema rešenja,  $x \notin U$ . Vidimo i da generatori nisu linearno nezavisni, stoga ćemo zadržati u matrici  $B$  samo one kojima odgovaraju bazične kolone. To su prve tri, gde su pivoti u RREF dobijenom Gausovim eliminacijama.

```
# a
inv(t(B)%*%B)%*%t(B)
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,] 0.5238095 0.17460317 1.0317460 0.14285714 -0.44444445
## [2,] -0.5238095 -0.28571428 -0.8095238 -0.14285714 0.66666667
## [3,] -0.33333333 -0.00000002 -0.33333333 -0.00000001 0.33333333
```

```
l=inv(t(B)%*%B)%*%t(B)%*%x; l
```

```
##      [,1]
## [1,]   -3
## [2,]    4
## [3,]    1
```

```
B1=MoorePenrose(B); B1
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,] 0.5238095 1.746032e-01 1.0317460 1.428571e-01 -0.44444444
## [2,] -0.5238095 -2.857143e-01 -0.8095238 -1.428571e-01 0.66666667
## [3,] -0.33333333 5.689893e-15 -0.33333333 -3.559653e-15 0.33333333
```

```
round(B1,digits=8)
```

```
##           [,1]      [,2]      [,3]      [,4]      [,5]
## [1,]  0.5238095  0.1746032  1.0317460  0.1428571 -0.4444444
## [2,] -0.5238095 -0.2857143 -0.8095238 -0.1428571  0.6666667
## [3,] -0.3333333  0.0000000 -0.3333333  0.0000000  0.3333333
```

```
printMatEqn(B1, fractions = TRUE)
```

```
##                               B1
## 11/21 11/63 65/63 1/7 -4/9
## -11/21 -2/7 -17/21 -1/7 2/3
## -1/3      0   -1/3      0  1/3
```

```
l=B1%%x; l
```

```
##           [,1]
## [1,]      -3
## [2,]       4
## [3,]       1
```

```
p=B%%l; p
```

```
##           [,1]
## [1,]       1
## [2,]      -5
## [3,]      -1
## [4,]      -2
## [5,]       3
```

```
matrix(Proj(x,B))
```

```
##           [,1]
## [1,]       1
## [2,]      -5
## [3,]      -1
## [4,]      -2
## [5,]       3
```

Pošto je matrica  $B$  punog ranga, Moore-Penrose pseudo inverse možemo dobiti formulom  $(B^T B)^{-1} B^T$ . Koordinate projekcije u bazi prostra kolona matrice  $B$  su  $l = [-3, 4, 1]^T$ . U standardnoj bazi to je  $p = B l = [1, -5, -1, -2, 3]^T$

```
# b
```

```
px=p-x; px
```

```
##           [,1]
## [1,]  2.000000e+00
## [2,]  4.000000e+00
## [3,] -3.574918e-14
## [4,] -6.000000e+00
## [5,]  2.000000e+00
```

```
round(px,digits=8)
```

```
##           [,1]
## [1,]       2
## [2,]       4
## [3,]       0
```

```
## [4,] -6
## [5,] 2
```

```
t(px)%*%px
```

```
## [1,]
## [1,] 60
```

```
sqrt(t(px)%*%px)
```

```
## [1,]
## [1,] 7.745967
```

### 3.6

```
#####
# 3.6 #
#####
```

```
A = matrix(c(2,1,0,1,2,-1,0,-1,2),ncol=3); A
```

```
## [1,] [2,] [3,]
## [1,] 2 1 0
## [2,] 1 2 -1
## [3,] 0 -1 2
```

Unutrašnji proizvod računamo preko matrica  $\langle x, y \rangle = x^T A y$ . Napravimo matricu  $B = [e_1, e_3]$  baze prostora  $U$ . Nađimo matricu projektovanja  $P$  vektora u standardnoj bazi na prostor  $U$ . Pošto je baza  $B$  ortonormirana, formula za matricu projekcije je  $P = B (B^T A B)^{-1} B^T A$ .

```
# a
B = matrix(c(1,0,0,0,0,1),ncol=2); B
```

```
## [1,] [2,]
## [1,] 1 0
## [2,] 0 0
## [3,] 0 1
```

```
P = B %*% inv(t(B) %*% A %*% B) %*% t(B) %*% A; P
```

```
## [1,] [2,] [3,]
## [1,] 1 0.5 0
## [2,] 0 0.0 0
## [3,] 0 -0.5 1
```

```
x = matrix(c(0,1,0),ncol=1); x
```

```
## [1,]
## [1,] 0
## [2,] 1
## [3,] 0
```

```
y = P %*% x; y
```

```
## [1,]
## [1,] 0.5
## [2,] 0.0
## [3,] -0.5
```

Dobili smo koordinate projekcije  $y = [\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}]^T$  u standardnoj bazi.

```
# b
z = x - y; z
```

```
##      [,1]
## [1,] -0.5
## [2,]  1.0
## [3,]  0.5
```

```
t(z) %%% A %%% z
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
```

```
sqrt(t(z) %%% A %%% z)
```

```
##      [,1]
## [1,]    1
```

```
#####
# 3.8 #
#####
```

```
A = matrix(c(1,1,1,-1,2,0),ncol=2); A
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1  -1
## [2,]    1   2
## [3,]    1   0
```

```
z = GramSchmidt(A, normalize=FALSE); z
```

```
##      [,1]      [,2]
## [1,]    1 -1.333333
## [2,]    1  1.666667
## [3,]    1 -0.333333
```

```
z %%% diag(c(1,-3))
```

```
##      [,1] [,2]
## [1,]    1   4
## [2,]    1  -5
## [3,]    1   1
```

Vektori koji čine ortogonalnu bazu su  $[1, 1, 1]^T$  i  $[4, -5, 1]^T$ . Kad ih normiramo, dobijamo  $[1, 1, 1]^T/\sqrt{3}$  i  $[4, -5, 1]^T/\sqrt{42}$ .

```
#####
# 3.10 #
#####
```

```
theta = pi/6
```

```
A = matrix(c(cos(theta),sin(theta),-sin(theta),cos(theta)),ncol=2); A
```

```
##      [,1]      [,2]
## [1,] 0.8660254 -0.5000000
## [2,] 0.5000000  0.8660254
```

```
x1 = matrix(c(2,3),ncol=1); x1
```

```
##      [,1]
```

```
## [1,] 2
## [2,] 3
x2 = matrix(c(0,-1),ncol=1); x2
```

```
##      [,1]
## [1,] 0
## [2,] -1
```

```
A %*% x1
```

```
##      [,1]
## [1,] 0.2320508
## [2,] 3.5980762
```

```
A %*% x2
```

```
##      [,1]
## [1,] 0.5000000
## [2,] -0.8660254
```