

## Operaciona istraživanja - deo 1

8. II 2010. godine

Stolarska radionica pravi stolice, stolove i police. Za svaki proizvod je potrebno uraditi sečenje, sklapanje i bojenje.

Vreme potrebno za pojedinu operaciju u satima je dato u tabeli:

	sečenje	sklapanje	farbanje
stolica	1	1	1
sto	1	2	1
polica	3	1	1

Za proizvodnju iduće nedelje uvodimo veličine:

$x_1$  = broj stolica

$x_2$  = broj stolova

$x_3$  = broj polica

$z$  = zarada [€].

$$z = 20x_1 + 30x_2 + 35x_3 \rightarrow \max$$

$$x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 600$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 500$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 300$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

0	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	
$w_1$	1	1	3	1	0	0	0	600
$w_2$	1	2	1	0	1	0	0	500
$w_3$	1	1	1	0	0	1	0	300
$w_4$	-1	2	0	0	0	0	1	0
	-20	-30	-35	0	0	0	0	0

1	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	
$x_3$	1/3	1/3	1	1/3	0	0	0	200
$w_2$	2/3	5/3	0	-1/3	1	0	0	300
$w_3$	2/3	2/3	0	-1/3	0	1	0	100
$w_4$	-1	2	0	0	0	0	1	0
	-25/3	-55/3	0	35/3	0	0	0	7000

U idućoj nedelji radionica ima na raspolaganju 600 sati za sečenje, 500 za sklapanje i 300 za farbanje.

Broj proizvedenih stolica mora biti barem dva puta veći od broja proizvedenih stolova.

Stolice se prodaju po ceni 20€, stolovi 30€, police 35€.

Koji plan proizvodnje za iduću nedelju daje maksimalnu zaradu?

2	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	
$x_3$	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	150
$w_2$	0	1	0	0	1	-1	0	200
$x_1$	1	1	0	-1/2	0	3/2	0	150
$w_4$	0	3	0	-1/2	0	3/2	1	150
	0	-10	0	15/2	0	25/2	0	8250

3	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	
$x_3$	0	0	1	1/2	0	-1/2	0	150
$w_2$	0	0	0	1/6	1	-3/2	-1/3	150
$x_1$	1	0	0	-1/3	0	1	-1/3	100
$x_2$	0	1	0	-1/6	0	1/2	1/3	50
	0	0	0	35/6	0	35/2	10/3	8750

$$x = [100; 50; 150], \zeta = 8750$$

Treba proizvoditi 100 stolica, 50 stolova i 150 polica, ostvariće se zarada od 8750€.

## Operaciona istraživanja - deo 2

8. II 2010. godine

Data je mreža transporta sa čvorovima  $\mathcal{N} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  i granama  $\mathcal{A} = \{ab, ad, af, bc, ca, db, dc, eb, ed, ef, eg, fg, ga, gb\}$ . Zalihe su redom  $\{4, 2, -6, 3, 6, -5, -4\}$ , a cene transporta redom  $\{2, 1, 3, 3, 2, 3, 1, 1, 4, 7, 10, 2, 1, 2\}$ .

Napisati u matricnom obliku problem linearnog programiranja koji odgovara minimizaciji cene transporta kroz datu mrežu i odrediti matrice. Uneti na prvi graf cene i zalihe.

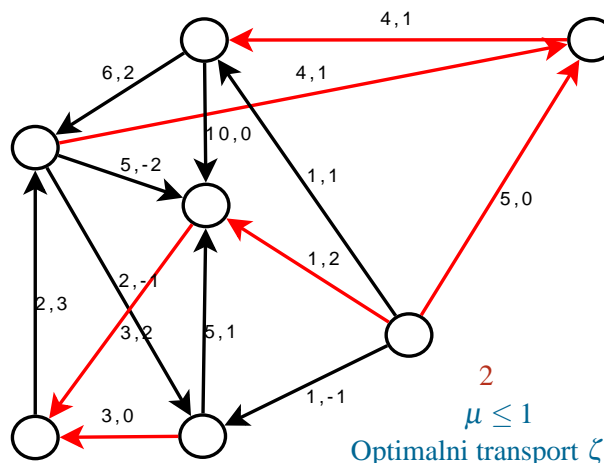
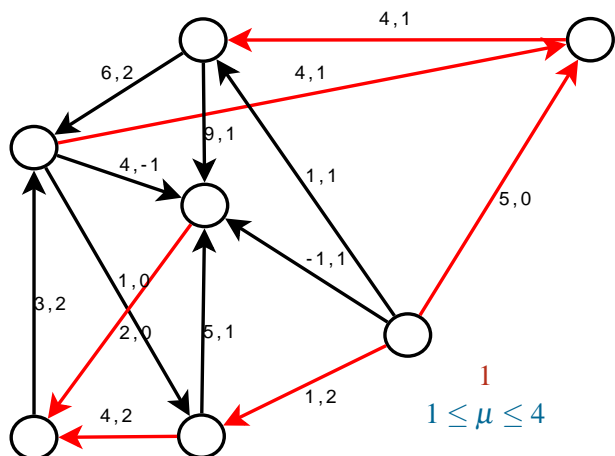
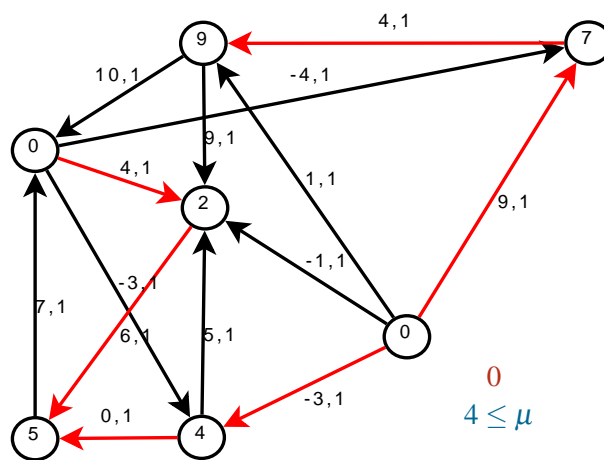
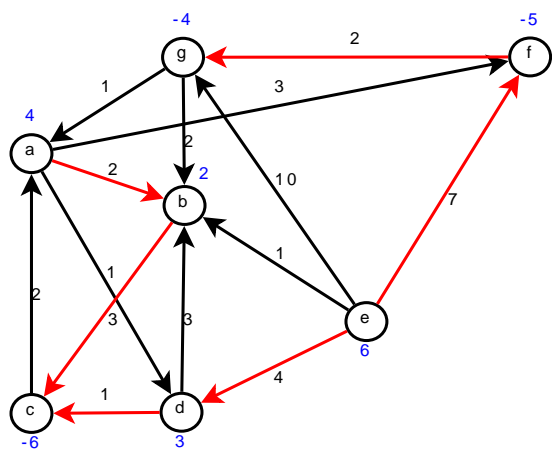
$$c^T x \rightarrow \min, Ax = -b, x \geq 0$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \\ 3 \\ 6 \\ -5 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 1 & 1 & 4 & 7 & 10 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Polazeći od pokrivajućeg stabla  $\{ab, bc, cd, de, ef, fg\}$  izračunati balansirani protok, dualne promenljive i dodatne dualne promenljive.

Rešiti problem minimizacije cene mrežnog protoka.



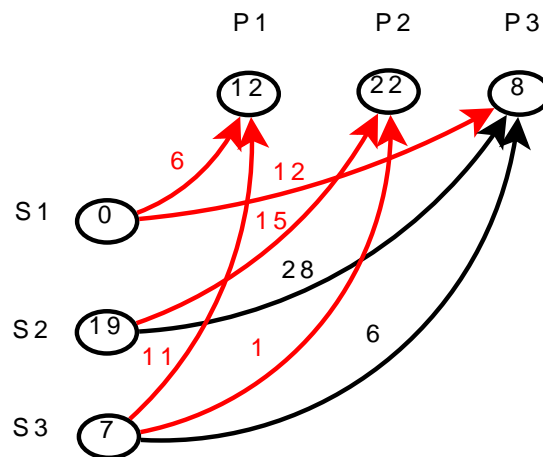
Rešiti problem minimizacije cene transporta između snabdevača  $S_1, S_2, S_3$  i potrošača  $P_1, P_2, P_3$ . Cene transporta, potrebe i zalihe su dati u tabeli. Za optimalnu tabelu skicirati graf transporta, na graf uneti vrednosti balansiranog protoka, dualnih i dodatnih dualnih promenljivih iz optimalne tabele.

	$P_1$	$P_2$	$P_3$	zalihe
$S_1$	12	-	8	18
$S_2$	-	3	17	15
$S_3$	5	15	7	12
potrebe	17	16	12	

12	5	$M$	8	12	0
$M$	$(2M - 15)$	3	17	$(M + 6)$	$M - 3$
5	12	15	7	(6)	7
12		$M$	8		

12	6	$M$	$(M - 22)$	8	12	0
$M$	$(M + 7)$	3	15	17	(28)	19
5	11	15	1	7	(6)	7
12		22		8		

Optimalna tabela. Transport košta 283.



## Operaciona istraživanja - deo 3

8. II 2010. godine

Perionica automobila ima dva mesta za pranje i dva za čekanje. Automobili koji dođu kad je sistem pun, odlaze.

Automobili pristižu po Poasonovoj raspodeli, prosečno 5 na sat. Trajanje pranja jednog sutomobila ima eksponencijalnu raspodelu, prosečno 20 minuta.

- Napisati matricu brzina prelaza datog sistema masovnog opsluživanja, odrediti  $\lambda$  i  $\mu$ .
- Izračunati ergodične verovatnoće.
- Izračunati prosečan broj automobila u sistemu.
- Izračunati prosečno vreme koje automobil provede u sistemu.
- Izračunati broj automobila za 24 sata koji bivaju odbijeni.
- Izračunati prosečan broj zauzetih mesta za pranje.
- Koji deo od 24 časa nema nikog u sistemu?

Ovo je sistem masovnog opsluživanja  $M/M/2/4$  sa  $\lambda = 5h^{-1}$  i  $\mu = 60/20 = 3h^{-1}$ .

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda + \mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu & -(\lambda + 2\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{bmatrix}.$$

$$s_0 = 1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{4\mu^3} + \frac{\lambda^4}{8\mu^4} = \frac{4003}{648} = 6.1775.$$

Ergodične verovatnoće su:

$$p_0^* = \frac{1}{s_0}, p_1^* = \frac{\lambda}{\mu} p_0^*, p_2^* = \frac{\lambda}{2\mu} p_1^*, p_3^* = \frac{\lambda}{2\mu} p_2^*, p_4^* = \frac{\lambda}{2\mu} p_3^*.$$

$$p = [p_0, p_1, p_2, p_3, p_4] = \left[ \frac{648}{4003}, \frac{1080}{4003}, \frac{900}{4003}, \frac{750}{4003}, \frac{625}{4003} \right] = [0.16188, 0.26980, 0.22483, 0.18736, 0.15613]$$

Prosečan broj automobila u sistemu je

$$L = \sum_{k=0}^4 k p_k^* = 1 \cdot \frac{1080}{4003} + 2 \cdot \frac{900}{4003} + 3 \cdot \frac{750}{4003} + 4 \cdot \frac{625}{4003} = \frac{7630}{4003} = 1.9061.$$

Efektivna propusna moć sistema je  $\bar{\lambda} = (1 - p_4^*)\lambda = 16890/4003 = 4.2193$ . Po Littleovoj formuli prosečno vreme koje klijent provede u sistemu je

$$W = \frac{1}{\bar{\lambda}} L = \frac{763}{1689} = 0.45175.$$

Za 24 sata broj odbijenih automobila je

$$24 \cdot \lambda \cdot p_4^* = 24 \cdot 5 \cdot \frac{625}{4003} = \frac{75000}{4003} = 18.736.$$

Slučajna promenljiva koja predstavlja broj zauzetih mesta za pranje je

$$S: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ p_0^* & p_1^* & p_2^* + p_3^* + p_4^* \end{pmatrix}$$

Prosečan broj zauzetih mesta za pranje je

$$E(S) = 1 \cdot p_1^* + 2(p_2^* + p_3^* + p_4^*) = \frac{5630}{4003} = 1.4064.$$

Deo dana u kome nema nikog u sistemu je  $24p_0^* = 24 \frac{648}{4003} = \frac{15552}{4003} = 3.8851h = 3h53min6.31s.$