

MAS VIMU Matematičke osnove mašinskog učenja

Zoran Ovcin

2026-01-06

LU Decomposition

Elementarne transformacije matrice po vrstama (Gausove) su:

- zamena mesta dvema vrstama,
- množenje elemenata vrste brojem različitom od nule,
- množenje vrste brojem i dodavanje nekoj drugoj vrsti (odgovarajućim elementima).

Elementarne transformacije se mogu vršiti na vrstama matrice A do dobijanja RREF oblika. One ne menjaju rang matrice. Gausov postupak eliminacije dovođenjem na sistema RREF rešava sistem jednačina.

Neka je A kvadratna matrica koja se Gausovim eliminacijama može dovesti na gornje trougaonu U ali koristeći jedino transformaciju

- množenje vrste brojem i dodavanje nekoj drugoj vrsti (odgovarajućim elementima).

Onda se matrica A može napisati kao proizvod donje trougaone (Lower triangular) L i gornje trougaone U (Upper triangular)) matrice: $A = L U$.

Donji trougao matrice L kreiramo od koeficijenata kojima smo množili dijagonalni element da bi oduzimanjem od elementa ispod dijagonale dobili nulu. Na primer $0 := a_{2,1} - a_{1,1} \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \Rightarrow l_{2,1} = \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}$.

Na dijagonalu matrice L stavljamo 1, iznad dijagonale 0.

Onda je $A = L U$.

Matrice L i U zovemo LU dekompozicija matrice A .

```
library(matlib)
A <- matrix(c(1, 2, 3,
              4, 5, 6,
              7, 8, 9), ncol = 3, byrow = T)
lua = LU(A)
lua$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    4    1    0
## [3,]    7    2    1
```

```
lua$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    0   -3   -6
## [3,]    0    0    0
```

```
lua$L %*% lua$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    2    3
## [2,]    4    5    6
## [3,]    7    8    9
```

```
det(A)
```

```
## [1] 0
```

LU dekompozicija postoji za neke singularne i za neke invertibilne matrice. Bez parcijalne pivotizacije ne može se dobiti za sve invertibilne matrice. Na primer za $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Ipak, ako se u dovođenju na gornje trougaonu U dozvoli elementarna transformacija:

- zamena mesta dvema vrstama,

onda se svaka invertibilna matrica A može permutovati po vrstama tako da ima LU dekompoziciju, $PA = LU$.

Matrica P nastaje permutovanjem jedinične matrice redosledom koji je potreban za dovođenje matrice A na gornje trougaonu.

Na primer $\begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 16 & 27 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 16 & 27 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 12 & 21 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} =: U$

Pri tome je matrica $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ nastala zamenom prve dve vrste jedinične matrice. To se radi u Gausovoj eliminaciji da bi se na dijagonalu doveo nenula element. Dovoljno je samo zapamtiti redosled kojim su poređane vrste jedinične matrice u matrici P .

Permutaciona matrica P sadrži nule i tačno jednu jedinicu u svakoj vrsti i koloni. Množenjem PA permutuju se vrste matrice A . Množenjem AP permutuju se kolone matrice A . $\det(P) = \pm 1$, $P^{-1} = P^T$.

```
A <- matrix(c(0, 4, 5,
              1, 2, 3,
              2, 16, 27), ncol = 3, byrow = T)
det(A)
```

```
## [1] -24
```

```
lua = LU(A)
lua$P
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    0    1    0
## [2,]    1    0    0
## [3,]    0    0    1
```

```
lua$L
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,]    1    0    0
## [2,]    0    1    0
## [3,]    2    3    1
```

```
lua$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
```

```
## [1,] 1 2 3
## [2,] 0 4 5
## [3,] 0 0 6
```

```
lua$L %*% lua$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 1 2 3
## [2,] 0 4 5
## [3,] 2 16 27
```

```
t(lua$P) %*% lua$L %*% lua$U
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 0 4 5
## [2,] 1 2 3
## [3,] 2 16 27
```

Takva zamena vrsta se zove parcijalna pivotizacija. Standardno se, pri Gausovim eliminacijama, u računu sa floating point brojevima, zamenom vrsta na dijagonalu dovodi element najveći po apsolutnoj vrednosti.

Dobijamo $A = P^T L U$.

LU dekompozicija se može koristiti za rešavanje sistema $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$, gde se za jednu vrednost matrice A zadaju razne vrednosti $\mathbf{b}$:

- Neka je za sistem $A \mathbf{x} = \mathbf{b}$ poznata LU dekompozicija matrice $A = L U$.
- Prvo rešavamo $L \mathbf{y} = \mathbf{b}$ što predstavlja zmenu unapred (forward substitution).
- Potom rešavamo $U \mathbf{x} = \mathbf{y}$ što predstavlja zmenu unazad (backward substitution).

Ako se za istu matricu A zadaju različite vrednosti $\mathbf{b}$, LU dekompozicijom se štedi broj računskih operacija.

- LU dekompozicija nije jedinstvena. Može se uraditi i za neke matrice koje nisu kvadratne.
- Algoritam LU dekompozicije lako proverava invertibilnosti matrice i određuje rang matrice, ali se mora zadati tolerancija greške zaokruživanja zbog floating point reprezentacije realnih brojeva.
- Greška koja nastaje zaokruživanjem (floating point error) je veća nego kod QR dekompozicije.

```
A = matrix(runif(9), ncol = 3)
```

```
lua = LU(A)
```

```
M = t(lua$P) %*% lua$L %*% lua$U - A
```

```
M
```

```
##      [,1]      [,2]      [,3]
## [1,] -2.879415e-09 -9.205794e-10 -9.059388e-10
## [2,] -7.091513e-10 -3.211847e-09 -4.413887e-09
## [3,] -6.202456e-10 -6.514843e-10 -4.080400e-09
```

```
round(M,digits=7)
```

```
##      [,1] [,2] [,3]
## [1,] 0 0 0
## [2,] 0 0 0
## [3,] 0 0 0
```