Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad
ČET

Operaciona istraživanja, kolokvijum 1

23. V 2016. godine

Teorija

Za problem linearnog programiranja

$$\begin{aligned} \zeta = c^T x &\to \max \\ Ax &= b \\ x &\geq 0, \end{aligned}$$

gde je $A = [B\,N]$ blok matrica u kojoj su levo kolone baznih promenljivih (x_B), a desno nebaznih (x_N), $x = [x_B^T\,x_N^T]^T$, $c = [c_B^T\,c_N^T]^T$, izvesti rečnik u matričnom obliku.

$$Ax = [B\,N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = Bx_B + Nx_N = b \;\Leftrightarrow\; Bx_B = b - Nx_N \;\Leftrightarrow\; x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$\begin{aligned} \zeta &= c^T x = [c_B^T\,c_N^T]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = c_B^T x_B + c_N^T x_N = c_B^T(B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N = \\ &= c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N = c_B^T B^{-1}b - (c_B^T B^{-1}N - c_N^T)x_N = c_B^T B^{-1}b - ((B^{-1}N)^T c_B - c_N)^T x_N \end{aligned}$$

Zadatak

Na raspolaganju su nam smese mizli A, B i C sa specifikacijama:

	lešnik	suvo grožđe	cena [RSD/kg]
A	10%	18%	24
B	20%	9%	20
C	20%	45%	30

Treba napraviti novu smesu ovih mizli koja sadrži barem 20% lešnika i barem 24% suvog grožđa. Treba naći koja smesa postojećih mizli daje minimalnu cenu.
Uvesti x_1, x_2 i x_3, promenljive koje određuju učešće redom mizli A, B i C u 1kg smese. Postaviti problem linearnog programiranja minimizacije cene 1kg smese. Dualnom Simplex metodom rešiti postavljeni problem linearnog programiranja.
U kojem opsegu se može promeniti cena mizli A tako da dobijeno rešenje ostane optimalno?

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} \zeta & = & 24x_1 & + & 20x_2 & + & 30x_3 & \to & \min \\ & & 0.1x_1 & + & 0.2x_2 & + & 0.3x_3 & \geq & 0.2 \\ & & 0.18x_1 & + & 0.09x_2 & + & 0.45x_3 & \geq & 0.24 \\ & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ & & & & \multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0} \end{array}$$

0	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
w_1	$-1/10$	$-1/5$	$-3/10$	1	0	0	0	$-1/5$
w_2	$-9/50$	$-9/100$	$-9/20$	0	1	0	0	$-6/25$
w_3	1	1	1	0	0	1	0	1
w_4	-1	-1	-1	0	0	0	1	-1
	24	20	30	0	0	0	0	0

1	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
w_1	$1/10$	0	$-1/10$	1	0	0	$-1/5$	0
w_2	$-9/100$	0	$-9/25$	0	1	0	$-9/100$	$-3/20$
w_3	0	0	0	0	0	1	1	0
x_2	1	1	1	0	0	0	-1	1
	4	0	10	0	0	0	20	-20

2	x_1	x_2	x_3	w_1	w_2	w_3	w_4	
w_1	$1/8$	0	0	1	$-5/18$	0	$-7/40$	$1/24$
x_3	$1/4$	0	1	0	$-25/9$	0	$1/4$	$5/12$
w_3	0	0	0	0	0	1	1	0
x_2	$3/4$	1	0	0	$25/9$	0	$-5/4$	$7/12$
	$3/2$	0	0	0	$250/9$	0	$35/2$	$-145/6$

Optimalna tabela. $x_1^* = 0$, $x_2^* = 7/12$, $x_3^* = 5/12$, $\zeta^* = 145/6 = 24.167$. A : B : C = 0 : 7 : 5.
Promena vektora cena $c = [24, 20, 30, 0, 0, 0, 0]^T$ u obliku $c := c + t\Delta c$, gde je $\Delta c = [1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ uzrokuje promenu $z_N^* := z_N^* + t\Delta z_N$, gde je $\Delta z_N = (B^{-1}N)^T \Delta c_B - \Delta c_N = [-1, 0, 0]^T$, jer je $c_B = [0, 0, 0, 0]^T$ i $c_N = [1, 0, 0]^T$.
Sistem nejednačina $z_N^* + t\Delta z_N \geq 0$ ima jednu nejednačinu: $3/2 - t \geq 0$, čije rešenje je $t \leq 3/2$, jer je $z_N^* = [3/2, 250/9, 35/2]^T$.
Dakle: Cena $c_1 (= 24)$ može da se kreće u opsegu $(-\infty, 25.5]$ i da pri tome dobijeno rešenje ostane optimalno.