

MAS VIMU Matematičke osnove mašinskog učenja

Zoran Ovcin

2026-01-16

2.3.2 Elementary Transformations MML-Book

Za sistem linearnih jednačina

$$a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1$$

$$\ddots$$

$$a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m$$

sledeće ekvivalentne transformacije (Gausove eliminacije) ne menjaju skup rešenja:

- zamena mesta dvema jednačinama,
- množenje jednačine brojem različitim od nule,
- množenje jednačine brojem i dodavanje nekoj drugoj jednačini (levu stranu levoj strani, desnu desnoj).

Jednačine oblika $0 = \bar{b}$ se pomeraju na kraj sistema. Koeficijente uz svaku promenljivu držimo u svojoj koloni.

Vodeći koeficijent u svakoj jednačini je prvi različit od nule gledano sa leva. Navedenim transformacijama svaki sistem linearnih jednačina se može dovesti u Row-Echelon Form (REF) gde svaka sledeća jednačina (osim $0 = \bar{b}$) ima barem jednu nulu više pre vodećeg koeficijenta od prethodne. Vodeće koeficijente nazivamo pivotima, njihove kolone (promenljive) nazivamo bazične, ostale kolone (promenljive) su nebazične.

Istim transformacijama se može dobiti i Reduced Row-Echelon Form (RREF), gde su svi vodeći koeficijenti jednaki 1 i u njihovim kolonama su ostali koeficijenti jednaki nuli.

Postupak dovođenja sistema jednačina na RREF ili REF se zove Gausov postupak eliminacije.

Ako se u toku eliminacija pojavi jednačina $0 = \bar{b}$, gde je $\bar{b} \neq 0$, onda je sistem nemoguć, nema rešenja. Nadalje smatramo da sistem nije moguć.

Broj pivota ne može biti veći od broja promenljivih.

Partikularno rešenje sistema se dobija iz RREF tako što se promenljivama koje odgovaraju bazičnim kolonama dodeli desna strana odgovarajuće jednačine, a ostalim promenljivama (nebazičnim) se dodeli nula.

Ako je broj pivota jednak broju promenljivih (ako nema nebazičnih promenljivih), onda je partikularno rešenje jedinstveno.

Ako rešenje nije jedinstveno, ostala rešenja se mogu dobiti dodeljivanjem proizvoljnih vrednosti nebazičnim promenljivama.

Matrični zapis

Ako se uvede $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, gornji sistem jednačina se može zapisati u obliku $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Ako je $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, onda sistem zovemo homogen, on uvek ima partikularno rešenje $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Elementarne transformacije (Gausove) po vrstama matrice su:

- zamena mesta dvema vrstama,
- množenje elemenata vrste brojem različitim od nule,
- množenje vrste brojem i dodavanje nekoj drugoj vrsti (odgovarajućim elementima).

Elementarne transformacije se mogu vršiti na vrstama matrice sistema A do dobijanja RREF oblika. Kad izbacimo vrste sa nulama dobićemo matricu sa $r = \text{rk}(A)$ (rang matrice) vrsta oblika

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * & 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{1} & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

r pivot kolona sa 1 na dijagonali odgovaraju bazičnim promenljivama, neka je $\mathcal{B}$ skup rednih brojeva bazičnih promenljivih. * stoji umesto nekih realnih brojeva.

-1-trik

U dobijeni RREF matrice A bez nula vrsta dodajemo $n - r$ vrsta oblika $[0 \cdots 0 \text{ } -\mathbf{1} \ 0 \cdots 0]$ tako da se dobije kvadratna matrica $\tilde{A}$ koja na dijagonali ima samo 1 i -1 i ispod dijagonale nule. Bazičnim promenljivama odgovaraju kolone (r kolona) koje imaju 1 na dijagonali, nebazičnim ($n - r$ kolona) odgovaraju kolone sa -1 na dijagonali. Neka je $\mathcal{N}$ skup rednih brojeva nebazičnih kolona (promenljivih).

Opšte rešenje sistema je $\mathbf{x}_0 + \sum_{k \in \mathcal{N}} \alpha_k \tilde{\mathbf{a}}_k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}, k \in \mathcal{N}$ gde je $\mathbf{x}_0$ partikularno rešenje, a $\tilde{\mathbf{a}}_k, k \in \mathcal{N}$ su kolone matrice $\tilde{A}$ dobijene -1 -trikom koje odgovaraju nebazičnim promenljivama.

Linear Mappings (linearne transformacije)

Neka su V i W vektorski prostori nad $\mathbb{R}$. Funkciju $\Phi : V \rightarrow W$ zovemo linearna transformacija ili homomorfizam ako

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ \forall \lambda, \psi \in \mathbb{R}, \Phi(\lambda \mathbf{x} + \psi \mathbf{y}) = \lambda \Phi(\mathbf{x}) + \psi \Phi(\mathbf{y}).$$

Homomorfizam $\Phi : V \rightarrow W$ vektorskih prostora V i W se naziva

- Izomorfizam, ako je bijekcija
- Endomorfizam, ako je $W = V$
- Automorfizam, ako je endomorfizam i izomorfizam.

Definišemo automorfizam $\text{id}_V : V \rightarrow V$, kao $\text{id}_V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Neka su V i W vektorski prostori sa, redom, uređenim bazama $B = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ i $C = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m)$.

Neka je dat homomorfizam $\Phi : V \rightarrow W$:

$$\Phi(\mathbf{b}_j) = \alpha_{1,j} \mathbf{c}_1 + \cdots + \alpha_{m,j} \mathbf{c}_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{i,j} \mathbf{c}_i, \ j = 1, \dots, n.$$

Onda matricu $A_\Phi = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ & \ddots & \\ \alpha_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{bmatrix}$ nazivamo matrica linearne transformacije Φ u odnosu na baze B i C . Ako su $\hat{\mathbf{x}}$ koeficijenti vektora $\mathbf{x}$ izraženog u bazi B , onda su $A_\Phi \hat{\mathbf{x}}$ koordinate $\Phi(\mathbf{x})$ u bazi C .

Neka su pored baza B i C date baze $\tilde{B} = (\tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)$ i $\tilde{C} = (\tilde{\mathbf{c}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{c}}_m)$ redom prostora V i W .

Neka je S matrica automorfizma id_V u odnosu na baze $\tilde{B}$ i B i neka je T matrica automorfizma id_W u odnosu na baze $\tilde{C}$ i C .

Onda je $\tilde{A}_\Phi = T^{-1}A_\Phi S$ matrica homomorfizma Φ u odnosu na baze $\tilde{B}$ i $\tilde{C}$.

Za matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ kažemo da su ekvivalentne ako postoje regularne matrice $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ takve da je $\tilde{A} = T^{-1}AS$.

Relacija ekvivalencije matrica je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Matrice $\tilde{A}_\Phi$ i A_Φ su ekvivalentne. Ekvivalentne matrice imaju isti rang i primenom elementarnih transformacija od jedne matrice može se dobiti druga.

Za matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ i $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ kažemo da su slične ako postoji regularna matrica $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ takva da je $\tilde{A} = S^{-1}AS$.

Sličnost matrica je refleksivna, simetrična i tranzitivna relacija.

Ako su matrice slične, onda su ekvivalentne.

Image and Kernel (slika i jezgro)

Neka je dat homomorfizam $\Phi : V \rightarrow W$.

$$\ker(\Phi) := \Phi^{-1}(\{\mathbf{0}_W\}) = \{\mathbf{v} \in V : \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\} \quad \text{Im}(\Phi) := \Phi(V) = \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V, \Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}.$$

Vektore Euklidskog vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$ poistovećujemo sa vektor kolonama $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$.

Neka je data matrica $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i homomorfizam $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$; $\Phi(\mathbf{x}) = A \mathbf{x}$.

Označimo sa $\mathbf{a}_j, j = 1, \dots, n$, j -tu kolonu matrice A , tako da je $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$. Onda je

- $\text{Im}(\Phi) = \{A \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} = \left\{ \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{a}_j : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n] \subseteq \mathbb{R}^m$.
- $\dim(\text{Im}(\Phi)) = \text{rk}(A)$.
- $\ker(\Phi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A \mathbf{x} = \mathbf{0} = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^m\}$.
- $\text{Im}(\Phi)$ je potprostor od W , $\ker(\Phi)$ je potprostor V .

Rank-Nullity Theorem (Teorema o rang i nulitetu)

Ako su V i W Euklidski vektorski prostori i homomorfizam $\Phi : V \rightarrow W$, onda

$$\dim(\text{Im}(\Phi)) + \dim(\ker(\Phi)) = \dim(V).$$

Neka je Φ homomorfizam Euklidskih vektorskih prostora $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ i neka je $A = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrica homomorfizma u odnosu na standardne baze $B = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ i $C = (\hat{\mathbf{e}}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_m)$.

Ako izrazimo vektor $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n$ u bazi B , onda

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \text{daje vektor } \mathbf{y} = \Phi(\mathbf{x}) \text{ izražen u bazi } C, \quad \mathbf{y} = y_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \dots + y_m \hat{\mathbf{e}}_m.$$

Ako označimo sa $\mathbf{a}_k, k = 1, \dots, n$ kolone matrice A i sa $\tilde{\mathbf{a}}_k, k = 1, \dots, n$ kolone matrice $\tilde{A}$ dobijene koristeći -1 -trik. Onda

- bazu $\text{Im}(\Phi)$ čine vektori kolona matrice A koje odgovaraju bazičnim promenljivama: $\mathbf{a}_k, k \in \mathcal{B}$,
- bazu $\text{ker}(\Phi)$ čine vektori kolona matrice $\tilde{A}$ koji odgovaraju nebazičnim promenljivama: $\tilde{\mathbf{a}}_k, k \in \mathcal{N}$.