Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Saobraćajni odsek, V godina

Broj indeksa __________
Prezime i ime ___________________________________

Operaciona istraživanja - deo 1

25. I 2010. godine

Poljoprivredno gazdinstvo ima na raspolaganju maksimalno 50 ha obrađene površine. Na njoj treba posejati pšenicu, kukuruz i ječam.
Očekivana zarada od 1 ha zasejane površine je 3 novčane jedinice (n.j.) za pšenicu, 4 n.j. za kukuruz i 2 n.j. za ječam.
Za 1 ha pod pšenicom troši se 2 litra pesticida, za 1 ha pod kukuruzom 4 litra pesticida, za 1 ha pod ječmom potrebno je 2.5 litra pesticida. Na raspolaganju je maksimalno 150 l pesticida.
Površina pod ječmom mora biti barem kolika je i površina pod pšenicom.
Koliko koje kulture treba zasejati pa da očekivana zarada bude maksimalna?

Uvešćemo veličine:
$x_1 =$ površina zasejana pšenicom [ha]
$x_2 =$ površina zasejana kukuruzom [ha]
$x_3 =$ površina zasejana ječmom [ha]
$z =$ očekivana zarada [n.j.].

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\to \max \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 50 \\ 2x_2 + 4x_2 + 2.5x_3 &\leq 150 \\ x_1 \qquad - x_3 &\leq 0 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
w_1	1	1	1	1	0	0	50
w_2	2	4	$5/2$	0	1	0	150
w_3	1	0	-1	0	0	1	0
	-3	-4	-2	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
w_1	$1/2$	0	$3/8$	1	$-1/4$	0	$25/2$
x_2	$1/2$	1	$5/8$	0	$1/4$	0	$75/2$
w_3	1	0	-1	0	0	1	0
	-1	0	$1/2$	0	1	0	150

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
w_1	0	0	$7/8$	1	$-1/4$	$-1/2$	$25/2$
x_2	0	1	$9/8$	0	$1/4$	$-1/2$	$75/2$
x_1	1	0	-1	0	0	1	0
	0	0	$-1/2$	0	1	1	150

3	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	
x_3	0	0	1	$8/7$	$-2/7$	$-4/7$	$100/7$
x_2	0	1	0	$-9/7$	$4/7$	$1/7$	$150/7$
x_1	1	0	0	$8/7$	$-2/7$	$3/7$	$100/7$
	0	0	0	$4/7$	$6/7$	$5/7$	$1100/7$

$$x = \left[\frac{100}{7}, \frac{150}{7}, \frac{100}{7}\right], \; \zeta = \frac{1100}{7}$$

Treba zasejati:
$x_1 = \frac{100}{7}$ ha ≈ 14.29 ha pšenicom,
$x_2 = \frac{150}{7}$ ha ≈ 21.43 ha kukuruzom,
$x_3 = \frac{100}{7}$ ha ≈ 14.29 ha ječmom.
Očekivani prihod je $z = \frac{1100}{7}$ n.j. ≈ 157.14 n.j. .

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Saobraćajni odsek, V godina

Broj indeksa ___________
Prezime i ime ______________________________________

Operaciona istraživanja - deo 2

25. I 2010. godine

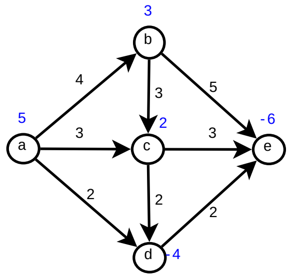
Data je mreža transporta sa čvorovima $\mathcal{N} = \{a,b,c,d,e\}$ i granama $\mathcal{A} = \{ab,ac,ad,bc,be,cd,ce,de\}$. Zalihe su redom $\{5,3,2,-4,-6\}$, a cene transporta redom $\{4,3,2,3,5,2,3,2\}$.
Problem linearnog programiranja koji odgovara nalaženju najjeftinijeg transporta je $c^T x \to \min$, $Ax = -b$, $x \geq 0$.
Odrediti matrice A, b i c.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & & & & & \\ 1 & & & -1 & -1 & & & \\ & 1 & & 1 & & -1 & -1 & \\ & & 1 & & & 1 & & -1 \\ & & & & 1 & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix}, \; c = [4,3,2,3,5,2,3,2]^T.$$

Postaviti dualni problem sa dodatnim promenljivama.

$$\xi = -b^T y \to \max$$
$$A^T y + z = c$$
$$z \geq 0$$

Napraviti skicu problema.



Polazeći od pokrivajućeg stabla

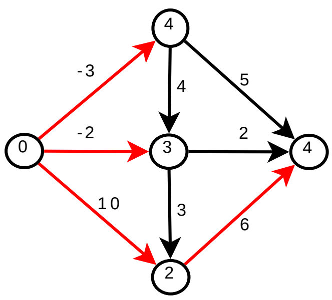
a) $\{ab,ac,ad,de\}$

b) $\{ab,bc,be,cd\}$

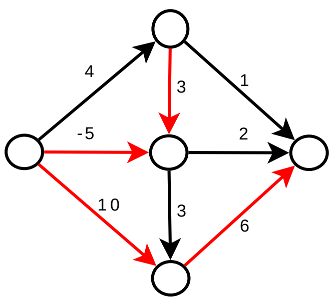
izračunati odgovarajuće protoke, dualne promenljive i dodatne dualne promenljive.

Za oba pokrivajuća stabla: Ako je problem primarno dopustiv - napraviti jednu primarnu pivotizaciju i izračunati cenu transporta u polaznom i dobijenom planu transporta. Ako je dualno dopustiv - napraviti jednu dualnu pivotizaciju.

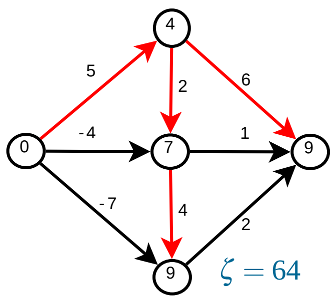
a)



Dualno dopustiv

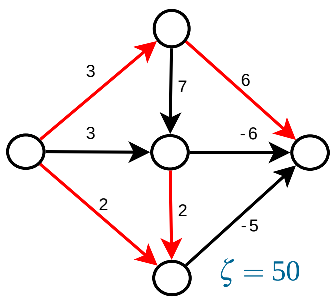


b)



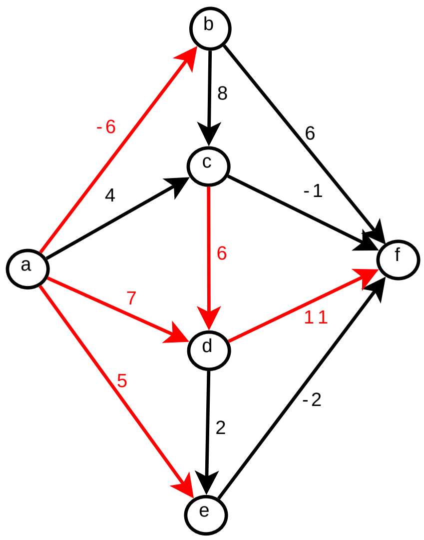
$\zeta = 64$

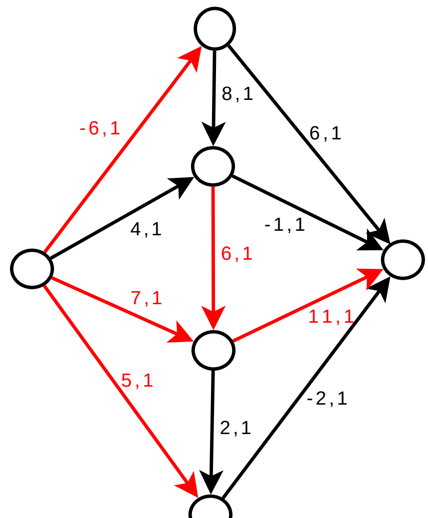
Primarno dopustiv



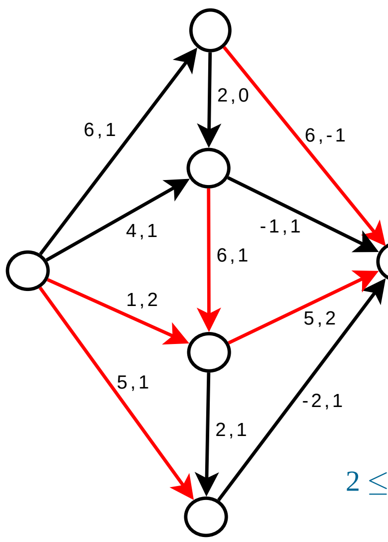
$\zeta = 50$

Na skici je data mreža transporta sa pokrivajućim stablom označenim crvenom bojom. Brojevi na granama su protoci (crveno) i dodatne dualne promenljive (crno).
Polazeći od datog balansiranog protoka naći protok transporta sa minimalnom cenom perturbujući sa μ.

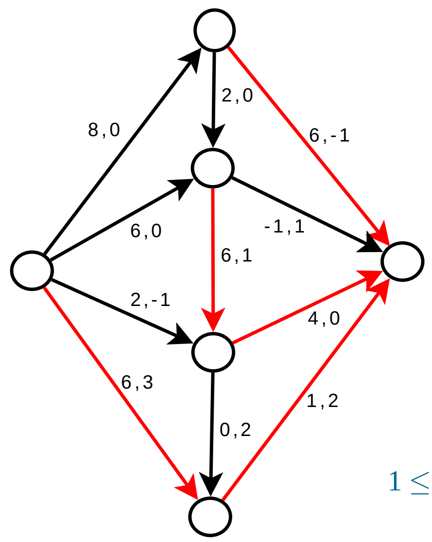




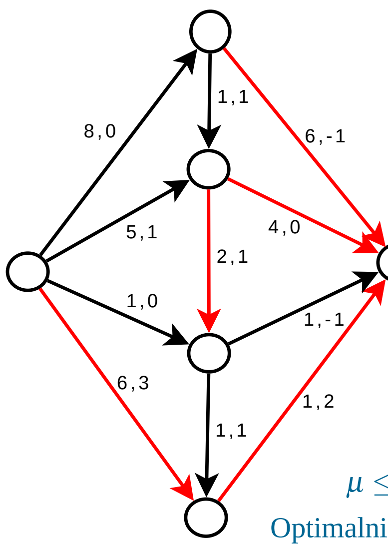
$6 \leq \mu$



$2 \leq \mu \leq 6$

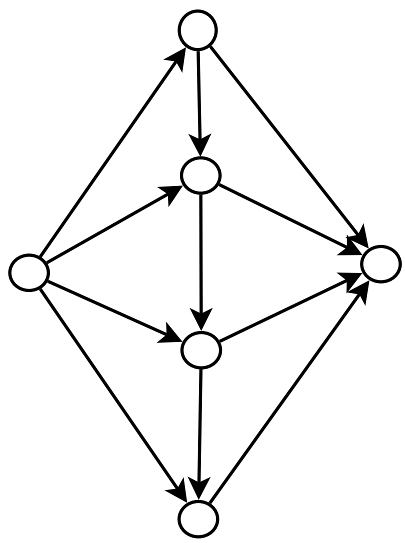


$1 \leq \mu \leq 2$



$\mu \leq 1$

Optimalni transport



Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
Saobraćajni odsek, V godina

Broj indeksa __________
Prezime i ime ____________________________________

Operaciona istraživanja - deo 3

25. I 2010. godine

Proces radjanja i umiranja je proces čija matrica brzina prelaza ima oblik:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

Matrica brzina prelaza za sistem masovnog opsluživanja M/M/3/2 glasi:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -3\mu \end{bmatrix}.$$

Na autoputu postoji jedna naplatna stanica. Automobili dolaze po Poasonovoj raspodeli, u proseku 1 u minuti. Usluživanje je po eksponencijalnoj raspodeli, u proseku 30 sekundi.

- Napisati, prema Kendalovoj notaciji, koji tip sistema je zadat: $M|M|1$
- Za dati sistem $\lambda =$ 1, $\mu =$ 2,

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & (\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

- Izračunati očekivani broj klijenata u sistemu.

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\,, \text{ jer je } \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}\,.$$

Banka ima tri identična šaltera ispred kojih se formira zajednički red.
Korisnici pristižu po Poasonovoj raspodeli, prosečno svakih 40 sekundi.
Šalteri imaju vreme opsluživanja raspoređeno po eksponencijalnoj raspodeli. Jedan šalter može da opsluži prosečno 40 korisnika na sat.

- Izračunati ergodične verovatnoće.
- Izračunati verovatnoću da je u sali više od 3 klijenta.
- Izračunati očekivani broj korisnika u banci.
- Izračunati očekivani broj zauzetih šaltera.
- Izračunati prosečno vreme koje korisnik provede u banci.
- Izračunati prosečno vreme koje korisnik provede u čekajući.

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Ovo je sistem masovnog opsluživanja M|M|3 sa $\lambda = 3600/40 = 90h^{-1}$ i $\mu = 40h^{-1}$.
Sistem je ergodičan jer je $\lambda = 90 < 3\mu = 120$.

$$s_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{6\mu^3} + \frac{\lambda^4}{18\mu^4} + \cdots = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\left[1 + \frac{\lambda}{3\mu} + \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^2 + \cdots\right] = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\frac{1}{1-\frac{\lambda}{3\mu}} = \frac{107}{8}$$

- Ergodične verovatnoće su:

  $$p_0^* = \frac{8}{107},\ p_1^* = \frac{\lambda}{\mu}p_0^* = \frac{18}{107},\ p_2^* = \frac{\lambda}{2\mu}p_1^* = \frac{81}{428},\ p_3^* = \frac{\lambda}{3\mu}p_2^*,\ p_4^* = \frac{\lambda}{3\mu}p_3^*,\ \ldots$$

  Opšta formula za p_k^*, za $k = 3, 4, 5, \ldots$ je

  $$p_k^* = p_2^*\left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-2} = \frac{81}{428}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-2}.$$

- $p_4^+ = p_4^* + p_5^* + \cdots = 1 - (p_0^* + p_1^* + p_2^* + p_3^*) = 1 - \left(\frac{8}{107} + \frac{18}{107} + \frac{81}{428} + \frac{243}{1712}\right) = \frac{729}{1712} = 0.4258$
- $L = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k^* = 1 \cdot p_1^* + \sum_{k=2}^{\infty} k p_2^* \left(\frac{\lambda}{3\mu}\right)^{k-2} = \frac{18}{107} + \frac{4}{3} \cdot \frac{81}{428} \cdot \left(\frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} - 1\right) = \frac{423}{107} = 3.9533$
- $L_S = E(S)$, gde je $S : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ p_0^* & p_1^* & p_2^* & p_3^* + p_4^* + \cdots \end{pmatrix}$,

  $L_S = 1 \cdot p_1^* + 2 \cdot p_2^* + 3 \cdot (p_3^* + p_4^+) = \frac{18}{107} + 2\frac{81}{428} + 3\left(\frac{243}{1712} + \frac{729}{1712}\right) = \frac{9}{4} = 2.25$
- $W = \frac{1}{\lambda}L = \frac{1}{90}\frac{413}{107} = \frac{413}{9630} = 0.04289h = 2.57min$
- $W_q = W - W_o = \frac{413}{9630} - \frac{1}{40} = \frac{689}{38520} = 0.01789h = 1.07min$